ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVI.

FASC. 3—4.

SZEGED, 20. XII. 1955.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

16. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1955. december 20.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Sur une généralisation de la notion de dérivée.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

1. Il s'agira dans cette note d'une généralisation de la notion de dérivée qui se rattache à la notion de continuité sous négligence des ensembles appartenant à une famille $\mathfrak{N}$ d'ensembles, famille qui doit remplir quelques conditions simples. Cet ordre d'idées de négliger les ensembles $\mathfrak{N}$, déjà classique et dû à R. BAIRE, m'a conduit à m'occuper dans deux ouvrages antérieurs [1, 2] des fonctions localement monotones sous négligence des ensembles en question; dans la note présente, j'appliquerai les mêmes idées à définir une sorte de nombres dérivés sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ et à examiner les propriétés de ces nombres dérivés généralisés et des fonctions qui sont dérivables sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$.

Après avoir défini les notions en question, je m'occuperai dans le § 3 d'une généralisation aux nombres dérivés généralisés du théorème bien connu de DENJOY, traitant des nombres dérivés de DINI. La voie la plus commode qui nous conduit à cette généralisation, c'est d'établir d'abord une généralisation analogue du théorème de KOLMOGOROFF et de VERTCHENKO sur le contingent des ensembles plans, d'où on parvient, par une légère modification du raisonnement qui fournit le théorème de DENJOY à partir du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO, à la généralisation en question, tandis que la généralisation mentionnée du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO se démontre comme conséquence immédiate du même théorème.

Les résultats du § 3 nous permettent au § 4 de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit dérivable sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ en tous les points d'un ensemble donné E, excepté ceux d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Cette condition consiste en ce que la fonction doit être de variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur un ensemble qui ne diffère de l'ensemble E qu'en un ensemble qui est la réunion d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Dans le même ordre d'idées, nous examinerons les propriétés des fonctions à variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$.

Dans § 5, nous nous occuperons enfin d'une généralisation du théorème de HASLAM-JONES sur les différentielles extrêmes d'une fonction à deux variables, généralisation qui se rattache à une généralisation parallèle du théorème de F. ROGER sur le contingent des ensembles dans l'espace; tout cela s'obtient par une modification des méthodes dues à S. SAKS de la même façon que les résultats du § 3.

2. Considérons une famille héréditaire et σ-additive d'ensembles linéaires, c'est-à-dire une famille $\mathfrak{N}$ de sous-ensembles de la droite $R_1 = \underset{x}{E}[-\infty < x < +\infty]$, famille qui remplit les conditions suivantes:

(2.1) Si $A \in \mathfrak{N}$ et si $B \subset A$, on a $B \in \mathfrak{N}$;

(2.2) Si $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, on a $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{N}$.

Désignons par $U_{\mathfrak{N}}$ l'ensemble composé des points $x_0 \in R_1$ tels qu'on a $(x_0, x_0+\delta) \notin \mathfrak{N}$ et $(x_0-\delta, x_0) \notin \mathfrak{N}$ pour tous les nombres $\delta > 0$. On démontre par un raisonnement facile[1]) la proposition suivante:

(2.3) *On a $R_1 - U_{\mathfrak{N}} = N + D$, où $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble D est dénombrable.*

Un ensemble $E \subset R_1$ et une fonction $f(x)$ réelle et finie, définie pour $x \in R_1$, étant donnés, désignons par $\sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$ la borne inférieure (finie ou infinie) des valeurs y telles que

(2.4) $$\underset{x}{E}[f(x) > y, x \in E] \in \mathfrak{N},$$

et par $\inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$ la borne supérieure des valeurs y telles que

(2.5) $$\underset{x}{E}[f(x) < y, x \in E] \in \mathfrak{N}.$$

On constate en utilisant les conditions (2.1) et (2.2) que l'ensemble des y satisfaisant à (2.4) est identique à l'intervalle $[M, +\infty]$, et que celui des y satisfaisant à (2.5) est identique à l'intervalle $[-\infty, m]$, où $M = \sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$, $m = \inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$. Au cas où $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, $\sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$ et $\inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x)$ coïncident respectivement avec les bornes supérieure et inférieure au sens classique de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble E, tandis que si $\mathfrak{N}$ désigne la famille des ensembles de mesure nulle, on parvient à $\operatorname{vrai\,max}_{x\in E} f(x)$ et $\operatorname{vrai\,min}_{x\in E} f(x)$.

On a pour $E' \subset E$, en vertu de (2.1),

(2.6) $$\sup_{x\in E'}^{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x), \quad \inf_{x\in E'}^{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x).$$

$\mathfrak{N}'$ étant une autre famille héréditaire et σ-additive, la relation $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ entraîne évidemment que

(2.7) $$\sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \sup_{x\in E}^{\mathfrak{N}'} f(x), \quad \inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \inf_{x\in E}^{\mathfrak{N}'} f(x).$$

---

[1]) Cf. [2], th. (3.1).

(2.8) *Si* $E \in \mathfrak{N}$, *on a* $\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = -\infty$, $\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = +\infty$. *Si* $E \notin \mathfrak{N}$, *on a*

$$+\infty \neq \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \neq -\infty.$$

Démonstration. La première assertion s'ensuit de ce que, pour $E \in \mathfrak{N}$, tout y réel satisfait à (2.4) et à (2.5). Réciproquement $\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = -\infty$ entraîne

$$\underset{x}{E}[f(x) > -n, x \in E] \in \mathfrak{N} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donc, en vertu de (2.2), $E \in \mathfrak{N}$. Un raisonnement analogue s'applique au cas où $\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = +\infty$. Enfin, si l'on avait

$$M = \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) < \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = m,$$

on aurait pour $M < y_1 < y_2 < m$

$$\underset{x}{E}[f(x) > y_1, x \in E] \in \mathfrak{N} \text{ et } \underset{x}{E}[f(x) < y_2, x \in E] \in \mathfrak{N},$$

donc, d'après (2.2), $E \in \mathfrak{N}$.

On a évidemment d'après (2.1) et (2.2)

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} [f(x) + g(x)] \leqq \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) + \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} g(x), \tag{2.9}$$

$$\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} [f(x) + g(x)] \geqq \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) + \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} g(x), \tag{2.10}$$

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} [c \cdot f(x)] = c \cdot \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x), \quad \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} [c \cdot f(x)] = c \cdot \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \qquad (c > 0) \tag{2.11}$$

et

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} [-f(x)] = -\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x). \tag{2.12}$$

Comme généralisations des limites extrêmes unilatérales ordinaires, introduisons les notations suivantes:

$$\overline{\lim_{x \to x_0+}}^{\mathfrak{N}} f(x) = \lim_{h \to 0+} \sup_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x), \tag{2.13}$$

$$\underline{\lim_{x \to x_0+}}^{\mathfrak{N}} f(x) = \lim_{h \to 0+} \inf_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x); \tag{2.14}$$

les limites en question (finies ou infinies) existent puisque, d'après (2.6), $\sup_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x)$ est une fonction non-décroissante, et $\inf_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x)$ une fonction non-croissante, de la variable h. On définit de façon analogue les limites extrêmes généralisées du côté gauche. Si les quatre limites extrêmes unilatérales généralisées sont égales, on désignera leur valeur commune par $\lim_{x \to x_0}^{\mathfrak{N}} f(x)$. Au cas où la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, on retrouve évidemment les limites extrêmes unilatérales ordinaires.

Les propositions suivantes découlent de celles (2. 7) à (2. 12):

(2. 15) *Si* $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, *on a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}'} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}'} f(x).$$

En particulier, en posant $\mathfrak{N}' = \{0\}$,

(2. 16) $$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}} f(x).$$

(2. 17) *On a pour* $x_0 \in U_{\mathfrak{N}}$

$$\underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

(2. 18) *On a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [f(x)+g(x)] \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) + \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} g(x),$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [f(x)+g(x)] \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) + \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} g(x),$$

pourvu que les termes des seconds membres ne soient pas infinis de signes contraires.

(2. 19) *On a pour* $c > 0$

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [c \cdot f(x)] = c \cdot \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [c \cdot f(x)] = c \cdot \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

(2. 20) *On a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [-f(x)] = -\underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

A l'aide des limites extrêmes unilatérales généralisées, nous définissons les nombres dérivés généralisés par les formules

$$\overline{f}{}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \underline{f}{}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\overline{f}{}^{-}_{\mathfrak{N}}(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0-}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \underline{f}{}^{-}_{\mathfrak{N}}(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0-}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si ces quatre nombres dérivés sont égaux, on désigne leur valeur commune par $f'_{\mathfrak{N}}(x_0)$. Au cas où la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, on revient aux nombres dérivés de Dini. On déduit des propositions (2. 15) à (2. 20) des propriétés analogues des nombres dérivés généralisés.

3. Nous allons démontrer qu'une généralisation du théorème classique de Denjoy sur les nombres dérivés d'une fonction quelconque, s'applique aux nombres dérivés généralisés. Comme nous l'avons dit plus haut, nous déduirons ce théorème d'une généralisation parallèle du théorème de Kolmogoroff et Vertchenko, concernant le contingent des ensembles plans, par une modification de la méthode due à HASLAM-JONES et SAKS[2]). Pour pouvoir formuler la généralisation mentionnée du théorème sur le contingent, convenons des définitions qui vont suivre.

Considérons une famille $\mathfrak{M}$ héréditaire et σ-additive des sous-ensembles du plan R_2. Une demi-droite fermée L, issue du point $z \in R_2$, sera nommée demi-droite tangente généralisée à un ensemble $E \subset R_2$, si l'on a pour tous les secteurs circulaires ouverts S, ayant z pour sommet et dont L passe par l'intérieur, $ES \notin \mathfrak{M}$. La réunion des demi-droites tangentes généralisées à E, issues du point z, sera appelée le contingent généralisé de E au point z, et on le désignera par $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$. Au cas où $\mathfrak{M} = \{0\}$, on parvient à la notion du contingent ordinaire $\mathrm{contg}(z, E)$. On connaît que cette notion possède les propriétés exprimées par la proposition suivante, dont la première partie coïncide avec le théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO, la seconde avec un théorème de HASLAM-JONES et SAKS[3]).

(3. 1) *Pour tout ensemble $E \subset R_2$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H$, où $\mathrm{contg}(z, E) = R_2$ pour $z \in E_1$, $\mathrm{contg}(z, E)$ égale un demi-plan fermé pour $z \in E_2$, $\mathrm{contg}(z, E)$ se compose d'une droite pour $z \in E_3$, et on peut couvrir l'ensemble $E - E_1$ avec une suite dénombrable de courbes rectifiables, tandis que pour couvrir l'ensemble H, on peut choisir ces courbes de façon que la somme de leurs longueurs soit aussi petite que l'on veut. Si, pour tous les points z d'un ensemble $P \subset E$, $\mathrm{contg}(z, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-plan ouvert, délimité par une droite parallèle à une droite donnée D, la projection orthogonale de P sur une droite D', perpendiculaire à D, est de mesure linéaire nulle.*

Nous allons démontrer le théorème suivant sur les contingents généralisés:

(3. 2) *Pour tout ensemble $E \subset R_2$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H + M$, où $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E) = R_2$ pour $z \in E_1$, $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ égale un demi-plan fermé pour $z \in E_2$, $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ se compose d'une droite pour $z \in E_3$, on peut couvrir l'ensemble $E_2 + E_3 + H$ avec une suite dénombrable de courbes rectifiables, tandis que pour couvrir l'ensemble H, on peut choisir ces courbes de façon que la somme de leurs longueurs soit aussi petite que l'on veut, et on a $M \in \mathfrak{M}$. Si, pour tous les points z d'un ensemble $P \subset E$, $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-plan ouvert, délimité par une droite parallèle à une droite donnée D, on a $P = P_1 + M_1$, où $M_1 \in \mathfrak{M}$ et la projection orthogonale de P_1 sur une droite D', perpendiculaire à D, est de mesure linéaire nulle.*

Pour démontrer (3. 2), considérons l'ensemble $E_{\mathfrak{M}}$ composé des points $z \in R_2$ tels que, pour tout cercle ouvert C ayant z pour centre, on a $CE \notin \mathfrak{M}$.

---

[2]) Cf. [3], [4] et [5], pp. 269 à 271.

[3]) Cf. [6], [3], [4] et [5], pp. 266 et 267.

On a

$$(3.3) \qquad E - E_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M},$$

puisque tout point $z \in E - E_{\mathfrak{M}}$ est centre d'un cercle C_z tel que $E \cdot C_z \in \mathfrak{M}$, et qu'un système dénombrable de ces cercles couvre, d'après le théorème de Lindelöf, l'ensemble $E - E_{\mathfrak{M}}$. On voit aisément que

$$(3.4) \qquad \text{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E) = \text{contg}\,(z, E_{\mathfrak{M}}).$$

En effet, si l'on a pour une demi-droite L, issue de z, $L \subset \text{contg}\,(z, E_{\mathfrak{M}})$, cela veut dire qu'à l'intérieur S de tout secteur circulaire, ayant z pour sommet et dont L passe par l'intérieur, se trouve au moins un point de $E_{\mathfrak{M}}$, et on a alors évidemment $SE \notin \mathfrak{M}$, donc $L \subset \text{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$. Réciproquement si $L \subset \text{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$, on a pour tout secteur circulaire S du type envisagé $SE \notin \mathfrak{M}$. La relation (3. 3) a pour conséquence que $SE_{\mathfrak{M}} \neq 0$, donc que $L \subset \text{contg}\,(z, E_{\mathfrak{M}})$. Or, en vertu de (3. 3) et (3. 4), (3. 2) découle immédiatement de (3. 1).

Pour passer à la généralisation du théorème de Denjoy, considérons une fonction réelle et finie, $f(x)$, et une famille $\mathfrak{N}$ héréditaire et σ-additive des sous-ensembles de la droite R_1. Nous démontrons d'abord la proposition suivante, généralisation d'un théorème bien connu[4]):

(3. 5) *Si l'on a pour tous les points x_0 d'un ensemble E ou bien $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \neq \overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x)$, ou bien $\underline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \neq \underline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x)$, l'ensemble E est dénombrable.*

Démonstration. Considérons par exemple l'ensemble E' des points $x_0 \in E$ où $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x) < \overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x)$, et, en outre, celui des points $x_0 \in E$ où l'on a $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x) < r < \overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x)$ pour un nombre rationnel r donné. En désignant cet ensemble par E'_r, on a évidemment $E' = \sum_r E'_r$. Or, pour $x_0 \in E'_r$, on a pour un $\delta > 0$ convenable

$$\underset{x}{E}[f(x) > r,\ x_0 - \delta < x < x_0] \in \mathfrak{N},$$

donc, pour $x_0 - \delta < x_1 < x_0$,

$$\underset{x}{E}[f(x) > r,\ x_1 < x < x_0] \in \mathfrak{N},$$

d'où il s'ensuit que $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \leqq r$, donc que $x_1 \notin E'_r$. Aucun point de E'_r n'étant point d'accumulation bilatéral de E'_r, cet ensemble est dénombrable, ce qui implique la dénombrabilité de E'.

---

[4]) Cf. [5], p. 261.

Pour pouvoir appliquer le théorème (3.2), considérons dans le plan (x, y) l'image de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble

$$B = \underset{(x,y)}{E}[y = f(x)],$$

et désignons par $\mathfrak{M}$ la famille des sous-ensembles de B dont la projection orthogonale sur l'axe des x appartient à la famille $\mathfrak{N}$. La famille $\mathfrak{N}$ étant héréditaire et σ-additive, celle $\mathfrak{M}$ jouit évidemment des mêmes propriétés. On peut alors démontrer la proposition suivante:

(3.6) *Si le nombre dérivé généralisé $\bar{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x)$ est fini en tous les points x d'un ensemble E, on a une décomposition $E = E_0 + N + Z$, où l'on a $\underline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x) = \bar{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x)$ pour $x \in E_0$, on a $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble $B_z = \underset{(x,y)}{E}[x \in Z, y = f(x)]$ peut être couvert avec une suite de courbes rectifiables dont les longueurs ont une somme aussi petite que l'on veut.*

Désignons par $L^{+}_{m}(x_0)$ et par $L^{-}_{m}(x_0)$ respectivement les demi-droites

$$L^{+}_{m}(x_0) = \underset{(x,y)}{E}[y - f(x_0) = m(x - x_0), x \geqq x_0]$$

et

$$L^{-}_{m}(x_0) = \underset{(x,y)}{E}[y - f(x_0) = m(x - x_0), x \leqq x_0],$$

et posons encore

$$L^{+}_{+\infty}(x_0) = L^{-}_{-\infty}(x_0) = \underset{(x,y)}{E}[x = x_0, y \geqq f(x_0)],$$

$$L^{+}_{-\infty}(x_0) = L^{-}_{+\infty}(x_0) = \underset{(x,y)}{E}[x = x_0, y \leqq f(x_0)].$$

Nous commençons par la démonstration de deux lemmes.

(3.7) *L'égalité $\bar{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0) = m_0 < +\infty$ entraîne les propositions*

a) $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$,

b) $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *(où $z_0 = (x_0, f(x_0))$) ne contient pas $L^{+}_{m}(x_0)$ pour $m_0 < m < +\infty$,*

c) $L^{+}_{m_0}(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, *si m_0 est fini.*

De même, $\underline{f}^{-}_{\mathfrak{N}}(x_0) = m_0 > -\infty$ entraîne

a') $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x) \leqq f(x_0)$,

b') $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas $L^{-}_{m}(x_0)$ pour $-\infty < m < m_0$,*

c') $L^{-}_{m_0}(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, *si m_0 est fini.*

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé. Or, $\bar{f}^{+}_{\mathfrak{N}}(x_0)$ étant égal à m_0, à un m' $(m_0 < m' < +\infty)$ quelconque correspond un $\delta_0 > 0$ tel que, pour $0 < \delta < \delta_0$,

(3.8) $$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N};$$

en posant $\delta' = \delta$ pour $m' \leqq 0$ et $\delta' = \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{m'}\right)$ pour $m' > 0$, on a la relation

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > \varepsilon,\ x_0 < x < x_0 + \delta'] \subset$$
$$\subset \underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

donc $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0) + \varepsilon$ et, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a la proposition a).

La relation (3.8) étant équivalente à celle

(3.9) $$B \cdot \underset{(x,\, y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta,\ y > f(x_0) + m'(x - x_0)] \in \mathfrak{M},$$

on voit sans peine que $L_m^+(x_0)$ n'appartient pas à $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ pour $m' < m < +\infty$, d'où s'ensuit la proposition b).

Enfin, m_0 étant fini, si $L_{m_0}^+(x_0)$ ne faisait pas partie de $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, on pourrait trouver des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que

$$B \cdot \underset{(x,\, y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta, f(x_0) + (m_0 - \varepsilon)(x - x_0) \leqq y \leqq f(x_0) + (m_0 + \varepsilon)(x - x_0)] \in \mathfrak{M}$$

soit valable pour $0 < \delta < \delta_1$. En tenant compte de (3.9), valable pour $m' = m_0 + \varepsilon$, il s'ensuivrait pour $0 < \delta < \min(\delta_0, \delta_1)$

$$B \cdot \underset{(x,\, y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta,\ y > f(x_0) + (m_0 - \varepsilon)(x - x_0)] \in \mathfrak{M},$$

donc

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > (m_0 - \varepsilon)(x - x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

d'où découlerait $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \leqq m_0 - \varepsilon$. Cette contradiction montre que la proposition c) est, elle aussi, valable.

(3.10) *m_0 étant fini, les hypothèses*

α) $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$,

β) $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas* $L_m^+(x_0)$ *pour* $m_0 < m \leqq +\infty$,

γ) $L_{m_0}^+(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$

impliquent $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = m_0$. *De même, les hypothèses*

α') $\underline{\lim}_{\mathfrak{N}\, x \to x_0-} f(x) \leqq f(x_0)$,

β') $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas* $L_m^-(x_0)$ *pour* $-\infty \leqq m < m_0$,

γ') $L_{m_0}^-(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$

impliquent $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^-(x_0) = m_0$.

En se bornant à la démonstration de la première partie de l'énoncé, on voit d'abord que, en vertu de (3.7), β) exclue la possibilité de l'égalité $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = m$ pour $m_0 < m < +\infty$ et que γ) rend impossible la même égalité pour $-\infty \leqq m < m_0$. Or, $L_{+\infty}^+(x_0)$ ne faisant pas partie de $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, on peut trouver des nombres finis $m' > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$B \cdot \underset{(x,y)}{E}[x > x_0, f(x_0) + m'(x - x_0) < y < f(x_0) + \varepsilon] \in \mathfrak{M},$$

donc que

$$\underset{x}{E}[x > x_0, m'(x - x_0) < f(x) - f(x_0) < \varepsilon] \in \mathfrak{N}.$$

En choisissant à cet ε, d'après α), un $\delta > 0$ tel que

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) \geqq \varepsilon, x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

on a

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

ce qui montre l'impossibilité de $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0) = +\infty$, ce qu'il fallait encore démontrer.

Passons à la démonstration de (3.6). Il s'ensuit de (3.7) que pour $x_0 \in E$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ n'est pas le plan entier, donc, en vertu du théorème (3.2), la partie B' de B dont la projection orthogonale sur l'axe des x coïncide avec E, se décompose en un ensemble B_1 en tout point z duquel $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, B)$ est ou bien un demi-plan fermé, ou bien une droite, en un ensemble $M \in \mathfrak{M}$ et en un ensemble H qu'on peut couvrir avec une suite de courbes rectifiables de longueur totale aussi petite que l'on veut. Désignons par E_1 la projection de B_1 sur l'axe des x, et par E_0 la partie de E_1 composée des points x_0 où $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x) = \overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x)$. D'après (3.5), l'ensemble $E_1 - E_0$ est dénombrable.

Considérons un point $x_0 \in E_0$ et soit $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0) = m_0$ (fini). En vertu de (3.7), $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ est ou bien la droite $y - f(x_0) = m_0(x - x_0)$, ou bien le demi-plan fermé

$$\underset{(x,y)}{E}[y - f(x_0) \leqq m_0(x - x_0)]$$

délimité par cette droite. Dans l'un et l'autre cas, $L_{m_0}^{-}(x_0)$ appartient à $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, mais $L_{m}^{-}(x_0)$ n'en fait pas partie pour $-\infty \leqq m < m_0$. Comme d'ailleurs $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x) = \overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$ d'après (3.7), il découle de (3.10) que $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x_0) = m_0 = \bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)$.

En désignant par N la projection sur l'axe des x de l'ensemble M et par Z la réunion de $E_1 - E_0$ et de la projection de H, on parvient donc à la décomposition dont l'existence a été affirmée en (3.6).

(3.11) *Si l'on a en tous les points x_0 d'un ensemble E*

$$\overline{\lim_{x \to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty, \tag{3.12}$$

on a $E = N + Z$, où $N \in \mathfrak{N}$ et $|Z| = 0$.

Démonstration. Avec les notations de la démonstration précédente, on a pour $0 < m' < +\infty$ et $x_0 \in E$

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| > m', x_0 < x < x_0+\delta\right] \in \mathfrak{N}$$

pour un $\delta > 0$ convenable, donc la demi-droite $L^+_m(x_0)$ n'appartient pas à $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ pour $|m| < m'$. Par conséquent $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ n'a aucun point commun avec le demi-plan $x > x_0$. D'après (3. 2), la partie de B dont la projection sur l'axé des x coïncide avec E, est de la forme $M+H$, où $M \in \mathfrak{M}$ et la projection de H est de mesure nulle. En désignant par Z cette projection et par N celle de M, on obtient la proposition à démontrer.

En résumant nos conclusions, nous parvenons à la généralisation suivante du théorème de Denjoy sur les nombres dérivés:

(3. 13) *Excepté les points d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle, les nombres dérivés généralisés d'une fonction $f(x)$ quelconque remplissent an moins une des conditions suivantes:*

1°) $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = \textit{fini},$

2°) $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = \textit{fini},\ \bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = +\infty, \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = -\infty,$

3°) $\bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \textit{fini},\ \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = +\infty, \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = -\infty,$

4°) $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = +\infty, \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x) = -\infty.$

Démonstration. Puisque $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) = -\infty$ ou $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) = +\infty$ implique l'égalité (3. 12), on a d'après (3. 11) $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) > -\infty$ et $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) < +\infty$, excepté les points d'un ensemble du type envisagé dans l'énoncé. Par raison de symétrie, on a encore $\bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) > -\infty$ et $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) < +\infty$, l'ensemble exceptionnel étant du même type. En faisant toujours abstraction d'un ensemble exceptionnel du type en question, $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) < +\infty$ implique donc, en vertu de (3. 6), $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) = \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$, et par raison de symétrie, la même égalité s'ensuit de $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) > -\infty$, tandis que $\bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) < +\infty$ ou $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) > -\infty$ entraîne $\bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) = \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$. On peut encore supposer d'après (2. 3) que $x_0 \in U_{\mathfrak{N}}$, et alors, au cas où tous les quatre nombres dérivés généralisés sont finis, on a en vertu de (2. 17)

$$\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) = \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) \leqq \bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) = \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) \leqq \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0),$$

ce qui termine la démonstration.

Il faut avouer que, pour certains choix de la famille $\mathfrak{N}$, il peut arriver que le théorème (3. 13) n'affirme rien; c'est le cas notamment si la droite R_1 se laisse décomposer en réunion d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Considérons par exemple un ensemble N de première catégorie dont l'ensemble complémentaire Z est de mesure nulle, soit $g(x)$ une fonction monotone croissante dont la dérivée (ordinaire) égale $+\infty$ en tous les points de Z, soit $a \in Z, b = g(a)$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in Z, \\ b & \text{pour } x \in N. \end{cases}$$

On voit sans peine qu'en désignant par $\mathfrak{N}$ la famille des ensembles de première catégorie, on a $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = +\infty$ pour $x \in Z$ et pour $x \in N$, $x > a$, et $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = -\infty$ pour $x \in N$, $x < a$, de sorte qu'aucune des conditions 1°) à 4°) de (3. 13) n'est remplie en aucun point. Il faut remarquer encore que, dans notre exemple, l'ensemble $U_{\mathfrak{N}}$ coïncide avec la droite entière.

4. Il s'agira dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit dérivable au sens généralisé en tous les points d'un ensemble donné, abstraction faite d'un ensemble exceptionnel convenable. Une généralisation des fonctions à variation bornée jouera un grand rôle dans ces conditions.

Convenons d'abord des notations suivantes:

$$\sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \max\,[f(\alpha),\ f(\beta),\ \sup_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha<x<\beta}} f(x)], \tag{4. 1}$$

$$\inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \min\,[f(\alpha),\ f(\beta),\ \inf_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha<x<\beta}} f(x)], \tag{4. 2}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) - \inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta). \tag{4. 3}$$

Il faut remarquer que la différence dans (4. 3) existe toujours, puisque, d'après (4. 1) et (4. 2), on a toujours

$$\sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) > -\infty, \quad \inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) < +\infty.$$

En posant $[\alpha, \beta] = I$, nous écrirons quelquefois $\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$, $\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$ et $\omega_{\mathfrak{N}}(f; I)$. On constate immédiatement d'après les définitions que les inégalités suivantes sont valables:

$$\inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \leqq f(\alpha), f(\beta) \leqq \sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta), \tag{4. 4}$$

donc

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \geqq |f(\beta) - f(\alpha)| \geqq 0. \tag{4. 5}$$

Nous dirons que la fonction $f(x)$ est à variation bornée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur l'ensemble E, ou brièvement qu'elle est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E, si une constante K existe telle que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathfrak{N}}(f; I_i) \leqq K,$$

toutefois que les intervalles I_i n'empiètent pas les uns sur les autres et que leurs extrémités appartiennent à E. On dira que $f(x)$ est à variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur E, ou qu'elle est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, si l'on a une décomposition $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ telle que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur chacun des ensembles E_i.

Il est évident que si la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, $\sup_{\mathfrak{N}}^*(f;I)$, $\inf_{\mathfrak{N}}^*(f;I)$ et $\omega_{\mathfrak{N}}(f;I)$ coïncident respectivement avec les bornes supérieure et inférieure et l'oscillation (au sens classique) de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle fermé I, tandis que les fonctions $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur un ensemble E sont identiques aux fonctions (VB_*) ou (VBG_*) selon le cas[5]).

Les inégalités (2.7) entraînent évidemment que, si $\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{N}$ est une seconde famille héréditaire et σ-additive, on a

$$\sup_{\mathfrak{N}}^*(f;I)\leqq\sup_{\mathfrak{N}'}^*(f;I),\quad \inf_{\mathfrak{N}}^*(f;I)\geqq\inf_{\mathfrak{N}'}^*(f;I), \tag{4.6}$$

donc

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f;I)\leqq\omega_{\mathfrak{N}'}(f;I). \tag{4.7}$$

On conclut des relations (2.9) à (2.12) que

$$\sup_{\mathfrak{N}}^*(f+g;I)\leqq\sup_{\mathfrak{N}}^*(f;I)+\sup_{\mathfrak{N}}^*(g;I), \tag{4.8}$$

$$\inf_{\mathfrak{N}}^*(f+g;I)\geqq\inf_{\mathfrak{N}}^*(f;I)+\inf_{\mathfrak{N}}^*(g;I), \tag{4.9}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f+g;I)\leqq\omega_{\mathfrak{N}}(f;I)+\omega_{\mathfrak{N}}(g;I), \tag{4.10}$$

$$\sup_{\mathfrak{N}}^*(cf;I)=c\cdot\sup_{\mathfrak{N}}^*(f;I),\quad \inf_{\mathfrak{N}}^*(cf;I)=c\cdot\inf_{\mathfrak{N}}^*(f;I) \tag{4.11}$$

pour $c>0$,

$$\sup_{\mathfrak{N}}^*(-f;I)=-\inf_{\mathfrak{N}}^*(f;I), \tag{4.12}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(cf;I)=|c|\cdot\omega_{\mathfrak{N}}(f;I). \tag{4.13}$$

Il s'ensuit de la définition que, $f(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, elle l'est sur tout ensemble $E'\subset E$. L'inégalité (4.7) a pour conséquence que, si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}'})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}'})$ sur E et si l'on a $\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{N}$, $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, selon le cas. (4.10) et (4.13) entraînent enfin que, $f(x)$ et $g(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, $c_1f(x)+c_2g(x)$ l'est aussi.

Nous allons démontrer la généralisation suivante du théorème de Denjoy—Lusin sur la dérivabilité presque partout des fonctions (VBG_*)[6]):

(4.14) *Si la fonction $f(x)$ est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble E, on a une décomposition $E=E_0+N+Z$, où $N\in\mathfrak{N}$, $|Z|=0$ et $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini en tous les points de E_0.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'ensemble E est borné: $E\subset[a,b]$, et que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E. Posons alors

$$M(x)=\sup\sum_{i=1}^{n}\omega_{\mathfrak{N}}(f;I_i),$$

en considérant toutes les suites finies d'intervalles I_i non empiétants et dont les extrémités appartiennent à $E\cdot[a,x]$. La fonction $M(x)$ est finie et mono-

---

5) Cf. [5], p. 228.

6) Cf. [5], p. 230.

tone non-décroissante dans l'intervalle $[a, b]$, et on a pour $\alpha, \beta \in E$

(4. 15) $$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \leqq M(\beta) - M(\alpha),$$

puisqu'on peut ajouter le terme $\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta)$ à toute somme figurant dans la définition de $M(\alpha)$, pour en obtenir une somme figurant dans la définition de $M(\beta)$.

Désignons par E^* l'ensemble des points de E qui appartiennent à $U_{\mathfrak{N}}$, qui sont points de densité extérieure de E et en lesquels la fonction $M(x)$ est dérivable. D'après (2. 3) et en vertu des théorèmes classiques, on a $E = E^* + N_1 + Z_1$, $N_1 \in \mathfrak{N}$, $|Z_1| = 0$.

Considérons un point quelconque $x_0 \in E^*$ et choisissons un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $x_0 < x < x_0 + \delta$ implique l'existence d'un $\xi \in E$ situé entre x et $x + \frac{1}{2}(x - x_0)$ et que celle $x_0 < x < x_0 + 2\delta$ entraîne

(4. 16) $$M(x) - M(x_0) < (M'(x_0) + 1)(x - x_0) = C(x - x_0).$$

x_0 étant point de densité extérieure de E et $M(x)$ étant dérivable en x_0, un $\delta > 0$ de ce type existe toujours. Posons

$$\alpha_n = x_0 + \frac{\delta}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \alpha_n < \xi_n < \alpha_n + \frac{\delta}{2^{n+1}} < x_0 + 2\delta, \quad \xi_n \in E.$$

On aura

$$M(\xi_n) - M(x_0) < C(\xi_n - x_0) < C\frac{\delta}{2^{n-1}},$$

donc, x_0 et ξ_n appartenant à E, d'après (4. 15)

(4. 17) $$\omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) < C\frac{\delta}{2^{n-1}}.$$

La relation $x_0 \in E^* \subset U_{\mathfrak{N}}$ entraîne encore $(x_0, \xi_n) \notin \mathfrak{N}$, on a par conséquent en vertu de (2. 8) et (4. 1) à (4. 4)

$$f(x_0) - \omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) \leqq \inf\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) \leqq \inf_{\substack{\mathfrak{N} \\ x_0 < x < \xi_n}} f(x) \leqq$$
$$\leqq \sup_{\substack{\mathfrak{N} \\ x_0 < x < \xi_n}} f(x) \leqq \sup\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) \leqq f(x_0) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n).$$

En tenant compte de (4. 17), on en tire

$$\underset{x}{E}\left[f(x) - f(x_0) > C\frac{\delta}{2^{n-1}}, \ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N},$$

$$\underset{x}{E}\left[f(x) - f(x_0) < -C\frac{\delta}{2^{n-1}}, \ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N},$$

donc

$$\underset{x}{E}\left[|f(x) - f(x_0)| > C\frac{\delta}{2^{n-1}}, \ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N}.$$

A plus forte raison, on aura pour $n=0, 1, 2, \dots$

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|>4C,\ \alpha_{n+1}\leqq x<\alpha_n\right]\subset$$
$$\subset\underset{x}{E}\left[|f(x)-f(x_0)|>4C\frac{\delta}{2^{n+1}},\ \alpha_{n+1}<x<\alpha_n\right]\subset$$
$$\subset\underset{x}{E}\left[|f(x)-f(x_0)|>C\frac{\delta}{2^{n-1}},\ x_0<x<\xi_n\right]\in\mathfrak{N},$$

et par conséquent, eu égard à (2. 2),

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|>4C,\ x_0<x<x_0+\delta\right]\in\mathfrak{N}.$$

On a donc

$$|\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)|\leqq 4C,\ |\underline{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)|\leqq 4C.$$

x_0 étant un point quelconque de E^*, on en conclut d'après le théorème (3. 13) que $E^*=E_0+N_2+Z_2$, où $N_2\in\mathfrak{N}, |Z_2|=0$ et $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini en tous les points de E_0. En posant $N=N_1+N_2, Z=Z_1+Z_2$, on obtient la proposition à démontrer.

Les deux théorèmes qui vont suivre généralisent des théorèmes connus sur les nombres dérivés ordinaires[7]).

(4. 18) *Si on a $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)<+\infty, \bar{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x)<+\infty$ pour $x\in E\subset U_{\mathfrak{N}}$, la fonction $f(x)$ est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E.*

Démonstration. Soit E_n $(n=1,2,3,\dots)$ l'ensemble des $x\in E$ tels que $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)<n, \bar{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x)<n$; soit E_{nm} $(m=1,2,3,\dots)$ l'ensemble des $x\in E_n$ tels que

$$\underset{x}{E}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>n, 0<|x-x_0|<\frac{1}{m}\right]\in\mathfrak{N};$$

et posons

$$E_{nmp}=E_{nm}\cdot\left[\frac{p}{m+1}, \frac{p+1}{m+1}\right].$$

On a évidemment

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}E_{nmp}.$$

Considérons deux points $\alpha\in E_{nmp}$ et $\beta\in E_{nmp}$, $\alpha<\beta$. On a

(4. 19) $$\underset{x}{E}[f(x)>f(\alpha)+n(x-\alpha), \alpha<x<\beta]\in\mathfrak{N},$$

(4. 20) $$\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta)-n(\beta-x), \alpha<x<\beta]\in\mathfrak{N}.$$

D'après les relations $\alpha\in E_{nmp}\subset E\subset U_{\mathfrak{N}}$, on a $(\alpha, \beta)\notin\mathfrak{N}$, il existe donc un x_1

---

[7]) Cf. [5] pp. 234 et 235.

situé entre α et β pour lequel aucune des relations (4. 19) ni (4. 20) n'est remplie, c'est-à-dire que

$$f(x_1) \leqq f(\alpha) + n(x_1 - \alpha), \; f(x_1) \geqq f(\beta) - n(\beta - x_1),$$

d'où

$$f(\beta) \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha), \; f(\alpha) \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha).$$

(4. 19) et (4. 20) ont encore pour conséquence que

$$\sup_{\substack{\mathfrak{R} \\ \alpha < x < \beta}} f(x) \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha), \quad \inf_{\substack{\mathfrak{R} \\ \alpha < x < \beta}} f(x) \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha).$$

On a donc

$$\sup_{\mathfrak{R}}^{*}(f; \alpha, \beta) = \max [f(\alpha), f(\beta), \sup_{\substack{\mathfrak{R} \\ \alpha < x < \beta}} f(x)] \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha),$$

$$\inf_{\mathfrak{R}}^{*}(f; \alpha, \beta) = \min [f(\alpha), f(\beta), \inf_{\substack{\mathfrak{R} \\ \alpha < x < \beta}} f(x)] \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha)$$

et

$$\omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha, \beta) \leqq f(\alpha) - f(\beta) + 2n(\beta - \alpha).$$

En prenant deux points $a \in E_{nmp}$, $b \in E_{nmp}$, $a < b$, on a pour $a = \alpha_0 < \alpha_1 < < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = b$, $\alpha_i \in E_{nmp}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_{i-1}, \alpha_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} [f(\alpha_{i-1}) - f(\alpha_i) + 2n(\alpha_i - \alpha_{i-1})] = f(a) - f(b) + 2n(b - a),$$

de sorte que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{R}})$ sur l'ensemble $E_{nmp} \cdot [a, b]$ et $(VBG_{\mathfrak{R}})$ sur l'ensemble E_{nmp}, ce qui montre qu'elle l'est sur l'ensemble entier E.

(4. 20) *Si l'on a* $-\infty < \underline{f}_{\mathfrak{R}}^{+}(x) \leqq \bar{f}_{\mathfrak{R}}^{+}(x) < +\infty$ *pour* $x \in E$, *la fonction* $f(x)$ *est* $(VBG_{\mathfrak{R}})$ *sur* E.

Démonstration. L'hypothèse implique d'après (2. 8) que $E \subset U_{\mathfrak{R}}$. Soit E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ l'ensemble des points $x \in E$ pour lesquels

$$-n < \underline{f}_{\mathfrak{R}}^{+}(x) \leqq \bar{f}_{\mathfrak{R}}^{+}(x) < n,$$

soit E_{nm} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ l'ensemble des points $x \in E_n$ tels que

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| > n, \; x_0 < x < x_0 + \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{R},$$

et posons $E_{nmp} = E_{nm} \cdot \left[\dfrac{p}{2m+1}, \dfrac{p+1}{2m+1}\right]$. On a évidemment

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E_{nmp}.$$

Considérons deux points $\alpha \in E_{nmp}$, $\beta \in E_{nmp}$, $\alpha < \beta$. On aura

$$\text{(4. 21)} \quad \underset{x}{E}[|f(x) - f(\alpha)| > n(x - \alpha), \; \beta < x < \beta + (\beta - \alpha)] \subset$$

$$\subset \underset{x}{E}[|f(x) - f(\alpha)| > n(x - \alpha), \; \alpha < x < 2\beta - \alpha] \in \mathfrak{R},$$

puisque $(2\beta-\alpha)-\alpha=2(\beta-\alpha)\leqq\frac{2}{2m+1}<\frac{1}{m}$; on aura pareillement

$$\underset{x}{E}[|f(x)-f(\beta)|>n(x-\beta),\ \beta<x<\beta+(\beta-\alpha)]\in\mathfrak{N}.$$

Les relations $\beta\in E_{nmp}\subset E\subset U_{\mathfrak{N}}$ impliquent $(\beta, 2\beta-\alpha)\notin\mathfrak{N}$, il existe donc un x_1 situé entre β et $2\beta-\alpha$ et tel que

$$|f(x_1)-f(\alpha)|\leqq n(x_1-\alpha),\ |f(x_1)-f(\beta)|\leqq n(x_1-\beta),$$

par conséquent que

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\leqq n[(x_1-\alpha)+(x_1-\beta)]<n[2(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)]=3n(\beta-\alpha).$$

(4. 21) entraîne encore que

$$\sup_{\substack{\mathfrak{N}\\ \alpha<x<\beta}} f(x)\leqq f(\alpha)+n(\beta-\alpha),\quad \inf_{\substack{\mathfrak{N}\\ \alpha<x<\beta}} f(x)\geqq f(\alpha)-n(\beta-\alpha),$$

donc que

$$\sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq f(\alpha)+3n(\beta-\alpha),$$
$$\inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\geqq f(\alpha)-3n(\beta-\alpha)$$

et que

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq 6n(\beta-\alpha).$$

Cette inégalité a pour conséquence que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E_{nmp}, donc qu'elle est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, ce qu'il fallait démontrer[8]).

Le théorème suivant est la conséquence de (4. 14) et de (4. 20):

(4. 22) *Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

a) $E=E_0+N_0+Z_0$, *où* $N_0\in\mathfrak{N}$, $|Z_0|=0$ *et* $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ *existe et est fini en tous les points de* E_0;

b) $E=E_1+N_1+Z_1$, *où* $N_1\in\mathfrak{N}$, $|Z_1|=0$ *et* $f(x)$ *est* $(VBG_{\mathfrak{N}})$ *sur* E_1.

Tout comme nous l'avons remarqué à propos du théorème (3. 13), pour certains choix de la famille $\mathfrak{N}$, les théorèmes (4. 14) et (4. 20) peuvent devenir banaux, les ensembles exceptionnels qui y figurent pouvant coïncider avec la droite entière. Les propositions qui vont suivre ont pour but d'éliminer cet inconvénient en réduisant l'ensemble exceptionnel en un ensemle de mesure nulle, en faisant naturellement quelques restrictions dans les hypothèses.

---

[8]) Nous avons démontré un peu plus que (4. 20), à savoir que les hypothèses de (4. 20) impliquent l'existence d'une décomposition $E=\sum_{i=1}^{\infty}E_i$ telle que $f(x)$ satisfait sur chacun des ensembles E_i à une condition de Lipschitz généralisée, c'est-à-dire qu'on a $\omega_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq L_i(\beta-\alpha)$ pour $\alpha,\beta\in E_i$ et pour une constante L_i. Ce n'est que cette proposition plus précise qui généralise le théorème cité sous [7]).

(4. 23) *Si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble fermé $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, la dérivée généralisée $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est finie presque partout sur l'ensemble E.*

Démonstration. Soient $I_k = (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ les intervalles contigus à E et posons

$$M_k = \sup_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

Considérons les fonctions $M(x)$ et $m(x)$, définies sur le plus petit intervalle I (fini ou infini, mais toujours fermé) contenant E, par les formules

$$M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in E, \\ M_k & \text{pour } x \in I_k, \end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in E, \\ m_k & \text{pour } x \in I_k. \end{cases}$$

Les fonctions $M(x)$ et $m(x)$ sont à variation bornée sur I. Considérons en effet une suite finie d'intervalles (α_i, β_i) $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $\alpha_i \in I$, $\beta_i \in I$, $\beta_i \leqq \alpha_{i+1}$, et évaluons par exemple la somme $\sum_{i=1}^{n} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)|$. Si α_i et β_i font partie d'un même intervalle I_k, on a $M(\beta_i) - M(\alpha_i) = 0$. Si l'on a $\alpha_i \in E$, $\beta_i \in E$, il s'ensuit

$$|M(\beta_i) - M(\alpha_i)| = |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha_i, \beta_i).$$

Si l'un des points α_i et β_i appartient à E et l'autre à $I - E$, disons, si $\alpha_i \in E$ et $\beta_i \in I_k$, on a

$$|M(\beta_i) - M(\alpha_i)| = \Big| \sup_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x) - f(\alpha_i) \Big| \leqq |f(a_k) - f(\alpha_i)| + \\ + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha_i, a_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k).$$

Enfin, si l'on a $\alpha_i \in I_k$, $\beta_i \in I_l$, $k \neq l$, on trouve

$$|M(\beta_i) - M(\alpha_i)| \leqq |f(a_l) - f(b_k)| + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_l, b_l) \leqq \\ \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; b_k, a_l) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_l, b_l).$$

En additionnant toutes ces inégalités, on obtient une inégalité de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)| \leqq \sum_{l=1}^{m} p_l \, \omega_{\mathfrak{N}}(f; I_l),$$

où les intervalles I_l n'empiètent pas les uns sur les autres, leurs extrémités appartiennent à E et le coefficient p_l ne peut prendre que les valeurs 1 ou 2. La fonction $f(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E, le second membre reste borné, ce qui démontre la proposition.

Ceci établi, on en conclut que $M(x)$ et $m(x)$ sont dérivables (au sens ordinaire) presque partout sur E. Soit E_0 l'ensemble des points de E où $M'(x)$ et $m'(x)$ existent et sont finis et qui sont points d'accumulation de E; on a $|E - E_0| = 0$. Considérons un point $x_0 \in E_0$. On a pour $y > M'(x_0)$ et pour des $\delta>0$ suffisamment petits, vu l'égalité $M(x_0)=f(x_0)$,

$$\underset{x}{E}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>y,\, x_0<x<x_0+\delta\right]\subset$$

$$\subset \underset{x}{E}[M(x)-M(x_0)>y(x-x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]+$$

$$+\underset{x}{E}[f(x)>M(x),\, x_0<x<x_0+\delta]=$$

$$=\underset{x}{E}[M(x)-M(x_0)>y(x-x_0),\, x_0<x<x_0+\delta]+ \tag{4.24}$$

$$+\sum_k [f(x)-M_k,\, x\in I_k\cdot(x_0,x_0+\delta)]\in \mathfrak{N}, \tag{4.25}$$

car l'ensemble (4. 24) est vide et les termes de (4. 25) appartiennent à $\mathfrak{N}$ par définition de M_k. Il s'ensuit que $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)\leqq y$ et, $y>M'(x_0)$ étant arbitraire, que $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)\leqq M'(x_0)$. Un raisonnement analogue fournit $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)\geqq m'(x_0)$. Le point x_0 étant point d'accumulation de E et $M(x)$ coïncidant avec $m(x)$ sur E, on a $M'(x_0)=m'(x_0)$. D'après $x_0\in E\subset U_{\mathfrak{N}}$, on a encore l'inégalité $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)\leqq$ $\leqq \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$, de sorte que

$$\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)=\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)=M'(x_0)=m'(x_0).$$

On parvient de la même façon à l'égalité

$$\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)=\bar{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)=M'(x_0)=m'(x_0),$$

ce qui démontre l'énoncé.

(4. 26) *Si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble mesurable $E\subset U_{\mathfrak{N}}$, $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E.*

Démonstration. On peut poser $E=Z+\sum_{i=1}^{\infty}E_i$, où $|Z|=0$ et chacun des ensembles E_i est fermé, et appliquer (4. 23) à E_i.

(4. 27) *Si $f(x)$ est mesurable et $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble mesurable $E\subset U_{\mathfrak{N}}$, $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E.*

Démonstration. Posons $E=\sum_{i=1}^{\infty}E_i$, où $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur chacun des ensembles E_i. D'après (4. 5), elle est alors (VB) sur E_i, il existe donc une fonction $f_i(x)$ qui est à variation bornée sur toute la droite et qui coïncide avec $f(x)$ sur E_i[9]). Désignons par E_i' l'ensemble formé par les point d'accumulation bilatéraux de E_i et par E_i'' l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x)=f_i(x),\, x\in E]$. L'ensemble E_i' étant mesurable (puisqu'il ne diffère de la fermeture de E_i qu'en un ensemble dénombrable) et E_i'' l'étant évidemment, il en est de même pour l'ensemble $S_i'=E_i'E_i''$. D'après $E_i\subset E_i''$ et puisque E_i-E_i' est dénombrable,

[9]) Cf. [5], p. 221.

l'ensemble $E_i - S_i' = (E_i - E_i') + (E_i - E_i'') = E_i - E_i'$ est dénombrable, donc $S_i = E_i + S_i' = (E_i - S_i') + S_i'$ est mesurable. On a évidemment $E = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, de sorte que (4. 26) pourra être appliqué à S_i et fournira l'énoncé dès que nous pouvons démontrer que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{R}})$ sur S_i.

Considérons à ce but une suite finie (a_k, b_k) $(k = 1, \ldots, n)$ d'intervalles non empiétants et ayant des extrémités qui appartiennent à S_i, et choisissons des points $\alpha_k, \beta_k \in E_i$ de façon à ce que $\alpha_k \leqq a_k < b_k \leqq \beta_k$ et que ni les intervalles (α_k, β_k) correspondant aux indices k pairs, ni ceux correspondant aux indices k impairs, n'empiètent les uns sur les autres, ce qui est possible d'après $S_i \subset E_i + E_i'$. On a alors

$$\sup_{a_k < x < b_k}{}_{\mathfrak{R}} f(x) \leqq \sup_{\alpha_k < x < \beta_k}{}_{\mathfrak{R}} f(x) \leqq f(\alpha_k) + \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k),$$
$$f(a_k) \leqq f(\alpha_k) + |f(a_k) - f(\alpha_k)|,$$
$$f(b_k) \leqq f(\alpha_k) + |f(b_k) - f(\alpha_k)|,$$

d'où

$$\sup{}^*_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k) \leqq f(\alpha_k) + \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) + |f(a_k) - f(\alpha_k)| + |f(b_k) - f(\alpha_k)|.$$

Un raisonnement analogue fournit

$$\inf{}^*_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k) \geqq f(\alpha_k) - \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) - |f(a_k) - f(\alpha_k)| - |f(b_k) - f(\alpha_k)|,$$

donc

$$(4.\,28) \quad \omega_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k) \leqq 2\omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) + 2|f(a_k) - f(\alpha_k)| + |f(b_k) - f(\alpha_k)|.$$

En additionnant les inégalités (4. 28) pour les indices k pairs et pour ceux impairs séparément, et en tenant compte de ce que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{R}})$ sur E_i et (VB) sur $S_i \subset E_i''$, on constate que la somme $\sum_{k=1}^{n} \omega_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k)$ demeure bornée, ce qui termine la démonstration.

Une conséquence immédiate de (4. 18) (ou de (4. 20)) et de (4. 27) se formule comme suit:

(4. 29) *$f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{R}}$, les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

a) *$E = E_0 + Z$, où $|Z| = 0$ et $f(x)$ est $(VBG_{\mathfrak{R}})$ sur E_0;*

b) *$E = E_0' + Z'$, où $|Z'| = 0$ et $f'_{\mathfrak{R}}(x)$ existe et est fini partout sur E_0'.*

Remarquons encore qu'une analyse des démonstrations de (4. 23), (4. 26) et (4. 27) montre que, $f(x)$ étant mesurable et $(VBG_{\mathfrak{R}})$ sur $E \subset U_{\mathfrak{R}}$, on a une décomposition $E = Z + \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, où $|Z| = 0$ et chacun des ensembles E_i est mesurable et tel que $f'_{\mathfrak{R}}(x)$ est égal, partout sur E_i, à la dérivée (ordinaire) de $f(x)$ relative à E_i. De là, on conclut en vertu de (4. 29) que

(4. 30) *$f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, si $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E, on a presque partout sur E l'égalité $f'_{\mathfrak{N}}(x) = f'_{ap}(x)$.*

5. Dans ce dernier paragraphe, nous allons reprendre les idées et les méthodes de § 3, pour généraliser le théoréme de ROGER sur le contingent des ensembles dans l'espace, tout comme nous avons généralisé le théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO sur le contingent des ensembles plans, et pour en déduire par une modification de la méthode de SAKS une généralisation du théorème de HASLAM-JONES sur les différentielles extrêmes.

En conséquence des analogies entre les raisonnements du présent paragraphe et ceux de § 3, nous pouvons nous borner à énumérer les notions nécessaires et à énoncer les résultats qui s'y rattachent.

Considérons une famille $\mathfrak{M}$ héréditaire et σ-additive d'ensembles dans l'espace R_3. La demi-droite fermée L, issue du point $u \in R_3$, est appelée demi-droite tangente généralisée à un ensemble $E \subset R_3$, si l'on a pour tous les secteurs sphériques ouverts S, ayant u pour sommet et dont L passe par l'intérieur, $ES \notin \mathfrak{M}$. A l'aide de ces demi-droites tangentes généralisées, on définit $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ de façon analogue que dans le plan.

En partant du théorème de ROGER[10]), on parvient par les mêmes méthodes que nous avons employées pour démontrer (3. 2), au théorème suivant:

(5. 1) *Pour tout ensemble $E \subset R_3$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H + M$, où $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E) = R_3$ pour $u \in E_1$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ égale un demi-espace fermé pour $u \in E_2$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ se compose d'un plan pour $u \in E_3$, l'ensemble $E_2 + E_3 + H$ est la réunion d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure 2-dimensionnelle de Hausdorff finie, l'ensemble H est de mesure 2-dimensionnelle de Hausdorff nulle, et on a $M \in \mathfrak{M}$. Si, pour tous les points u d'un ensemble $P \subset E$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-espace ouvert, délimité par un plan parallèle à une droite donnée D, on a $P = P_1 + M_1$, où $M_1 \in \mathfrak{M}$ et la projection orthogonale de P_1 sur un plan perpendiculaire à D est de mesure plane nulle.*

Considérons ensuite une famille $\mathfrak{N}$ héréditaire et σ-additive d'ensembles du plan R_2, désignons les points de R_2 par $(x, y) = t$, et la distance des points t et t' par $|t - t'|$.

Nous définissons l'ensemble $U_{\mathfrak{N}}$ comme l'ensemble des points $t \in R_2$ tels que, pour tout secteur circulaire ouvert S ayant t pour sommet, on ait $S \notin \mathfrak{N}$. En s'appuyant sur le théorème (3. 2), on trouve le théorème suivant[11]):

(5. 2) *Si à tout point t d'un ensemble $E \subset R_2$ correspond un secteur circulaire ouvert S_t, ayant t pour sommet et tel que $ES_t \in \mathfrak{N}$, on a $E = N + K$,*

---

[10]) Cf. [7] et [5], pp. 304 à 309.

[11]) Cf. [8], th. (2. 4).

où $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble K peut être couvert avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.

D'où l'on parvient à l'analogue suivant de (2. 3):

(5. 3) *On a $R_2 - U_{\mathfrak{N}} = N + K$, où $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble K peut être couvert avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.*

Un ensemble $E \subset R_2$ et une fonction $f(x, y) = f(t)$, définie pour $t \in R_2$, étant donnés, on définit, comme les notions analogues dans § 2, $\sup_{\mathfrak{N}, t \in E} f(t)$ et $\inf_{\mathfrak{N}, t \in E} f(t)$ et on constate qu'elles jouissent des propriétés analogues à celles (2. 6) à (2. 12).

Considérons ensuite un domaine angulaire ouvert $A \subset R_2$, délimité par deux demi-droites issues du point t_0, désignons par A_h le secteur circulaire ouvert $\underset{t}{E}[t \in A, 0 < |t - t_0| < h]$ et introduisons les notations suivantes:

$$\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A}}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) = \lim_{h \to 0+} \sup_{\mathfrak{N}, t \in A_h} f(t),$$

$$\underline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A}}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) = \lim_{h \to 0+} \inf_{\mathfrak{N}, t \in A_h} f(t);$$

les mêmes limites correspondant à $A = R_2 - \{t_0\}$ seront désignées par $\overline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t)$ et $\underline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t)$. Si ces deux limites extrêmes sont égales, on désigne leur valeur commune par $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A}}{}_{\mathfrak{N}} f(t)$ ou $\lim_{t \to t_0}{}_{\mathfrak{N}} f(t)$ selon le cas. On établit sans peine des propositions analogues à celles (2. 15) à (2. 20).

On démontre la proposition suivante, analogue à (3. 5), par un raisonnement semblable à la démonstration de (3. 5) et en s'appuyant sur le théorème (3. 1) de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO[12]):

(5. 4) *Si à tout point t_0 d'un ensemble $E \subset R_2$ correspond un domaine angulaire ouvert A_{t_0}, ayant t_0 pour sommet et tel que*

$$\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) \neq \overline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) \quad \text{ou} \quad \underline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) \neq \underline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t),$$

on peut couvrir l'ensemble E avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.

Désignons par B l'image de la fonction $f(x, y)$, c'est-à-dire posons

$$B = \underset{(x, y, z)}{E}[z = f(x, y)],$$

et désignons par $\mathfrak{M}$ la famille (évidemment héréditaire et σ-additive) des sous-ensembles de B dont la projection sur le plan (x, y) appartient à $\mathfrak{N}$.

---

[12]) Cf. [5], p. 310.

Appelons le couple de nombres finis $\{A, B\}$ différentielle supérieure généralisée[13]) au point $t_0=(x_0, y_0)$ de la fonction $f(x, y)$, si, en posant $z_0= =f(x_0, y_0)$ et $u_0=(x_0, y_0, z_0)$, le plan

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0) \tag{5.5}$$

appartient à $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$ et si

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{|t-t_0|} \leqq 0.$$

Un raisonnement semblable à celui des démonstrations de (3. 7) et (3. 10) montre que ces deux conditions sont équivalentes aux suivantes:

a) $\overline{\lim_{t\to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) \leqq f(t_0)$,

b) $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$ n'a aucun point commun avec le demi-espace ouvert $z-z_0>A(x-x_0)+B(y-y_0)$,

c) le plan (5. 5) appartient à $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$.

La définition d'une différentielle inférieure généralisée étant semblable, on constate que si $f(x, y)$ possède au point $t_0 \in U_{\mathfrak{N}}$ en même temps une différentielle supérieure et une différentielle inférieure généralisées, ces deux différentielles extrêmes généralisées sont égales et elles fournissent une différentielle généralisée à $f(x, y)$ au point t_0, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{t\to t_0}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{|t-t_0|}=0.$$

En s'appuyant sur les résultats énumérés, on déduit du théorème (5. 1), par une modification légère de la méthode due à S. Saks[14]), la généralisation suivante du théorème de Haslam-Jones[15]):

(5. 6) *Si à tout point $t_0 \in E$ correspond un domaine angulaire ouvert A_{t_0} ayant t_0 pour sommet et tel que*

$$\underline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{|f(t)-f(t_0)|}{|t-t_0|}=+\infty,$$

on a $E=N+Z$, où $N\in\mathfrak{N}$ et $|Z|=0$. Si à tout point $t_0 \in E'$ correspond un A_{t_0} ayant t_0 pour sommet et tel que

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|}<+\infty,$$

on a $E'=E_1'+N'+Z'$, où $N'\in\mathfrak{N}$, $|Z'|=0$ et $f(x, y)$ possède une différentielle supérieure généralisée en tous les points de E_1'. Si à tout point $t_0 \in E''$ cor-

[13]) Cf. [9] et [5], p. 309.

[14]) Cf. [5], pp. 311 et 312.

[15]) Cf. [9].

respondent deux domaines angulaires ouverts A_{t_0} et A'_{t_0}, ayant t_0 pour sommet et tels que

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} < +\infty, \qquad \underline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A'_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} > -\infty,$$

on a $E'' = E_1'' + N'' + Z''$, où $N'' \in \mathfrak{N}$, $|Z''| = 0$ et $f(x, y)$ possède une différentielle généralisée en tous les points de E_1''.

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable, *Colloquium Math.* (à paraître).

[2] Á. Császár, Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (à paraître).

[3] U. S. Haslam-Jones, Tangential properties of a plane set of points, *Quarterly Journal of Math., Oxford Ser.*, 7 (1936), 116—123.

[4] S. Saks, Sur quelques propriétés métriques d'ensembles, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), 234—240.

[5] S. Saks, *Theory of the Integral* (Warszawa—Lwów, 1937).

[6] A. Kolmogoroff et J. Vertchenko, Über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *C. R. Acad. Sci. URSS*, 1 (1934), 1—3, 105—107; Weitere Untersuchungen über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *ibid.*, 4 (1934), 361—364.

[7] F. Roger, Sur la relation entre les propriétés tangentielles et métriques des ensembles cartésiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **201** (1935), 871—873.

[8] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables, *ces Acta*, **15** (1954), 183—202.

[9] U. S. Haslam-Jones, Derivate planes and tangent planes of a measurable function, *Quarterly Journal of Math., Oxford Ser.*, 3 (1932), 120—132.

(Reçu le 30 avril 1955)

Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie.

Von F. RÜHS in Rostock.

1. In einer großen Arbeit ([1]) zeigt RÉDEI, welche Rolle das schiefe Produkt in der Gruppentheorie spielt und behandelt insbesondere ausführlich das Schreiersche schiefe Produkt $G \circ_1 \Gamma$ und das Zappa—Szép-Produkt $G \circ_2 \Gamma$, definiert durch die Multiplikationsgesetze (vgl. auch [3])

$$G \circ_1 \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta)$$

und

$$G \circ_2 \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \alpha^b \beta),$$

Zugleich sagt RÉDEI, daß es wünschenswert sei, einen Vorrat an schiefen Produkten zu haben, mit deren Hilfe möglichst viele Gruppen mit befriedigender Einfachheit dargestellt werden können. So haben insbesondere auch L. RÉDEI und A. STÖHR folgendes Produkt untersucht ([2]):

$$G \circ_{2'} \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b, \alpha^b \beta).$$

Dabei zeigt sich, daß die Gruppen $G \circ_{2'} \Gamma$ eine echte Teilmenge der Gruppen $G \circ_2 \Gamma$ bilden. Vergleicht man den Bau der Multiplikationsgesetze, so ist $G \circ_{2'} \Gamma$ symmetrischer als $G \circ_2 \Gamma$. Wir zeigen, daß eine nochmalige Symmetrisierung die Gruppenbildungen noch weiter einengt, indem wir das in ([1]) unerledigt gelassene schiefe Produkt

$$(1) \qquad G \odot G: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a)$$

untersuchen. Unser Resultat ist der

Satz. *Das schiefe Produkt* (1) *liefert im wesentlichen*[1]) *nur das direkte Produkt der Gruppen G und Γ, läßt also im wesentlichen nur die triviale Lösung $a^\alpha = a$, $\alpha^a = \alpha$ zu.*

Wir beweisen unseren Satz auf zwei Arten, einmal indirekt, indem wir nachweisen, daß (1) zwei zu G und Γ isomorphe Normalteiler besitzt, deren Durschnitt das Einselement ist (und die miteinander vertauschbar sind), zum anderen direkt, indem wir (1) transformieren.

---

[1]) D. h. bis auf Transformationen Π; ich verdanke diese scharfe Formulierung des Satzes Herrn L. RÉDEI.

2. Es sei $\mathfrak{g} = G \odot \Gamma$ erklärt durch

(1) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a). \quad (a, b, a^\beta, b^\alpha \in G, \quad \alpha, \beta, \alpha^b \beta^a \in \Gamma).$$

Ferner seien e und ε die Einselemente von G resp. Γ. Wir zeigen zunächst:

Jede Gruppe $G \odot \Gamma$ ist zu einer solchen Gruppe $G \odot \Gamma$ isomorph, die (e, ε) zum Einselement hat.

Beweis. Sei Π die Permutation

$$\Pi: \qquad (a, \alpha) \to (g^{-1} a h, \gamma^{-1} \alpha \eta) \qquad (g, h \in G, \gamma, \eta \in \Gamma);$$

dann ist

$$\Pi^{-1}: \qquad (a, \alpha) \to (g a h^{-1}, \gamma \alpha \eta^{-1}).$$

Definiert man nach Rédei ([1]) in der Menge der Paare (a, α) eine neue Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \times (b, \beta) &= \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta)) \\ &= \Pi((gah^{-1}, \gamma\alpha\eta^{-1}) \cdot (gbh^{-1}, \gamma\beta\eta^{-1})) \\ &= \Pi((gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}}, (\gamma\alpha\eta^{-1})^{gbh^{-1}} (\gamma\beta\eta^{-1})^{gah^{-1}}) \\ &= (g^{-1}(gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}} h, \gamma^{-1}(\gamma\alpha\eta^{-1})^{gbh^{-1}} (\gamma\beta\eta^{-1})^{gah^{-1}} \eta),\end{aligned}$$

dann entsteht eine zu $\mathfrak{g}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{g}_1$. Auf der rechten Seite steht (1), nur daß statt $a^\beta b^\alpha$ daß ähnlich gebaute Funktionenpaar $g^{-1}(gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} \cdot (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}} h$ steht; entspr. für $\alpha^b \beta^a$. Ist nun (u, λ) die Einheit von (1), so lassen sich $g, h \in G$, $\gamma, \eta \in \Gamma$ (auf mehrere Art) so bestimmen, daß $g^{-1} u h = e$, $\gamma^{-1} \lambda \eta = \varepsilon$ ist. Dann hat $\mathfrak{g}_1$ wegen des Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1$ das Einselement (e, ε).

Aus $(a, \alpha)(e, \varepsilon) = (a^\varepsilon e^\alpha, \alpha^e \varepsilon^a) = (e, \varepsilon)(a, \alpha) = (e^\alpha a^\varepsilon, \varepsilon^a \alpha^e) = (a, \alpha)$ folgt nun

(2) $$a^\varepsilon e^\alpha = e^\alpha a^\varepsilon = a, \quad \alpha^e \varepsilon^a = \varepsilon^a \alpha^e = \alpha$$

für alle $a \in G$ und alle $\alpha \in \Gamma$; d. h. es muß sein: $e^\alpha = r$ für alle $a \in G$ sowie $\varepsilon^a = \varrho$ für alle $a \in G$. Dabei sind r und ϱ feste Elemente aus G resp. Γ. Insbesondere folgt aus

$$(e, \varepsilon)(e, \varepsilon) = (r^2, \varrho^2) = (e, \varepsilon):$$

$r^2 = e$, $\varrho^2 = \varepsilon$; d. h. r und ϱ haben die Ordnung zwei.

Nun sind in (1) die vier Funktionen $a^\beta, b^\alpha, \alpha^b, \beta^a$ nicht eindeutig bestimmt, sondern lassen sich durch resp. $a^\beta u$, $u^{-1} b^\alpha$, $\alpha^b \lambda, \lambda^{-1} \beta^a$ ersetzen; wählt man insbesondere $u = r$, $\lambda = \varrho$, so wird $e^\alpha = r$ durch $r^2 = e$ und $\varepsilon^a = \varrho$ durch $\varrho^2 = \varepsilon$ ersetzt. Wir können uns also auf den Fall beschränken, daß

(3. 1) $$e^\alpha = e, \quad \varepsilon^a = \varepsilon$$

für alle $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$ ist. Dann liefert (2) ferner für alle $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$:

(3. 2) $$a^\varepsilon = a, \quad \alpha^e = \alpha.$$

Die Assoziativität bedeutet nach (1) das Bestehen der Gleichungen

(4) $$(a^\beta b^\alpha)^\gamma c^{\alpha^b \beta^a} = a^{\beta^c \gamma^b}(b^\gamma c^\beta)^\alpha, \quad (\alpha^b \beta^a)^c \gamma^{a^\beta b^\alpha} = \alpha^{b^\gamma c^\beta}(\beta^c \gamma^b)^a.$$

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Formeln werden wir in Zukunft nur die den Elementen aus G entsprechende ableiten. (4) ergibt für $a = c = e$ unter Benutzung von (3), sowie für $a = b = e$ und b statt c geschrieben:

(5) $$(b^\alpha)^\gamma = (b^\gamma)^\alpha = b^{\alpha\gamma} = b^{\gamma\alpha}, \qquad (\beta^a)^c = (\beta^c)^a = \beta^{ac} = \beta^{ca}.$$

Für $\alpha = \gamma = \varepsilon$ und $b = e$ liefert (4)

(6) $$a^\beta c^{\beta^a} = a^{\beta^c} c^\beta, \qquad \alpha^b \gamma^{b^\alpha} = \alpha^{b^\gamma} \gamma^b.$$

Hieraus und aus (4) folgt nun für $c = e$, $\alpha = \beta = \varepsilon$:

(7) $$(ab)^\gamma = a^{\gamma^b} b^\gamma = a^\gamma b^{\gamma^a}, \qquad (\alpha\beta)^c = \alpha^{c^\beta}\beta^c = \alpha^c \beta^{c^\alpha}.$$

Setzt man schließlich in (4): $a = e$ und $\beta = \varepsilon$, so erhält man bei Benutzung von (7):

$$b^{\alpha\gamma} c^{\alpha^b} = (b^\gamma c)^\alpha = b^{\alpha\gamma} c^{\alpha^{b^\gamma}}$$

d. h.

(8) $$\begin{cases} c^{\alpha^b} = c^{\alpha^{b^\gamma}} & \text{für alle } \gamma \in \Gamma, \\ \gamma^{a^\beta} = \gamma^{a^{\beta^c}} & \text{für alle } c \in G. \end{cases}$$

Daraus folgt insbesondere

(9) $$c^{\alpha^b} \gamma^b = c^{\alpha^{b^\gamma}} \gamma^b = c^{(\alpha\gamma)^b}, \qquad \gamma^{a^\beta b^\beta} = \gamma^{(ab)^\beta},$$

sowie aus der sogleich abzuleitenden Formel (11):

(10) $$c^{(\alpha^{-1})^b} = c^{(\alpha^{-1})^{b^\alpha}} = c^{(\alpha^b)^{-1}}, \qquad \gamma^{(a^{-1})^\beta} = \gamma^{(a^\beta)^{-1}}.$$

Nach (7) ist $(b^{-1})^{\alpha^b} b^\alpha = (b^{-1}b)^\alpha = e^\alpha = e$ sowie $b^\alpha (b^{-1})^{\alpha^b} = b^{\alpha^{b^{-1}}}(b^{-1})^\alpha = (bb^{-1})^\alpha = e^\alpha = e$. Es existiert also ein zu b inverses Element:

(11) $$(b^\alpha)^{-1} = (b^{-1})^{\alpha^b}, \qquad (\beta^a)^{-1} = (\beta^{-1})^{a^\beta}.$$

Um das zu (a, α) inverse Element zu bestimmen, setzen wir

$$(a, \alpha) = (b, \varepsilon)(e, \beta) = (b^\beta, \beta^b).$$

Dann folgt aus $a = b^\beta$, $\alpha = \beta^b$ nach (11)

$$a^{-1} = (b^\beta)^{-1} = (b^{-1})^{\beta^b} = (b^{-1})^\alpha, \qquad \alpha^{-1} = (\beta^{-1})^{b^\beta} = (\beta^{-1})^a,$$

und daraus nach (5):

$$b^{-1} = (a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \qquad \beta^{-1} = (\alpha^{-1})^{a^{-1}},$$

und wieder nach (11):

$$b = a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \qquad \beta = \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}.$$

(a, α) läßt sich also eindeutig in zwei Faktoren spalten:

$$(a, \alpha) = (a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \varepsilon)\,(e, \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}). \tag{12}$$

Setzt man etwa $a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}} = r$, $\alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}} = \varrho$, so bilden die Paare (r, ε) und (e, ϱ) für sich Untergruppen von $\mathfrak{g}$, die zu G resp. Γ isomorph. sind: Nach (1) ist nämlich

$$(r, \varepsilon)\,(s, \varepsilon) = (rs, \varepsilon) \qquad (e, \varrho)\,(e, \sigma) = (e, \varrho\sigma);$$

daraus folgt, daß

$$(r, \varepsilon)^{-1} = (r^{-1}, \varepsilon), \qquad (e, \varrho)^{-1} = (e, \varrho^{-1}).$$

Daher ist nach (12) das zu (a, α) inverse Element:

$$(a, \alpha)^{-1} = (e, (\alpha^{-1})^{a^{-1}})\,((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \varepsilon). \tag{13}$$

Die Darstellung (12) zeigt, daß jedes Element $\mathfrak{r} \in \mathfrak{g}$ darstellbar ist durch $\mathfrak{r} = g \cdot \gamma$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ das direkte Produkt aus G und Γ ist, genügt es noch nachzuweisen, daß die Elemente der beiden Untergruppen G und Γ miteinander vertauschbar sind. In der Tat ist

$$(a, \varepsilon)\,(e, \alpha) = (e, \alpha)\,(a, \varepsilon) = (a^{\alpha}, \alpha^{a}). \tag{14}$$

Ebenso einfach zeigt man, daß G und Γ Normalteiler von $\mathfrak{g}$ sind. Benutzen wir die obige Darstellung

$$(a, \alpha) = (b, \varepsilon)\,(e, \beta), \qquad (a, \alpha)^{-1} = (e, \beta^{-1})\,(b^{-1}, \varepsilon),$$

wobei $b^{-1} = (a^{-1})^{\alpha^{-1}}$, $\beta^{-1} = (\alpha^{-1})^{a^{-1}}$ ist, so erhält man wegen $(e, \beta)\,(c, \varepsilon)\,(e, \beta^{-1}) = (c, \varepsilon)$:

$$(a, \alpha)\,(c, \varepsilon)\,(a, \alpha)^{-1} = (bcb^{-1}, \varepsilon).$$

Dasselbe gilt für Γ.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Um nun unseren Satz direkt zu beweisen, müssen wir eine passende Transformation finden. Die Struktur von (14) legt folgende Permutation nahe: Es sei

$$\Pi^{-1}\colon \quad (a, \alpha) \to (a^{\alpha}, \alpha^{a}),$$

dann ist

$$\Pi\colon \quad (a, \alpha) \to (a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}).$$

Dann wird jetzt

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta)) = \Pi(a^{\alpha\beta^{b}}\, b^{\beta\alpha^{a}}, \ \alpha^{ab^{\beta}}\, \beta^{ba^{\alpha}}) =$$
$$= (a^{\beta^{-1}\beta^{b}}\, b^{\beta(\beta^{-1})^{a}}, \ \alpha^{b^{-1}b^{\beta}}\, \beta^{b(b^{-1})^{\alpha}}).$$

Wir beweisen dies etwa wieder für die Elemente aus G. Wegen (8) kann man nach dem zweiten Exponenten abbrechen und erhält nach (9) und (11):

$$(a^{\alpha\beta^b} b^{\beta\alpha^a})^{\{(\beta^{-1})^{b^\beta a^{\alpha\beta}}(\alpha^{-1})^{a^\alpha b^{\alpha\beta}}\}^{a^{-1}b^{-1}}} = (a^{\alpha\beta^b} b^{\beta\alpha^a})^{\beta^{-1}\alpha^{-1}} = a^{\beta^{-1}\beta^b} (b^{\beta\alpha^a})^{(\beta^{-1}\alpha^{-1})^a} =$$
$$= a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a}.$$

Damit haben wir eine zu $G \odot \Gamma$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{g}_1$ gewonnen mit dem Multiplikationsgesetz

$$\mathfrak{g}_1: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a}, \alpha^{b^{-1}b^\beta} \beta^{b(b^{-1})^\alpha}).$$

Das Einselement (e, ε) bleibt nach (3. 1) bei der Transformation Π erhalten. Beschränkt man sich wieder wie oben auf den Fall, daß $e^\alpha = e$, $\varepsilon^a = \varepsilon$, so erhält man auch (3. 2): $a^\varepsilon = a$, $\alpha^e = \alpha$.

Dagegen liefert die Assoziativität die sehr unbequeme Beziehung

$$(a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a})^{\gamma^{-1}\gamma^c} c^{\gamma(\gamma^{-1})^{a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a}}} = a^{\lambda^{-1}\lambda^v} v^{\lambda(\lambda^{-1})^a};$$

in der

$$\lambda = \beta^{c^{-1}c^\gamma} \gamma^{c(c^{-1})^\beta}, \qquad v = b^{\gamma^{-1}\gamma^c} c^{\gamma(\gamma^{-1})^b},$$

die sich aber für $c = e$ wegen (3. 1) und (3. 2) sofort auf die Gleichung

$$a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a} = a^{(\beta\gamma)^{-1}(\beta\gamma)^b} \cdot b^{(\beta\gamma)[(\beta\gamma)^{-1}]^a}$$

reduziert. $\gamma = \beta^{-1}$ liefert schließlich

$$a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a} = ab;$$

die linke Seite ist aber gerade der Ausdruck, der im Multiplikationsgesetz steht. Berufung auf die Symmetrie oder direkte Ausrechnung ergibt für den Γ-Anteil dasselbe; somit ist

$$\mathfrak{g}_1: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$$

und damit $G \odot \Gamma \cong \mathfrak{g}_1$ das direkte Produkt der Gruppen G und Γ.

Literaturverzeichnis.

[1] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[2] L. Rédei—A. Stöhr, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *diese Acta*, **15** (1953), 7—11.

[3] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **192** (1953), 96—101.

(*Eingegangen am 4. September 1955.*)

Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio.

Von L. RÉDEI und J. SZÉP in Szeged.

Unsere Arbeit enthält die Lösung des folgenden Problems. Zu zwei gegebenen Gruppen G, Γ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, für die

(1) $$\mathfrak{G} = G'\Gamma'$$

ist und die Isomorphien

(2) $$G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma$$

gelten. Wir meinen dieses Problem in der vollen Allgemeinheit, so nämlich, daß der Durchschnitt

(3) $$G' \cap \Gamma'$$

eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein darf (die also natürlich isomorph mit je einer Untergruppe von G und Γ sein muß). ZAPPA[1]) und CASADIO[2]) haben diejenigen Lösungen angegeben, für die (3) das Einselement bzw. irgendein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Kleine lateinische und griechische Buchstaben bezeichnen beliebige Elemente von G bzw. Γ. Insbesondere bezeichnen e und ε das Einselement von G bzw. Γ. Stets, wenn die Rede von einer Untergruppe G_* oder Γ_* von G bzw. Γ sein wird, so sollen a_* und α_* beliebige Elemente von G_* bzw. Γ bezeichnen.

Zu unserem Zweck betrachten wir ein Funktionenpaar

(4) $$a^\alpha \ (\in G), \quad \alpha^a \ (\in \Gamma),$$

stets unterworfen den „Anfangsbedingungen"

(5) $$a^\varepsilon = a, \ e^\alpha = e, \quad \alpha^e = \alpha, \ \varepsilon^a = \varepsilon.$$

Wir definieren dann in der Menge der Elementenpaare

(6) $$(a, \alpha)$$

---

1) G. ZAPPA, Sulla construzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana*, Bologna 1940, 119—125.

2) G. CASADIO, Construzione dei gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rendiconti di Mat. Univ. Roma*, **2** (1941), 348—360.

die Multiplikation[3])

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \beta\alpha^{b}) \tag{7}$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die so entstandene (multiplikative) Struktur, die natürlich nicht assoziativ zu sein braucht. Offenbar hat $\mathfrak{M}$ wegen (5) das Einselement (e, ε).

Im allgemeinen bezeichnen wir die einer kompatiblen Klasseneinteilung C von $\mathfrak{M}$ zugehörige Faktorstruktur mit $\mathfrak{M}/C$. Das hat nach Bourbaki[4]) den Sinn, daß die C zugehörige Äquivalenzrelation, die wir mit „$\equiv$" bezeichnen, eine Kongruenzrelation ist, d. h. die Eigenschaften[5])

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longrightarrow (c, \gamma)(a\alpha) \equiv (c, \gamma)(b, \beta),\ (a, \alpha)(c, \gamma) \equiv (b, \beta)(c, \gamma) \tag{8}$$

hat, und in $\mathfrak{M}/C$ die Multiplikation

$$\overline{(a, \alpha)}\,\overline{(b, \beta)} = \overline{(a, \alpha)(b, \beta)} \tag{9}$$

zu Grunde gelegt ist, wobei $\overline{(r, \varrho)}$ die durch (r, ϱ) representierte Klasse bezeichnet. Unter den so definierten multiplikativen Strukturen $\mathfrak{M}/C$ können auch Gruppen vorkommen (sogar auch dann, wenn selbst $\mathfrak{M}$ keine Gruppe ist).

Wir werden bekommen, daß die sämtlichen Lösungen unseres Problems (bis auf Isomorphie) mit gewissen speziellen $\mathfrak{M}/C$ übereinstimmen, die nämlich so entstehen, daß man das Funktionenpaar (4) und die Klasseneinteilung C passenden weiteren Einschränkungen unterwirft. Und zwar gilt der folgende:

Satz. *Man bezeichne mit G_*, Γ_* zwei isomorphe Untergruppen von G, bzw. Γ, gebe zwischen ihnen einen Isomorphismus*[6])

$$G_* \approx \Gamma_* \quad (a_* \to Sa_*) \tag{10}$$

an und definiere in $\mathfrak{M}$ die Äquivalenzrelation[7])

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longleftrightarrow S(a^{-1}b) = \alpha^{-1}\beta. \tag{11}$$

Damit diese eine Kongruenzrelation und die zugehörige Faktorstruktur $\mathfrak{M}/C$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß (4) *(außer* (5)*) die fol-*

---

3) Man könnte mit ähnlichem Erfolg

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \alpha^{b}\beta)$$

setzen, für uns wird aber hier die obige Definition (7) bequemer.

4) N. Bourbaki, *Algèbre* I *(Structures algébriques)* (Actualités scientifiques et industrielles 943, Paris 1942), 1—165, insb. S. 45.

5) „$\Longrightarrow$" bezeichnet „hat zur Folge".

6) Mit (10) bezeichnen wir, daß S eine isomorphe Abbildung von G_* auf Γ_* ist. Dabei bezeichnet Sa_* das Bild von a_*.

7) „$\Longleftrightarrow$" bezeichnet „ist gleichbedeutend mit". — Mit $Sr = \varrho$ oder $r = S^{-1}\varrho$ meinen wir stets den Inbegriff der drei Aussagen: $r \in G_*$, $\varrho \in \Gamma_*$, $Sr = \varrho$.

genden Bedingungen erfüllt:

(12) $$S(a_*^\alpha) = \alpha^{-1} S_{a_*} \alpha^{a_*},$$

(13) $$S^{-1}(\alpha_*^a) = a^{-1} S_{\alpha_*}^{-1} a^{\alpha_*},$$

(14) $$S[(c^{\beta\alpha})^{-1}(c^\beta)^\alpha] = ((\beta\alpha)^c)^{-1}\beta^c\alpha^{c^\beta},$$

(15) $$S^{-1}[(\alpha^{bc})^{-1}(\alpha^b)^c] = ((bc)^\alpha)^{-1} b^\alpha c^{\alpha^b}.$$

Diese Gruppen

(16) $$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}/C$$

sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Lösungen unseres Problems. Und zwar bilden in der Gruppe (16) *die* $\overline{(a, \varepsilon)}$ *bzw.* $\overline{(e, \alpha)}$ *je eine Untergruppe* G', Γ' *mit den Eigenschaften* (1), (2). *Dabei ist der Durchschnitt* (3) *isomorph mit* G_* *(also auch mit* Γ_**), und zwar sind die* $\overline{(a_*, \varepsilon)}$ *die sämtlichen verschiedenen Elemente dieses Durchschnitts.*

Bemerkung. Man sieht, daß (12), (13) zueinander *dual* sind, worunter wir verstehen, daß sie mit Vertauschung von G, Γ und Ersetzung von S durch S^{-1} auseinander hervorgehen. Ebenfalls sind (14), (15) dual.[8])

Zum Beweis des Satzes stellen wir zunächst die Bedingungen der Existenz von $\mathfrak{M}/C$, d. h. die der Kompatibilität der durch (11) gelieferten Klasseneinteilung C auf. Nach (11) lassen sich zwei beliebige äquivalente Elemente von $\mathfrak{M}$ in der Form (a, α), $(aa_*, \alpha S a_*)$ annehmen. Werden diese zuerst von links, dann von rechts mit (b, β) multipliziert, so erhält man nach (7) die Produkte

$$(ba^\beta, \alpha\beta^a),\ (b(aa_*)^\beta, \alpha S a_* \cdot \beta^{aa_*})$$

bzw.

$$(ab^\alpha, \beta\alpha^b),\ (aa_* b^{\alpha S a_*},\ \beta(\alpha S a_*)^b).$$

Wegen (8), (11) existiert also $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann, wenn

(17) $$S[(a^\beta)^{-1}(aa_*)^\beta] = (\beta^a)^{-1} S a_* \cdot \beta^{aa_*},$$

(18) $$S[(b^\alpha)^{-1} a_* b^{\alpha S a_*}] = (\alpha^b)^{-1}(\alpha S a_*)^b$$

gelten.

Indem wir (17), (18) voraussetzen, wollen wir jetzt die Bedingungen aufstellen, damit $\mathfrak{M}/C$ assoziativ ist. Hierzu ist nach (7) und (9) notwendig und hinreichend:

$$(ab^\alpha, \beta\alpha^b)(c, \gamma) \equiv (a, \alpha)(bc^\beta, \gamma\beta^c),$$

d. h.

$$(ab^\alpha c^{\beta\alpha^b}, \gamma(\beta\alpha^b)^c) \equiv (a(bc^\beta)^\alpha, \gamma\beta^c\alpha^{bc^\beta}).$$

Nach (11) schreibt sich hierfür

(19) $$S[((bc^\beta)^\alpha)^{-1} b^\alpha c^{\beta\alpha^b}] = (\alpha^{bc^\beta})^{-1}(\beta^c)^{-1}(\beta\alpha^b)^c.$$

---

[8]) Obige Dualität würde eine weniger einfache Form annehmen, wenn man die Multiplikation in $\mathfrak{M}$ nach[3]) (statt (7)) definiert.

Setzen wir hier voneinander unabhängig $b=e$, bzw. $\beta=\varepsilon$ ein, so entsteht wegen (5) zuerst (14), dann

$$S[((bc)^{\alpha})^{-1}b^{\alpha}c^{\alpha^{b}}]=(\alpha^{bc})^{-1}(\alpha^{b})^{c}. \tag{20}$$

Wendet man umgekehrt (20) mit c^{β} statt c und (14) mit α^{b} statt α an, multipliziert man die erste dieser zwei Gleichungen von rechts mit der zweiten, so ergibt sich wegen der Homomorphieeigenschaft von S eben die Gleichung (19). Hiernach besteht die gesuchte Assoziativitätsbedingung aus (14) und (20). Wir bemerken auch, daß (20) mit (15) übereinstimmt. Somit drücken (14), (15) die Bedingungen der Assoziativität aus. Bisher haben wir gewonnen, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) assoziativ ist, wenn (17), (18), (14), (15) gelten.

Wir beweisen, daß diese Bedingungen mit (12) bis (15) äquivalent sind. Wir machen das so, daß wir (14), (15) voraussetzen und dann die Äquivalenz von (17), (18) mit (12), (13) zeigen.

Einerseits folgt aus (17) für $a=e$ (unter Berücksichtigung von (5)) die Gleichung (12).

Anderseits folgt aus (15) für $b=a$, $c=a_{*}$, $\alpha=\beta$ (mit Vertauschung der Seiten)

$$((aa_{*})^{\beta})^{-1}a^{\beta}a_{*}^{\beta^{a}}=S^{-1}[(\beta^{aa_{*}})^{-1}(\beta^{a})^{a_{*}}].$$

Aus (12) folgt, daß der dritte Faktor der linken Seite (also auch das Produkt der ersten zwei Faktoren) in G_1 liegt. Somit entsteht durch Anwendung von S

$$S[((a_{*}a)^{\beta})^{-1}a^{\beta}]\cdot S(a_{*}^{\beta^{a}})=(\beta^{aa_{*}})^{-1}(\beta^{a})^{a_{*}}.$$

Aus (12) folgt

$$S(a_{*}^{\beta^{a}})=(\beta^{a})^{-1}Sa_{*}\cdot(\beta^{a})^{a_{*}}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$S[((aa_{*})^{\beta})^{-1}a^{\beta}]=(\beta^{aa_{*}})^{-1}\cdot Sa_{*}^{-1}\cdot\beta^{a}.$$

Nach Übergehen zum Inversen stimmt dies mit (17) überein.

Wir haben gezeigt:

$$(17)\Longleftrightarrow(12);\quad(12),(15)\Longleftrightarrow(17).$$

Wendet man S^{-1} auf (18) an (und vertauscht die Seiten), so sieht man, daß (18) das Duale von (17) ist. Folglich entsteht aus vorigem nach Dualisierung:

$$(18)\Longleftrightarrow(13);\quad(13),(14)\Longleftrightarrow(18).$$

Beide miteinander beweisen die obige Behauptung, daß nämlich die Bedingungen (17), (18), (14), (15) mit (12) bis (15) äquivalent sind.

Bisher haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) assoziativ ist, wenn (12) bis (15) gelten. Dies genügt aber auch schon, damit

$\mathfrak{M}/C$ eine Gruppe ist. Da nämlich (e, ε) das Einselement von $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\overline{(e, \varepsilon)}$ das Einselement von $\mathfrak{M}/C$. Ferner gelten nach (5), (7)

$$(a, \alpha) = (a, \varepsilon)(e, \alpha), \tag{21}$$

$$(a, \varepsilon)(a^{-1}, \varepsilon) = (e, \varepsilon), \quad (e, \alpha)(e, \alpha^{-1}) = (e, \varepsilon). \tag{22}$$

Wenn also $\mathfrak{M}/C$ assoziativ ist, so folgt hieraus

$$\overline{(a, \alpha)}\,\overline{(e, \alpha^{-1})}\,\overline{(a^{-1}, \varepsilon)} = \overline{(e, \varepsilon)},$$

d. h. die Existenz des Rechtsinversen von $\overline{(a, \alpha)}$. Wir haben bewiesen, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) eine Gruppe ist, wenn (12) bis (15) gelten.

Betrachten wir nunmehr die Gruppe (16). Es ist wegen (21), (22) klar, daß die im Satz definierten Untergruppen G', Γ' von $\mathfrak{G}$ existieren und für sie (1), (2) gelten. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}$ den Durchschnitt (3). Dieser besteht aus denjenigen Elementen $\overline{(a, \varepsilon)}$, die sich auch als $\overline{(e, \alpha)}$ schreiben lassen. Da nach (11)

$$\overline{(a, \varepsilon)} = \overline{(e, \alpha)} \Longleftrightarrow Sa = \alpha^{-1} \tag{23}$$

gilt, so folgt hieraus wegen (10) offenbar, daß $\mathfrak{D}$ aus den Elementen $\overline{(a_*, \varepsilon)}$ besteht und daß diese Elemente auch schon verschieden sind. Das ergibt wegen (7) auch die Isomorphie $\mathfrak{D} \approx G_*$.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß umgekehrt jede Lösung $\mathfrak{G}$ unseres Problems (bis auf Isomorphie) unter den im Satz angegebenen Gruppen $\mathfrak{M}/C$ vorkommt. Indem wir G und Γ auf Grund der Isomorphien (2) in $\mathfrak{G}$ einbetten, können wir $\mathfrak{G}$ in der Form

$$\mathfrak{G} = G\Gamma \tag{24}$$

annehmen, wobei also G, Γ jetzt Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind. Wir setzen

$$G_* = G \cap \Gamma. \tag{25}$$

Wegen (24) erscheinen alle Elemente von $\mathfrak{G}$ in der Form[9])

$$a\alpha^{-1}. \tag{26}$$

Offenbar gilt dabei die Regel

$$a\alpha^{-1} = b\beta^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1}b = \alpha^{-1}\beta \in G_*. \tag{27}$$

Wegen (24) läßt sich jedes Produkt $\alpha^{-1}a$ auch in der Form $b\beta^{-1}$ schreiben. Obwohl dabei für b, β (nach (27)) mehrere Möglichkeiten vorliegen, so steht doch nichts im Wege, daß man für jedes Paar a, α ein zugehöriges Paar b, β irgendwie festwählt, wodurch b, β nunmehr (eindeutige) Funktionen von a, α geworden sind. Diese nehmen wir in der Form (4) an. Dann gilt

---

[9]) Unser Verfahren, daß wir die Elemente von $\mathfrak{G}$ in der Form $a\alpha^{-1}$ statt $a\alpha$ annehmen, ist natürlich unwesentlich und steht damit in Zusammenhang, daß wir die Multiplikation in $\mathfrak{M}$ nach (7) (statt[8])) definiert haben.

$\alpha^{-1}b = b^{\alpha}(\alpha^{b})^{-1}$, also auch

$$a\alpha^{-1}b\beta^{-1} = ab^{\alpha}(\beta\alpha^{b})^{-1}. \tag{28}$$

Da insbesondere $\varepsilon^{-1}a = a\varepsilon^{-1}$, $\alpha^{-1}e = e\alpha^{-1}$ ist, so dürfen wir auch (5) annehmen. Da (4), (5) gelten, so existiert die zugehörige multiplikative Struktur $\mathfrak{M}$, wie wir diese bei (6), (7) definiert haben. Hierfür gilt wegen (7), (28) die Homomorphie

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{G} \quad ((a, \alpha) \to a\alpha^{-1}). \tag{29}$$

Bezeichne C die zugehörige (kompatible) Klasseneinteilung von $\mathfrak{M}$, in der nämlich diejenigen Elemente von $\mathfrak{M}$ eine Klasse ausmachen, denen vermöge (29) ein gemeinsames Bild in $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist. Kraft dieser Klasseneinteilung gilt also für die zugehörige Äquivalenzrelation:

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longleftrightarrow a\alpha^{-1} = b\beta^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1}b = \alpha^{-1}\beta.$$

Hiernach haben wir es mit einem Spezialfall von (11) zu tun, wobei nämlich in (10) $\Gamma_{*} = G_{*}$ gesetzt und für S die identische Abbildung von G_1 (auf sich) genommen wurde. Da ferner aus (29) die Isomorphie

$$\mathfrak{G} \approx \mathfrak{M}/C$$

folgt, so haben wir hiermit den Beweis des Satzes beendet.

Bemerkung. Die in unserem Satz begründete Theorie zeigt viele Ähnlichkeiten mit der Theorie der Schreierschen Gruppenerweiterungen auf. Vergleiche hierüber unsere Arbeit.[10]). Nach dem dortigen Muster läßt sich auch das Transformationsproblem der Gruppen (16) behandeln. Man siehe noch unsere frühere Arbeit.[11]) Wenn insbesondere $G_{*} = e$ (also $\Gamma_{*} = \varepsilon$) ist, so ist nur $a_{*} = e$, $\alpha_{*} = \varepsilon$ möglich, weshalb jetzt (12), (13) identisch erfüllt sind, ferner besagen (14), (15), daß stets

$$(c^{\beta})^{\alpha} = c^{\beta\alpha}, \qquad (\beta\alpha)^{c} = \beta^{c}\alpha^{c^{\beta}},$$
$$(\alpha^{b})^{c} = \alpha^{bc}, \qquad (bc)^{\alpha} = b^{\alpha}c^{\alpha^{b}}$$

ist. Das sind eben die bekannten Bedingungsgleichungen von Zappa.[1])

(Eingegangen am 12 Juli 1955.)

---

10) L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1951), 201—227.

11) J. Szép and L. Rédei, On factorisable groups, *diese Acta*, **13** (1950), 235—238.

Metrische Dualität der allgemeinen Räume.

Von ARTHUR MOÓR in Debrecen.

Einleitung.

In der neueren Entwicklung der Geometrie, sowie in der Physik haben Variationsprobleme von der Form

$$(0.1) \qquad \delta \int_{\alpha}^{\beta} F(x, \dot{x})\, dt = 0$$

eine grundlegende Bedeutung [1]). Diese Variationsprobleme kann man sowohl vom Standpunkt der Funktionentheorie, wie vom Standpunkt der Geometrie untersuchen.

A. L. UNDERHILL bestimmte zuerst die Invarianten des Variationsproblems (0. 1) in seiner Arbeit [2]) [15] mit analytischen Methoden. Die geometrische Charakterisierung des Variationsproblems (0. 1), die zuerst systematisch von P. FINSLER durchgeführt wurde, ist zum Ausgangspunkt der Theorie der allgemeinen differentialgeometrischen Räume geworden. (Vgl. [8] und [4].) Diese Theorie wurde in vielen Abhandlungen behandelt, und neben dem Variationsproblem (0. 1) hat man bald auch Variationsprobleme mit mehreren Veränderlichen „geometrisiert". In erster Reihe kommen hier die Variationsprobleme von der Form

$$(0.2) \qquad \delta \int_{(n-1)} \frac{F(x, u)}{u_n}\, dx^1 \cdots dx^{n-1} = 0$$

in Betracht, wo die u_i die Bestimmungszahlen der Hyperflächenelemente bedeuten. Die funktionentheoretische Untersuchung des Variationsproblems (0. 2) hat zuerst L. KOSCHMIEDER durchgeführt und die zu (0. 2) gebundenen Invarianten bestimmt. [3])

Die Entwicklung der geometrischen Theorie des Variationsproblems (0. 2) haben E. CARTAN und L. BERWALD in den Abhandlungen [1] und [3]

---

[1]) Wenn es nicht anders gesetzt wird, bedeutet x immer die n Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^n$ eines Punktes im n-dimensionalen Raum. Entsprechend ist $\dot{x} = \dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten auf das Schriftenverzeichnis am Ende unserer Arbeit.

[3]) Vgl. für die Untersuchungen L. KOSCHMIEDERS das Schriftenverzeichnis von [6].

durchgeführt. Diese Geometrien lassen sich dadurch kennzeichnen, daß ihr Grundelement das Hyperflächenelement (x, u) ist, und daß durch eine Fundamentalfunktion $F(x, u)$ die Oberfläche in diesen Räumen für Hyperflächen definiert ist. Von $F(x, u)$ ausgehend kann man einen metrischen Fundamentaltensor g_{ik} definieren, und dann mit Hilfe von g_{ik} die Länge der Vektoren, und alle charakteristische Größen des Raumes bestimmen. Diese Räume nennt man Cartansche Räume, während die durch (0. 1) bestimmten Räume die Finslerschen Räume sind. Die letzteren sind dadurch gekennzeichnet, daß ihr Grundelement das Linienelement $(x, \dot{x})$ ist, und daß die metrische Fundamentalfunktion $F(x, \dot{x})$ die Länge der Kurven

$$x^i = x^i(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

zwischen den Grenzen α, β bestimmt. Der metrische Fundamentaltensor und die weiteren grundlegenden Größen des Raumes sind — wie im Cartanschen Raum — auch aus $F(x, \dot{x})$ ableitbar. In diesen Räumen spielt ein kontravarianter Vektor bzw. eine kovariante Vektordichte eine fundamentale Rolle.

Bei der neueren Entwicklung der Geometrie der allgemeinen Räume hat man einen einheitlichen Gesichtspunkt dadurch erzielt, daß man für das Grundelement eine Vektordichte vom Gewicht p gewählt hat. In dieser Verallgemeinerung sind dann sowohl die Finslerschen, wie die Cartanschen Räume enthalten. In den Arbeiten [14], [6] und [5] wurden die Fundamentaltensoren, und mit Hilfe des invarianten Differentials die Parallelübertragung in diesen allgemeinen metrischen Räumen bestimmt.

Das Ziel unseres Artikels ist die Untersuchung der metrischen Dualität der allgemeinen Räume. Ihre genaue Definition ist in § 2 angegeben. Wir erwähnen hier einleitend nur so viel, daß es sich um eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Grundelemente beider Räume handelt, für die die metrischen Fundamentaltensoren in entsprechenden Elementen übereinstimmen. Falls die Grundelemente der dualen Räume kontravariante bzw. kovariante Vektordichten sind, behandeln wir das Dualitätsproblem mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes.

Die Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes ist an sich eine interessante und wichtige Methode, da mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes die Struktur des allgemeinen Raumes längs einer Folge der Grundelemente einfacher wird, als im allgemeinen Fall. (Vgl. [16], [11], [12] und [13].) Als wichtigstes Ergebnis bekommen wir, daß man durch die Dualisierung die Fundamentaltensoren des einen Raumes aus denen des anderen gewinnen kann. Demnach *existiert zwischen dem kontravarianten und kovarianten Fall kein prinzipieller Unterschied.* Diese Ergebnisse haben wir in Satz V bzw. VI formuliert.

§ 1. Fundamentalgrößen der allgemeinen metrischen Räume.

In diesem Pragraphen werden wir die Fundamentalbegriffe und die Fundamentalgrößen der Geometrie der allgemeinen metrischen Räume zusammenstellen. Die vollständige Entwicklung dieser Theorie befindet sich in den Arbeiten [5], [6] und [14].

Ein allgemeiner metrischer Raum $\mathfrak{R}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit von kovarianten oder kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $-p$ bzw. $+q$ — sie sind die Grundelemente des Raumes — für die eine Grundfunktion $L(x, t)$ existiert. Die Grundfunktion $L(x, t)$, — wo t_i bzw. t^i die Komponenten der Vektordichte bedeuten — soll in den t positiv homogen von erster Dimension sein und außerdem nach ihren Argumenten mindestens viermal stetig differenzierbar sein.

Im folgenden bezeichnen wir die Grundelemente des Raumes $\mathfrak{R}_n$, falls sie kovariante Vektordichten vom Gewicht $-p$ sind, mit u_i, und falls sie kontravariante Vektordichten vom Gewicht $+q$ sind, mit v^i. Bei einer Koordinatentransformation

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x),$$

die umkehrbar und eindeutig sein soll, transformieren sich also die Grundelemente nach den Transformationsgesetzen:

$$(1.1a) \quad \bar{u}_r = \varDelta^{-p} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r} u_i, \qquad (1.1b) \quad \overline{v}^s = \varDelta^q \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial x^k} v^k,$$

wo

$$\varDelta = \mathrm{Det}\left| \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^b} \right|$$

die Substitutionsdeterminante der Koordinatentransformation bedeutet.

Aus der metrischen Grundfunktion kann man den metrischen Grundtensor g_{ik} aus den Gleichungen ($np \neq 1$, $nq \neq 1$)

$$(1.2a) \quad g^{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{p}{np-1}} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad (1.2b) \quad g_{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{q}{nq-1}} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} L^2\right)}{\partial v^i \partial v^k}$$

bestimmen, wo $\mathfrak{a}$ in den beiden Fällen

$$(a) \quad \mathfrak{a} = \mathrm{Det}\,|a^{ij}|, \quad a^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_i \partial u_j}, \qquad (b) \quad \mathfrak{a} = \mathrm{Det}\,|a_{ij}|, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial v^i \partial v^j}$$

bedeutet[4]). Durch die Formeln

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = k, \\ 0, & \text{wenn } i \neq k, \end{cases}$$

---

[4]) Wir definieren $\mathfrak{a}$ im kovarianten Fall anders, als E. T. Davies in [6] die entsprechende Größe definiert hat. Setzt man im kovarianten Fall $\mathfrak{a} = a^{-1}$, dann erhält man die Bezeichnung von E. T. Davies. Dies kommt auch in der Formel (1.2a) im Vergleich zur Gleichung (1.4) von [6] zum Vorschein. Unsere Bezeichnung wird auch von L. Berwald in seiner Arbeit [1] für den Fall $p = 1$ benützt.

kann man in beiden Fällen die rein kontravarianten bzw. die rein kovarianten Komponenten des metrischen Grundtensors bestimmen. Mit Hilfe des metrischen Grundtensors kann man die Tensoren in gewöhnlicher Weise mit kovarianten oder kontravarianten Komponenten darstellen.

Bilden wir die Determinante

$$g = \operatorname{Det}|g_{ik}|,$$

so haben wir eine wichtige Grundgröße des Raumes $\mathfrak{R}_n$ erhalten. Aus der Transformationsformel der g_{ik} folgt nämlich, daß $\sqrt{g}$ eine Skalarendichte vom Gewicht $+1$ ist, ihre Transformationsformel lautet also:

$$\text{(1.3)} \qquad \sqrt{\bar{g}} = \Delta \sqrt{g}, \qquad \Delta = \operatorname{Det}\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right|.$$

Diese Gleichung zeigt, daß das Inhaltsmaß in $\mathfrak{R}_n$ mit Hilfe von $\sqrt{g}$ definiert werden kann, allerdings nur in bezug auf eine ausgezeichnete Folge oder ein Feld der Grundelemente. *Ist $\sqrt{g}$ nur vom Orte abhängig, dann existiert im Raum ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne* (vgl. [2], § 1 und [11], S. 358).

Die Grundfunktion können wir mit Hilfe des metrischen Grundtensors in der Form:

$$\text{(1.4a)} \quad L^2(x, u) = g^p g^{ij} u_i u_j, \qquad \text{(1.4b)} \quad L^2(x, v) = g^{-q} g_{ij} v^i v^j$$

darstellen. Aus den Formeln (1.2) kann man sofort feststellen, daß die g_{ik} und somit auch g in den u_i, bzw. v^i homogen von nullter Dimension sind. Wir bemerken jetzt, daß mit Ausnahme der Grundfunktion alle übrigen den Raum charakterisierenden Größen in den u_i bzw. v^i homogen von nullter Dimension sind.

Die Komponenten des Einheitsvektors, der die Richtung seines Grundelementes hat, sind in den beiden Fällen:

$$\text{(1.5a)} \qquad l_i = \frac{\sqrt{g^p}}{L} u_i, \qquad l^i = \frac{1}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial L}{\partial u_i}$$

$$\text{(1.5b)} \qquad l^i = \frac{1}{L\sqrt{g^q}} v^i, \qquad l_i = \sqrt{g^q} \frac{\partial L}{\partial v^i}.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$\text{(a)} \quad f(x, u)\|^k = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial f}{\partial u_k}, \qquad \text{(b)} \quad f(x, v)\|_k = L\sqrt{g^q} \frac{\partial f}{\partial v^k}$$

ein, wo f eine homogene Funktion bedeutet. Offenbar ist die Operation $\|^k$ bzw. $\|_k$ eine tensorielle Operation, die auch den Homogenitätsgrad der Funktionen nicht ändert. Mit Hilfe dieser Operation läßt sich der Torsionstensor durch die Formel

(1.6a) $A^{ijk} = -\frac{1}{2} g^{ij}\|^{k}$, (1.6b) $A_{ijk} = \frac{1}{2} g_{ij}\|_{k}$

festlegen. Durch Verjüngung erhält man aus (1.6) den Torsionsvektor

(1.7a) $A^{i} = A_{m}{}^{mi} = (\log \sqrt{g})\|^{i}$, (1.7b) $A_{i} = A^{m}{}_{mi} = (\log \sqrt{g})\|_{i}$

bzw.

(1.8a) $A^{mi}{}_{m} = \{1-(n-1)p\} A^{i}$, (1.8b) $A_{im}{}^{m} = \{1-(n-1)q\} A_{i}$.

Der Torsionstensor ist in seinen ersten beiden Indizes symmetrisch; aus (1.2) folgt aber, daß er nur im Falle $p=0$, bzw. $q=0$, oder falls a nur von x^{i} abhängt, in allen Indizes symmetrisch ist. Bezeichnen wir die Kontraktion mit dem Einheitsvektor l^{i}, wie gewöhnlich, mit „o", so wird

(1.9a) $A^{oik} = A^{iok} = p\, l^{i} A^{k}$, (1.9b) $A_{oik} = A_{iok} = q\, l_{i} A_{k}$

und nach (1.6)

(1.10) $A^{ijo} = 0, \qquad A^{o} = 0$

in beiden Fällen. Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob die Indizes oben oder unten stehen.

Die Übertragungsparameter der Parallelverschiebung sind:

(1.11a)
$$\Gamma^{*j}_{i\ k} = \gamma_{i\ k}^{\ j} + g^{jr}\{[A_{ir}{}^{m}[(\delta^{s}_{k} - l^{s} l_{k})\delta^{t}_{m} + K^{t}_{w}(l_{k}\delta^{w}_{m} - A_{km}{}^{w})(l^{s} + pA^{s})]] + [i,r,k]\}\gamma^{\ o}_{ts}$$

bzw.

(1.11b)
$$\Gamma^{*j}_{i\ k} = \gamma_{i\ k}^{\ j} - g^{jr}\{[A_{ir}{}^{m}[(\delta^{s}_{k} - l^{s} l_{k}) g_{tm} + K^{p}_{w}(l_{k}\delta^{w}_{m} - A_{km}{}^{w})(l^{s} g_{tp} + q\delta^{s}_{p} A_{t})]] + [i,r,k]\}\gamma_{o\ s}^{\ t},$$

wo

$$\gamma_{i\ k}^{\ j} = \frac{1}{2} g^{jr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{r}}\right)$$

is. Wir setzen voraus, daß der Tensor

(1.12) $H^{b}_{a} = \delta^{b}_{a} + A_{oo}{}^{r} A_{ar}{}^{b}$

vom Range n ist und daher der zu ihm reziproke Tensor K^{c}_{b} existiert, für den also

(1.13) $H^{b}_{a} K^{c}_{b} = H^{c}_{b} K^{b}_{a} = \delta^{c}_{a}$

besteht. Das Symbol $[i,r,k]$ drückt aus, daß in (1.11a) und (1.11b) noch zwei weitere Glieder auftreten, wo aber i, r, k zyklisch vertauscht sind und im letzten Glied noch das Vorzeichen geändert wird. (Vgl. [5] Gleichung (1.7).)

In (1.11) kann man nach der Gleichung (1.9a) bzw. (1.9b)

(1.14a) $pA^{r} = A_{oo}{}^{r}$, bzw. (1.14b) $qA_{r} = A_{oor}$.

setzen. Die Hauptkrümmungstensoren sind:

$$\widetilde{R}_{m\ jk}^{\ i} = \frac{\partial \Gamma^{*\ i}_{m\ j}}{\partial x^k} + \Gamma^{*\ i}_{m\ j}\|^r \Gamma^*_{rok} + \Gamma^{*\ r}_{m\ j}\Gamma^{*\ i}_{r\ k} - [j|k], \tag{1.15a}$$

$$\widetilde{R}_{m\ jk}^{\ i} = \frac{\partial \Gamma^{*\ i}_{m\ j}}{\partial x^k} - \Gamma^{*\ i}_{m\ j}\|_r \Gamma^{*\ r}_{o\ k} + \Gamma^{*\ r}_{m\ j}\Gamma^{*\ i}_{r\ k} - [j|k], \tag{1.15b}$$

wo das Symbol $[j|k]$ den ganzen vorigen Ausdruck mit vertauschten Indizes j und k bedeutet.

§ 2. Zuordnung der Grundelemente der dualen Räume.

Es seien $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ zwei allgemeine metrische Räume[5]), mit den Grundelementen (x, z) und (x, z^*), wobei (x, z) und (x, z^*) entweder eine kovariante, oder eine kontravariante Vektordichte bedeutet.

Definition. *$\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ werden als duale Räume bezeichnet, falls eine ein-eindeutige Zuordnung*

$$\begin{cases} x^i \equiv x^i, \\ z^i = \varphi^i(x, z^*), \end{cases} \qquad \left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial z^{*k}} \right| \neq 0 \tag{2.1}$$

der Grundelemente existiert, für die

$$g_{ik}(x, z) = g^*_{ik}(x, z^*) \tag{2.2}$$

besteht, wo g_{ik} bzw. g^*_{ik} die entsprechenden Grundtensoren der Räume $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ bedeuten. Dabei werden die Funktionen $\varphi^i(x, z^*)$ entsprechend den drei möglichen Fällen spezielle Formen haben, die wir im folgenden angeben werden.

Der Fall A). Wir nehmen an, daß die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ kovariante Vektordichten vom Gewicht $-p$, die von $\mathfrak{R}_n^*$ hingegen kovariante Vektordichten vom Gewicht $-q$ sind. Bezeichnen wir die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ mit u_i bzw. u_i^*, dann sollen u_i und u_i^* durch die Relationen

$$u_i = \left(\sqrt{g^*(x, u^*)}\right)^{-p+q} u_i^*, \qquad g^* = \operatorname{Det}|g^*_{ik}| \tag{2.3}$$

zusammenhängen. Wenn noch (2.2) besteht, dann sind $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ duale Räume. Die Relationen (2.3) sind invariant in bezug auf eine Koordinatentransformation, wie das nach (1.1a) und (1.3) sofort bestätigt werden kann. Aus (2.2) folgt noch sofort, daß

$$g(x, u) = g^*(x, u^*) \tag{2.4}$$

besteht.

---

[5]) Die Größen von $\mathfrak{R}_n^*$ werden wir immer mit einem Stern kennzeichnen.

Der Fall B). Die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ bzw. $\mathfrak{R}_n^*$ seien jetzt kontravariante Vektordichten vom Gewicht q bzw. s. Die Zuordnung (2. 1) soll jetzt von der Form:

$$v^i = \left(\sqrt{g^*(x, v^*)}\right)^{q-s} v^{*i} \tag{2.5}$$

sein. Die Relation (2. 5) ist nach (1. 1b) und (1. 3) wieder koordinateninvariant.

Der Fall C). Das Grundelement u_i von $\mathfrak{R}_n$ sei eine kovariante Vektordichte vom Gewicht $-p$, das von $\mathfrak{R}_n^*$ aber eine kontravariante Vektordichte v^i [6]) vom Gewicht $+q$. Die Relation (2. 1) ist in diesem Fall von der Form:

$$u_i = \left(\sqrt{g^*(x, v)}\right)^{-p-q} g^*_{ij}(x, v) v^j. \tag{2.6}$$

Die Umkehrung der Relationen (2. 1) ist in diesem Falle durch

$$v^k = \left(\sqrt{g(x, u)}\right)^{p+q} g^{ik}(x, u) u_i \tag{2.7}$$

angegeben, da nach (2. 2) offenbar auch $g^{ik}(x, u) = g^{*ik}(x, v)$ folgt. Offensichtlich sind die Gleichungen (2. 6), (2. 7) invariant in bezug auf eine Koordinatentransformation. Das folgt sofort auf Grund der Gleichungen (1. 1) und (1. 3).

Die Übereinstimmung der Grundelemente und der Grundtensoren bestimmen die Dualität; im nächsten § werden wir aber zeigen, daß diese Zuordnung nur dann möglich ist, wenn entweder der Torsionsvektor verschwindet, oder die Gewichte der Grundelemente in den Fällen *A)* und *B)* einander gleich sind, während im Falle *C)* die Gewichte von u_i und v^i entgegengesetzt gleich sind. In den Fällen *A)* und *B)* bedeutet aber die Identität der Gewichte nach (2. 2) und (2. 3) bzw. nach (2. 2) und (2. 5) die Identität von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$. Nur im Falle *C)* gibt das eine neue Möglichkeit.

Bemerkung. Aus (2. 2) folgt, daß wenn ein Tensor von $\mathfrak{R}_n$ in kovarianten Komponenten mit einem Tensor von $\mathfrak{R}_n^*$ übereinstimmt, diese dann auch in kontravarianten Komponenten übereinstimmen.

§ 3. Übereinstimmung der Grundtensoren.

Im vorigen §-en haben wir die Dualität der allgemeinen metrischen Räume definiert, jetzt wollen wir die Identität von weiteren charakteristischen Größen beweisen.

Der Fall A). Aus (1. 4a) folgt nach den Gleichungen (2. 2) und (2. 3)

$$L(x, u) = L^*(x, u^*), \tag{3.1}$$

wo L und L^* die entsprechenden Grundfunktionen der Räume bedeuten. Nach

[6]) Da kein Mißverständnis vorhanden sein kann, schreiben wir statt v^{*i} nur v^i.

der zweiten Gleichung von (1.5a) wird wegen (3.1):

(3.2) $$l^i = \frac{1}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial L^*}{\partial u_j^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial u_i}.$$

Aus (2.3) und (2.4) hat man aber

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (p-q)\,(\sqrt{g})^{p-q} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u_i} u_j + (\sqrt{g})^{p-q} \delta_j^i.$$

Diese Gleichung kann man nach (1.5a) und (1.7a) in der Form:

(3.3) $$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (\sqrt{g})^{p-q}[(p-q)A^i l_j + \delta_j^i]$$

schreiben; es wird also aus (3.2), wenn wir die zweite Gleichung von (1.5a) beachten (in diesem Falle aber für die Größen von $\mathfrak{R}_n^*$):

(3.4) $$l^i = (p-q)A^i l^{*j} l_j + l^{*i}.$$

Aus den Gleichungen (2.3), (2.4) und (3.1) folgt aber auf Grund von (1.5a) unmittelbar, daß

(3.5) $$l^i(x, u) = l^{*i}(x, u^*)$$

besteht. Somit wird nach (3.4) entweder $p=q$, oder $A^i=0$.

Die Gleichung (3.3) bekommt also die Form:

(3.6) $$\frac{\partial u_j^*}{\partial u_i} = (\sqrt{g})^{p-q} \delta_j^i.$$

Aus den Gleichungen (2.2) und (3.6) erhalten wir nach (1.6a):

$$A^{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{L^*}{\sqrt{g^{*p}}} \frac{\partial g^{*ij}}{\partial u_r^*} \frac{\partial u_r^*}{\partial u_k} = A^{*ijk}.$$

Wie am Schluß des zweiten § bemerkt wurde, ist außer den trivialen Fall $p=q$ eine Dualität zwischen Räume von kovarianten Vektordichten nur dann möglich, wenn die Torsionsvektoren verschwinden.

Der Fall B). In diesem Falle können wir ganz ähnlich verfahren, wie im Fall *A)*. Nach (2.5) und (1.4b) bekommen wir sofort

(3.7) $$L(x, v) = L^*(x, v^*)$$

und aus (2.5) und (1.5b) wird wieder:

(3.8) $$l^i(x, v) = l^{*i}(x, v^*).$$

Mit der vorigen Methode erhält man auf Grund der zweiten Gleichung von (1.5b) daß entweder $q=s$, oder $A^{*i}=0$ besteht. Aus (2.2) kann man auch jetzt unmittelbar

(3.9) $$A_{ijk}(x, v) = A_{ijk}^*(x, v^*),$$

(3.10) $$\frac{\partial v^j}{\partial v^{*i}} = (\sqrt{g})^{q-s} \delta_i^j$$

herleiten.

Der Fall C). Beachten wir in diesem Falle noch die Gleichung

$$g^*_{ij}(x, v) g^{im}(x, u) = \delta^m_j,$$

die nach (2. 2) offenbar besteht, so bekommt man aus (2. 7) nach der Identität (1. 4b) unmittelbar die Relation:

$$L(x, u) = L^*(x, v) \tag{3. 11}$$

und somit wird aus (2. 6)

$$l_i(x, u) = l^*_i(x, v). \tag{3. 12}$$

Die Herleitung der Formel für $\frac{\partial u_r}{\partial v^k}$ ist etwas länger. Aus der Gleichung (2. 6) bekommt man nach (1. 5b), (1. 6b) und (1. 7b):

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k} = (\sqrt{g})^{-p-q}[-(p+q)A^*_k l^*_r + 2A^*_{srk} l^{*s} + g^*_{rk}].$$

Nach (1. 9b) bekommt man aus dieser Gleichung:

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k} = (\sqrt{g})^{-p-q}[(q-p)A^*_k l^*_r + g^*_{rk}]. \tag{3. 13}$$

Differenzieren wir jetzt (3. 11) nach v^k, so wird nach der zweiten Gleichung von (1. 5b):

$$l^*_k = \sqrt{g^q}\, \frac{\partial L}{\partial u_r} \frac{\partial u_r}{\partial v^k}.$$

Setzen wir in diese Gleichung den Wert $\frac{\partial u_r}{\partial v^k}$ aus (3. 13) ein, so muß wegen (2. 2) und (3. 12) entweder $p = q$, oder $A^*_k = 0$ bestehen. Aus (3. 13) wird jetzt:

$$\frac{\partial u_r}{\partial v^k} = (\sqrt{g})^{-p-q} g^*_{rk}. \tag{3. 14}$$

Nach (2. 2) und (3. 14) bekommen wir für die Torsionstensoren der Räume:

$$A^*_{ijk} = A_{ijk},$$

es ist nämlich:

$$\frac{1}{2} g_{ij}\|^r g_{rk} = A_{ijk}.$$

Unsere bisherigen Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

S a t z I. *Für die Dualität der allgemeinen metrischen Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}^*_n$ ist notwendig, daß entweder das Gewicht der Grundelemente bis auf das Vorzeichen einander gleich sei, oder daß der Torsionsvektor A^i verschwinde. Im Falle A) und B) stimmt das Vorzeichen der Gewichte überein, im Falle C) ist es aber nach* (1. 1) *verschieden.*

Wir werden im folgenden sehen, daß diese Bedingungen schon hinreichend sind, wenn noch die metrischen Grundtensoren in entsprechenden

Grundelementen übereinstimmen; vgl. dazu den Satz V. der eben diese Tatsache beweist. Offensichtlich folgt aus dem Satz I, nach (1. 7) der

Satz II. *In den dualisierbaren Räumen mit $p \neq q$ existiert immer ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne.*

(Im Falle *A)* und *B)* sind die Gewichte, wie schon bemerkt wurde, immer verschieden.)

Die Finslerschen Räume, für die $A_i = 0$ und $L(x, \dot{x}) > 0$ besteht, sind aber nach einem Satze von A. DEICKE (vgl. [7]) mit den Riemannschen Räumen identisch. Ist ein allgemeiner Raum mit $p \neq 0$ zu einem Finslerraum dual, dann ist nach Satz I für beide Räume $A_i = 0$. Somit hat in diesen Räumen der metrische Grundtensor die Form:

$$g_{ik} = \overset{\bullet}{g}_{ik}(x). \tag{3. 15}$$

Diese Räume sind also im wesentlichen auch Riemannsche Räume. Läßt man die Bedingung $L(x, u) > 0$ oder $L(x, v) > 0$ fallen, will man also nur solche Räume berücksichtigen, deren Metrik nicht positiv definit ist, wie sie z. B. in der Relativitätstheorie benutzt werden (vgl. etwa [10]), so folgt aus $A_i = 0$ nicht, daß der Tensor g_{ik} die Form (3. 15) hat. Ein Beispiel für einen solchen Raum befindet sich in L. BERWALDS Arbeit [2], Fußnote 39 auf Seite 161. Vom geometrischen Standpunkt aus ist es zweckmäßig in diesen Räumen unsere Betrachtungen auf solche Teilbereiche der Grundelemente beschränken, in denen $L > 0$ besteht. Offenbar kann man in diesen Räumen, ebenso wie in der Relativitätstheorie, den „Nullkegel" konstruieren. (Vgl. [10] S. 252—254.) Die Konstruktion wollen wir aber jetzt nicht durchführen, da diese in erster Reihe ein physikalisches Interesse hat.

Das zitierte Beispiel von L. BERWALD kann man leicht auf allgemeine Räume übertragen. Das beruht auf der Tatsache, daß falls $F(x, z^1, \ldots, z^n)$ eine Funktion bedeutet, die ebensolche Eigenschaften hat, wie die Grundfunktion $L(x, u)$, dann

$$\mathfrak{g} \equiv \operatorname{Det} |f_{ik}| = F^{n+1} F_1$$

mit

$$f_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial z^i \partial z^k}, \qquad F_1 = -\frac{1}{F^2} \operatorname{Det} \left| \begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^i \partial z^k} & \dfrac{\partial F}{\partial z^k} \\ \hdashline \dfrac{\partial F}{\partial z^i} & 0 \end{array} \right|$$

ist. Es sei jetzt $F(x, z) = L(x, u)$, so wird, wenn wir $z^i = u_i$ setzen (da es jetzt um eine rein formale Rechnung handelt, kommt die Stellung der Indizes nicht in Betracht):

$$L_1 = -\frac{1}{L^2} \operatorname{Det} \left| \begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_k} & \dfrac{\partial L}{\partial u_k} \\ \hdashline \dfrac{\partial L}{\partial u_i} & 0 \end{array} \right|. \tag{3. 16a}$$

Entsprechend ist im kontravarianten Fall:

(3. 16b) $$L_1 = -\frac{1}{L^2}\,\mathrm{Det}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^k} & \dfrac{\partial L}{\partial v^k} \\ \dfrac{\partial L}{\partial v^i} & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ist also in beiden Fällen

$$\mathfrak{a} = L^{n+1} L_1$$

und nach

(a) $g = \mathfrak{a}^{\frac{1}{np-1}}$, (b) $g = \mathfrak{a}^{-\frac{1}{nq-1}}$;

wird

(3. 17a) $g = L^{\frac{n+1}{np-1}} L_1^{\frac{1}{np-1}}$, (3. 17b) $g = L^{-\frac{n+1}{nq-1}} L_1^{-\frac{1}{nq-1}}$.

Ebenso wie in der Cartanschen Geometrie ergeben die Grundfunktionen

(a) $L(x, u) = (u_1 u_2 \ldots u_n)^{\frac{1}{n}}$, (b) $L(x, v) = (v^1 v^2 \ldots v^n)^{\frac{1}{n}}$

solche Räume, für die $A_i = 0$ besteht, wenn nur n ungerade ist. In beiden Fällen wird L_1 die Form

$$L_1 = \psi(n) L^{-n-1}$$

haben. Man kann im allgemeinen einen Raum $\mathfrak{R}_n$ mit $A^i = 0$ dadurch charakterisieren, daß seine Grundfunktion die Lösung der partiellen Differentialgleichung

(3. 18) $$L_1 = \varphi(x) L^{-n-1}$$

ist, wo L_1 durch (3. 16a) bzw. im kontravarianten Fall durch (3. 16b) angegeben ist.

Zum Schluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß in den Fällen *A)* und *B)* aus

$$f(x, u) = f^*(x, u^*), \quad f(x, v) = f^*(x, v^*)$$

nach (3. 6) und (3. 10) die Identitäten

(3. 19a) $f\|^k = f^*\|^k$ (3, 19b) $f\|_k = f^*\|_k$

folgen, wenn f und f^* zwei Größen der Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ sind. Im Falle *C)* folgt nach (3. 14):

(3. 20) $$f^*\|_k = g_{rk} f\|^r,$$

wenn

$$f^*(x, v) = f(x, u)$$

besteht.

§ 4. Identität der Übertragungsparameter und der Krümmungstensoren.

Die Fälle A) und B). Aus den Definitionsgleichungen (2. 2) der dualen Räume kann nach einer leichten Rechnung gefolgert werden, daß die Übertragungsparameter und die Krümmungstensoren der dualen Räume in einander entsprechenden Grundelementen identisch sind. Aus (2. 3) bzw. (2. 5) folgt nämlich:

$$(4.1a)\quad \frac{\partial u_i}{\partial x^k}=(q-p)\frac{\partial \log \sqrt{g^*}}{\partial x^k}u_i^*,\qquad (4.1b)\quad \frac{\partial v^i}{\partial x^k}=(q-s)\frac{\partial \log \sqrt{g^*}}{\partial x^k}v^{*i}.$$

Sind nun $f(x, u)$ und $f^*(x, u^*)$ zwei Größen, für die die Relation

$$f(x, u)=f^*(x, u^*)$$

besteht, und betrachten wir x^i, u_i^* als unabhängige Veränderlichen, so folgt, wenn f in den u_i bzw. f^* in den u_i^* homogen von nullter Dimension ist, daß

$$(4.2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f^*}{\partial x^i}$$

besteht. Nach (4. 1a) besteht nämlich auf Grund der Eulerschen Relation über homogene Funktionen:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}=0.$$

In entsprechender Weise folgt die Gleichung (4. 2) auch im Fall der kontravarianten Vektordichte als Grundelement.

Aus den Gleichungen (4. 1) und (3. 19) *folgt* nun *die Identität der Übertragungsparameter und der Krümmungstensoren.*

In dem Falle *C)*, wo es sich also um die Dualität eines Raumes mit kovarianter Vektordichte zu einem mit kontravarianter Vektordichte handelt, werden wir die Identität der Grundgrößen mit Hilfe der „oskulierenden Räume" durchführen können. In den nächsten Paragraphen konstruieren wir deshalb den oskulierenden Raum; wir werden aber keine Einschränkungen über den Torsionsvektor A^i machen. Im folgenden werden wir schon die Bedingung $A^i=0$ fallen lassen und somit wieder den allgemeinsten Fall untersuchen.

§ 5. Der oskulierende Riemannsche Raum.

(a) Räume mit kovarianter Vektordichte als Grundelement. Bevor wir den oskulierenden Riemannschen Raum eines allgemeinen metrischen Raumes $\mathfrak{R}_n$ mit kovarianter Vektordichte als Grundelement konstruieren, werden wir die Formel des Übertragungsparameters, also (1. 11a) etwas umformen. Überschieben wir (1. 11a) mit l_j, beachten wir die Gleichungen (1. 9a), (1. 12)

und (1. 14a), so erhalten wir für die Übertragungsparameter die Formel:

(5. 1) $$\Gamma^{*}_{ijk} = \gamma_{ijk} + A_{ij}^{\;\;m} \Gamma^{*}_{mok} + A_{jk}^{\;\;m} \Gamma^{*}_{moi} - A_{ik}^{\;\;m} \Gamma^{*}_{moj},$$

die man noch in der Form

(5. 2) $$\Gamma^{*}_{ijk} = \gamma_{ijk} + A_{ij}^{\;\;m} \Gamma_{mok} + A_{jk}^{\;\;m} \Gamma_{moi} - A_{ik}^{\;\;m} \Gamma_{moj}$$

schreiben kann, wo für Γ_{iok} die Relation

$$\Gamma_{iok} = \Gamma^{*}_{iok} - A_{oi}^{\;\;m} \Gamma_{mok} = \Gamma^{*}_{iok} - p\, l_i A^m \Gamma_{mok}$$

besteht. (5. 2) stimmt dann mit der Gleichung (3. 9) (a) von [6], S. 246 überein.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes über[7]). Es sei eine Folge der Grundelemente

(5. 3*) $$x^i = x^i(t),$$

(5. 3**) $$u_i = u_i(t),$$

die wir Grundfolge nennen wollen, angegeben, wo die auftretenden Funktionen im folgenden immer hinreichend oft stetig differenzierbar seien. Durch jedes Element von (5. 3) legen wir nun eine Hyperfläche hindurch in der Weise, daß diese Schar von Hyperflächen einen n-dimensionalen Teilbereich $\mathfrak{B}$ um (5. 3) schlicht bedecke. Dabei betrachten wir die Hyperfläche als den Ort ihrer Grundelemente. (Vgl. [6] S. 252.)

Ist nämlich eine Hyperfläche in parametrischer Form durch

$$x^i = x^i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1})$$

angegeben, so kann man in jedem ihrer Punkte die Größen

$$p_i(\sigma) = (-1)^{i+1} \operatorname{Det} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \sigma^k} \right|, \quad \begin{pmatrix} r = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Die $p_i(\sigma)$ bilden eine kovariante Vektordichte vom Gewicht -1. Diejenigen (x^i, u_i), für die das Verhältnis der u_i mit dem der p_i übereinstimmt, werden wir als das dem (x_i, p_i) zugeordnete Grundelement bezeichnen. Somit erhalten wir unsere Hyperfläche in der Form:

$$x^i = x^i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}), \quad u_i = \varrho(x) u_i(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}).$$

Nach unserer vorigen Konstruktion haben wir erreicht, daß in $\mathfrak{B}$ zu jedem Punkt x^i eindeutig ein Grundelement $u_i(x)$ zugeordnet ist, nämlich dasjenige Grundelement, das von der durch den Punkt x^i hindurchgehende Hyperfläche unserer Schar bestimmt wird. In den Punkten der Kurve (5. 3*) sind diese Grundelemente nach der Konstruktion offenbar eben die durch (5. 3**) angegebenen u_i. Offenbar gilt für die in den Punkten der Kurve

---

[7]) Die oskulierenden Riemannschen Räume sind in Spezialfällen in den Arbeiten [13] und [16] untersucht worden. In [13] ist $p = 1$ bzw. in [16] $q = 0$.

(5. 3*) definierten (5. 3**)

$$u_i(t) \equiv u_i(x(t)).$$

Führen wir jetzt die $u_i(x)$ in den metrischen Grundtensor ein, so bekommen wir einen eindeutig bestimmten Tensor

$$\gamma_{ik}(x) \equiv g_{ik}(x, p(x)) \equiv g_{ik}(x, u(x)), \tag{5.4}$$

der allein von den x^i abhängig ist, also einen Riemannschen Raum darstellt. Diesen Raum wollen wir den oskulierenden Riemannschen Raum in $\mathfrak{B}$ bezeichnen.

Wir wollen jetzt eine Annahme über unsere Schar von Hyperflächen machen. Wir wählen einen Punkt $\bar{x}^i$ aus $\mathfrak{B}$, und einen Punkt $x^i(t)$ aus (5. 3*) so, daß

$$|\bar{x}^i - x^i(t)| < \varepsilon \qquad (t\colon \text{fest}) \tag{5.5}$$

bestehe, wo ε eine beliebig vorgegebene Größe ist. Der Einheitsvektor, der die Richtung von $u_i(x)$ hat, ist $l_i(x)$. Unsere Annahme lautet nun:

F). Der Vektor $l_i(x)$ soll im oskulierenden Riemannschen Raum in den beiden Punkten $\bar{x}^i$ und $x^i(t)$ parallel sein, wenn Größen höherer als erster Ordnung in ε vernachlässigt werden.

Die anschauliche Bedeutung dieser Annahme betreffs des Vektors $l_i(x)$ ist die folgende: liegen die Mittelpunkte x^i der Grundelemente $u_i(x)$ in einer schmalen Umgebung von (5. 3*), so sind die zu diesen Grundelementen gehörigen Einheitsvektoren im oskulierenden Riemannschen Raum in erster Annäherung parallel.

Wir geben jetzt die analytische Formulierung unserer Annahme. Wir legen durch die Punkte $\bar{x}^i$ und $x^i(t)$ die Kurve

$$x^i = x^i(t) + \sigma(\bar{x}^i - x^i(t)), \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1. \qquad (t\colon \text{fest}) \tag{5.6}$$

Offenbar besteht für die Punkte von (5. 6) die Ungleichung (5. 5). Nach unserer Bedingung soll l_i längs (5. 6) in dem durch (5. 4) bestimmten Riemannschen Raum parallel sein. Das ergibt die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k} l_m\right) \frac{dx^k}{d\sigma} = 0,$$

wo $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k}(x)$ die aus den γ_{ik} gebildeten Christoffelklammern bedeuten. In Hinsicht auf (5. 6) bekommt man

$$\left(\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k} l_m\right)(\bar{x}^k - x^k(t)) = 0. \tag{5.7}$$

Die Größen l_m, $\dfrac{\partial l_i}{\partial x^k}$, $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k}$ sollen in (5. 7) alle längs der Kurve (5. 6) gebildet werden. Verwenden wir jetzt den Mittelwertsatz der Differentialrechnung[8]) auf die Größen l_m, $\frac{\partial l_i}{\partial x^k}$ und $\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k}$, und vernachlässigen wir die Glieder in ε höherer Ordnung, so bekommen wir eine Gleichung von der Form (5.7), in der aber die genannten Größen längs $x^i(t)$ (t fest) zu bilden sind. Wegen der Willkürlichkeit des Punktes $\bar{x}^i$ bekommt man aus (5.7):

$$\frac{\partial l_i}{\partial x^k} - \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^m_{i\,k}\, l_m = 0. \tag{5.8}$$

Diese Gleichung besteht also nach unserer Forderung längs (5.3*). Die Gleichung (5.8) können wir noch nach der Relation (1.5a) in der Form

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} - f_k u_s, \qquad \left(f_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \log \frac{\sqrt{g^p}}{L}\right) \tag{5.9}$$

angeben. Das Glied $f_k u_s$ wird im folgenden keine Bedeutung haben, da der Ausdruck $\frac{\partial u_s}{\partial x^k}$ immer in Relationen von der Form

$$\frac{\partial T}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x^k}$$

auftreten wird, wo $T(x, u)$ in den u_i homogen von nullter Dimension ist. Nach der Eulerschen Relation über homogene Funktionen ist aber

$$\frac{\partial T}{\partial u_s} u_s = 0.$$

Bilden wir jetzt die Christoffelklammer aus dem Tensor (5.4). Es wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk} = \gamma_{ijk} + \frac{\sqrt{g^p}}{L}\left(A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} + A_{jk}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^i} - A_{ik}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^j}\right), \tag{5.10}$$

wo

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

ist. Dabei haben wir die aus (1.6a) folgende Formel

$$A_{ij}{}^s = \frac{1}{2} g_{ij}\|^s$$

benützt. Nach (1.9a) und (5.10) wird:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} = \gamma_{sok} + \frac{\sqrt{g^p}}{L}\left(p\, l_s A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^k} + p\, l_k A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^s} - A_{sk}{}^r \frac{\partial u_r}{\partial x^j} l^j\right). \tag{5.11}$$

---

[8]) Aus $l_m(x(\sigma))$ wird z. B.:

$$l_m = l_m(x(t)) + \sigma(\bar{x}^j - x^j(t)) \frac{\partial l_m}{\partial x^j},$$

wo die Argumente von $\frac{\partial l_m}{\partial x^j}$ sind:

$$x^i(t) + \vartheta\, \sigma(\bar{x}^i - x^i(t)) \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Nach (5. 9) und (5. 11) wird:

$$\frac{\partial u_r}{\partial x^j} l^j = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \gamma_{roo} + p A^t \frac{\partial u_t}{\partial x^r} - f_0 u_r. \tag{5. 12}$$

Aus der aus (1. 12) folgenden Relation

$$A^t A_{t r}{}^m = \frac{1}{p}\left(H_r^m - \delta_r^m\right)$$

folgt wegen (5. 9), (5. 11) und (5. 12) nach Überschiebung mit A^s:

$$A^m \frac{\partial u_m}{\partial x^t}(H_r^t - p l_r A^t) = \frac{L}{\sqrt{g^p}}\left[A^t \gamma_{tor} - \frac{1}{p}(H_r^m - \delta_r^m)\gamma_{moo}\right]. \tag{5. 13}$$

Wir bemerken jetzt, daß man im Falle $p = 0$ (5. 12) unmittelbar in die Gleichung (5. 11) einsetzen kann, was wegen (5. 2)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{sok} = \Gamma^*_{sok} \tag{5. 14}$$

ergibt.

Diese Gleichung werden wir aber auch im allgemeinen Fall, also für $p \neq 0$ herleiten. Überschieben wir die Gleichung (5. 13) mit

$$K_s^r(\delta_i^s + p l_i A^s),$$

so wird man nach (1. 13) und nach der Relation

$$K_s^o = l_s \tag{5. 15}$$

(vgl. etwa [5] S. 296; nach (1. 12) und (1. 13) kann man aber die Relation (5. 15) sofort verifizieren), die Gleichung

$$A^m \frac{\partial u_m}{\partial x^i} = \frac{L}{\sqrt{g^p}}\left\{K_i^r\left[A^t \gamma_{tor} - \frac{1}{p}(H_r^m - \delta_r^m)\gamma_{moo}\right] + l_i[\cdots]\right\} \tag{5. 16}$$

erhalten, wo $[\cdots]$ solche Glieder bedeutet, die im folgenden ausfallen werden. Nach (5. 9) und (5. 11) wird die Gleichung

$$A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} = A_{ij}{}^s\left(\frac{L}{\sqrt{g^p}}\gamma_{sok} + p l_k A^r \frac{\partial u_r}{\partial x^s} - A_{sk}{}^r \frac{\partial u_r}{\partial x^t} l^t\right)$$

bestehen. Setzen wir in diese Gleichung die Werte aus (5. 12) und (5. 16) ein, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen:

$$A_{ij}{}^s \frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} A_{ij}{}^s \Gamma^{*}{}_s{}^o{}_k.$$

Setzen wir diese Werte in (5. 10) ein, so erhalten wir unmittelbar die wichtige Relation:

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, u), \tag{5. 17}$$

die längs der Grundelementfolge (5. 3) besteht.

Wir können diese Resultate im folgenden Satz zusammenfassen:

S a t z III. *Längs der Folge von Grundelementen stimmen die Übertragungsparameter des oskulierenden Riemannschen Raumes und die des allgemeinen Raumes $\mathfrak{R}_n$ überein.*

B e m e r k u n g. Aus (5. 17) folgt sofort die Gleichung (5. 14); aber es gilt auch, daß aus (5. 14) nach (5. 9) und (5. 10) die Relation (5. 17) folgt.

Nach (5. 17) können wir die Gleichung (5. 9) in der Form

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} = \frac{L}{\sqrt{g^p}} \Gamma^{*o}_{s\ k} - f_k u_s \tag{5. 18}$$

schreiben. Mit Hilfe dieser Gleichung können wir sofort den folgenden Satz beweisen:

S a t z IV. *Längs der Folge von Grundelementen stimmt das invariante Differential eines Vektors ξ^i im oskulierenden Raum mit dem des Vektors ξ^i im allgemeinen Raum $\mathfrak{R}_n$ überein.*

B e w e i s. Das invariante Differential von ξ^i im oskulierenden Riemannschen Raum lautet:

$$\overset{(\varrho)}{D}\xi^j = d\xi^j + \overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^j_{i\,k}\xi^i dx^k. \tag{5. 19}$$

Längs (5. 3) ist nun

$$\frac{\partial u_s}{\partial x^k} dx^k = du_s,$$

somit wird nach (5. 10) und (5. 18)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}^j_{i\,k} dx^k = C_i^{js} du_s + \Gamma^j_{i\,k} dx^k, \tag{5. 20}$$

wo

$$\Gamma^j_{i\,k} = \Gamma^{*j}_{i\ k} - A_i^{js}\Gamma^*_{sok} = \Gamma^{*j}_{i\,k} - A_i^{js}\Gamma_{sok}, \qquad C_i^{js} = \frac{\sqrt{g^p}}{L} A_i^{js}$$

bedeuten. Setzen wir nun (5. 20) in (5. 19) ein, so bekommen wir eben den Satz IV. (Vgl. etwa [6] S. 246.)

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß man mit Hilfe des oskulierenden Riemannschen Raumes das invariante Differential in diesen allgemeinen Räumen ebenso einführen könnte, wie im Finslerschen Raum das von Herrn O. VARGA durchgeführt wurde (vgl. [16]. Für den Cartanschen Raum vgl. [13]).

* * *

(*b*) *Räume mit kontravarianter Vektordichte als Grundelement.* In diesen Räumen können wir bei der Konstruktion des oskulierenden Riemannschen Raumes in ungefähr analoger Weise verfahren wie vorher, doch werden wir der Vollständigkeit halber die Konstruktion auch jetzt durchführen; wir wollen aber in erster Linie diejenigen Überlegungen ausführen, die von dem vorigen Fall abweichen.

(1. 11b) können wir in die Form:

(5. 21) $$\Gamma^*_{ijk} = \gamma_{ijk} - A_{ij}{}^m \Gamma^*_{omk} - A_{jk}{}^m \Gamma^*_{omi} + A_{ik}{}^m \Gamma^*_{omj}$$

umwandeln.

Es sei nun eine stetige Folge

(5. 22*) $$x^i = x^i(t),$$

(5. 22**) $$v^i = v^i(t)$$

der Grundelemente, die Grundfolge angegeben. Durch jedes Element von (5. 22) legen wir eine Kurve hindurch, und wir betten die Kurven in eine Kurvenschar ein, so daß diese Kurvenschar einen n-dimensionalen Punktbereich $\mathfrak{B}$ um (5. 22*) schlicht bedecke.

Gegenüber der vorigen Konstruktion benützen wir hier statt der Hyperflächenschar Kurvenscharen, da zu den Punkten einer Kurve

$$x^i = x^i(s)$$

ein kontravarianter Vektor in natürlicher Weise zugeordnet ist; nämlich der Tangentenvektor

$$x'^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

Der Tangentenvektor in einem Punkt bestimmt aber eindeutig im Raum $\mathfrak{R}_n$ ein Grundelement

$$v^i = v^i(s),$$

wo das Verhältnis der v^i mit dem der x'^i übereinstimmt. Somit erhalten wir für eine Kurve unserer Kurvenschar die Darstellung

$$x^i = x^i(s), \qquad v^i = v^i(s).$$

Zu jedem Punkt x^i in $\mathfrak{B}$ ist also eine kontravariante Vektordichte $v^i(x)$ zugeordnet, nämlich dasjenige Grundelement, das durch diejenige Kurve bestimmt wird, die eben durch x^i passiert. Längs (5. 22*) gilt natürlich

$$v^i(t) \equiv v^i(x(t)).$$

Führen wir jetzt die $v^i(x)$ in den metrischen Grundtensor ein, so erhalten wir den Tensor

(5. 23) $$\gamma_{ik}(x) \equiv g_{ik}(x, v(x)),$$

der den metrischen Grundtensor des oskulierenden Riemannschen Raumes darstellt.

Wir stellen auch in diesem Falle über den Einheitsvektor $l^i(x)$, der die Richtung seines Stützelementes hat, die folgende Forderung:

F') Wenn $\bar{x}^i$ aus $\mathfrak{B}$ und $x^i(t)$ aus (5. 22*) *gewählte Punkte sind, für die*

$$|\bar{x}^i - x^i(t)| < \varepsilon \qquad (t \text{ fest})$$

besteht, dann soll $l^i(x)$ im oskulierenden Raum in den beiden Punkten $\bar{x}^i$ und

$x^i(t)$ parallel sein, wenn Größen höherer als erster Ordnung in ε vernachlässigt werden. Damit haben wir die konstruierte Kurvenschar spezialisiert.

Aus dieser Bedingung können wir leicht die der Gleichung (5. 8) entsprechende Relation ableiten. (Vgl. [16], insb. die Herleitung der Gleichung (2, 18) auf Seite 172.) Es wird:

$$\frac{\partial l^s}{\partial x^k} + \overset{(o)}{\Gamma}{}^s_{m\,k} l^m = 0, \tag{5. 24}$$

das man nach (1. 5b) auch in der Form:

$$\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = -L\sqrt{g^q}\,\overset{(o)}{\Gamma}{}^s_{m\,k} l^m + f_k v^s \qquad \left(f_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\log L\sqrt{g^q}\right) \tag{5. 25}$$

schreiben kann.

Die Christoffelklammer, gebildet aus dem Tensor (5. 23) ist:

$$\overset{(o)}{\Gamma}_{ijk} = \gamma_{ijk} + \frac{1}{L\sqrt{g^q}}\left(A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} + A_{jks}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} - A_{iks}\frac{\partial v^s}{\partial x^j}\right). \tag{5. 26}$$

Aus den Gleichungen (5. 25) und (5. 26) erhalten wir in Hinsicht auf (1. 9b)

$$\frac{\partial v^r}{\partial x^k} l^k(\delta^s_r + 2q\,l^s A_r) = -L\sqrt{g^q}\,\gamma^s_{o\,o} + q A_r \frac{\partial v^r}{\partial x^j} g^{js} + f_o v^s.$$

Überschieben wir diese Gleichung mit

$$(\delta^t_s - 2q\,l^t A_s),$$

so wird

$$\frac{\partial v^t}{\partial x^k} l^k = -L\sqrt{g^q}\,\gamma^t_{o\,o} + q A_r \frac{\partial v^r}{\partial x^j} g^{jt} + l^t[\cdots] + f_o v^t. \tag{5. 27}$$

Aus (5. 25) und (5. 26) bekommt man noch wegen

$$A_s A^s_{k\,r} = \frac{1}{q}(H_{kr} - g_{kr}), \qquad H_{or} = l_r$$

nach Verwendung von (1. 13)

$$A_m \frac{\partial v^m}{\partial x^t} = -L\sqrt{g^q} K^k_t \left[A_s \gamma^s_{o\,k} + \frac{1}{q}(g_{kr} - H_{kr})\gamma^r_{o\,o}\right] + l_t[\cdots]. \tag{5. 28}$$

B e m e r k u n g. In unseren Betrachtungen können wir immer $q \neq 0$ bedingen, da der Fall $q = 0$ in [16] schon vollständig entwickelt ist.

Wir können jetzt die in (5. 26) auftretenden Größen

$$A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k}$$

berechnen. Nach (5. 25), (5. 27) und (5. 28) wird

$$A_{ijs}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = -L\sqrt{g^q} A_{ij}{}^s \Gamma^*_{osk}. \tag{5. 29}$$

(Bei der Herleitung von (5. 29) haben wir noch zur Vergleichung

$$A_{ij}^{\cdot\cdot s} \Gamma^*_{osk} \tag{5.30}$$

aus (1. 11b) berechnet.) Nach (5. 26) und (5. 29) folgt in Hinsicht auf (5. 21), daß längs der Grundelementfolge (5. 22)

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, v) \tag{5.31}$$

besteht. *Damit haben wir die Gültigkeit des Satzes III auch im Fall der kontravarianten Vektordichte bewiesen.*

Benützen wir nun die längs (5. 22*) gültige Relation

$$\frac{\partial v^s}{\partial x^k} dx^k = dv^s,$$

so kann man auch in diesem Falle den Satz IV beweisen. Aus (5. 19) und (5. 26) bekommt man nämlich

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}{}_{i\ k}^{\ j} dx^k = C^{\ j}_{i\ s} dv^s + \Gamma^{\ j}_{i\ k} dx^k, \tag{5.32}$$

wo

$$\Gamma^{\ j}_{i\ k} = \Gamma^{*j}_{i\ \ k} + A^{\ j}_{i\ s} \Gamma^{*s}_{o\ \ k}, \qquad C^{\ j}_{i\ s} = \frac{1}{L\sqrt{g^q}} A^{\ j}_{i\ s}$$

bedeuten. Setzen wir (5. 32) in (5. 19) ein, *so bekommen wir eben den Satz IV im kontravarianten Fall.* (Vgl. [6] S. 246.)

Bemerkung. Offenbar ist

$$\Gamma^{\ s}_{o\ k} = \Gamma^{*s}_{o\ \ k} + q\, l^s A_r \Gamma^{*r}_{o\ \ k},$$

und wegen $A^{\ j}_{i\ o} = 0$ können wir noch für $\Gamma^{*j}_{i\ \ k}$ die Relation

$$\Gamma^{*j}_{i\ \ k} = \Gamma^{\ j}_{i\ k} - A^{\ j}_{i\ s} \Gamma^{\ s}_{o\ k}$$

aufschreiben, die mit der von E. T. Davies angegebenen Formel vollständig übereinstimmt. (Vgl. [6] Gleichung (3. 9b).)

* * *

Geometrische Bedeutung der Annahme bezüglich $l^i(x)$. Die Annahme, die wir für den Einheitsvektor $l^i(x)$ in beiden Fällen vorausgesetzt haben, ist analytisch durch (5. 8) bzw. (5. 24) angegeben. Überschieben wir diese Gleichungen mit dx^k, so folgt, daß längs der Grundfolgen das invariante Differential des Vektors $l^i(x)$ im oskulierenden Riemannschen Raum verschwindet. Nach dem Satz IV verschwindet aber dann das invariante Differential von $l^i(x, u)$ längs der Grundfolge der Grundelemente auch im allgemeinen metrischen Raum $\mathfrak{R}_n$.

Das bedeutet aber, daß die einzelnen Hyperflächen bzw. die einzelnen Kurven der Scharen, mit denen wir den oskulierenden Riemannschen Raum konstruiert haben, mindestens längs der Grundfolgen „autoparallel" sein sollen.

Autoparallele Hyperflächen, oder Hyperebenen, existieren nicht in jedem $\mathfrak{R}_n$. Für die Existenz solcher Gebilde hat L. BERWALD im Cartanschen Raum $(p=1)$ die Bedingung

$$\tilde{R}_{o\,jk}^{\;i}=0 \tag{5. 33}$$

abgeleitet (vgl. [1] S. 235—236). Autoparallele Kurven existieren dagegen immer in den Räumen $\mathfrak{R}_n$ und sind im Falle

$$A_{ooi}=0$$

mit den Extremalkurven identisch (vgl. [6] S. 257—258 und [9] S. 77).

Wir betonen aber, daß die einzelnen Elemente der Scharen nicht in allen ihren Punkten geodätisch zu sein brauchen. Vgl. noch dazu die Fußnote[10]) in [16] auf Seite 170. Nach dieser Bemerkung genügt also zur Möglichkeit der Konstruktion, daß die Flächen- bzw. Kurvenschar längs der Grundfolge eine Schar der autoparallelen Flächen bzw. Kurven oskuliere, d. h. daß unsere Konstruktion auch in Räumen gültig ist, für die (5. 33) nicht besteht.

§ 6. Identität der Übertragungsparameter und Krümmungstensoren der dualen Räume mit kontravarianter bzw. kovarianter Vektordichten als Grundelement.

Bedeute jetzt wieder $\mathfrak{R}_n^*$ einen allgemeinen metrischen Raum mit kontravarianter Vektordichte, $\mathfrak{R}_n$ einen solchen mit kovarianter Vektordichte als Grundelement. Nach den Resultaten von § 3 muß also für die Dualisierbarkeit von $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$ entweder der Torsionsvektor A^i verschwinden, oder $p=q$ sein. Die Grundelemente von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ sind einander durch (2. 6) und (2. 7) zugeordnet.

Es sei eine Grundfolge

$$x^i=x^i(t),\quad v^i=v^i(t)$$

in $\mathfrak{R}_n^*$ angegeben, zu der wir mit der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode den oskulierenden Riemannschen Raum konstruieren. In einem Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{R}_n^*$ ist dann

$$v^i=v^i(x) \tag{6. 1*}$$

und nach (2. 6) wird auch

$$u_i=u_i(x) \tag{6. 1}$$

bestehen. Aus (2. 2) hat man noch die Identität:

$$g_{ij}(x,u(x))=g_{ij}^*(x,v(x))=\gamma_{ij}(x), \tag{6. 2}$$

wo $\gamma_{ij}(x)$ den metrischen Fundamentaltensor des oskulierenden Riemannschen Raumes bezeichnet; (6. 2) bedeutet nach (6. 1), daß zu dem oskulierenden Raum von $\mathfrak{R}_n^*$ automatisch ein Riemannscher Raum zugeordnet ist, von dem wir sogleich nachweisen, daß er ein oskulierender Riemannscher Raum von $\mathfrak{R}_n$ ist. Dazu müßen wir nun zeigen, daß die Forderung F), die sich analytisch durch (5. 8) ausdrückt, für $\mathfrak{R}_n$ gültig ist.

Zufolge der Gleichungen (2. 6), (3. 12), (6. 1*) und (5. 24) wird aber der zu (6. 1) gehörige Einheitsvektor $l_i(x)$ die Gleichungen (5. 8) längs der Grundfolge befriedigen. Daraus folgt nun, daß der zuvor erwähnte Riemannsche Raum ein oskulierender Raum ist.

Die Gleichungen (5. 8) und) (5. 24) sind übrigens tensorielle Relationen, und sie drücken aus, daß das kovariante Differential des Vektors l^i im oskulierenden Riemannschen Raum längs der Grundfolge verschwindet.

Nach Satz III ist aber längs der Grundfolge

$$\overset{(\varrho)}{\Gamma}_{ijk}(x) = \Gamma^*_{ijk}(x, v(x)) = \hat{\Gamma}^*_{ijk}(x, u(x)), \tag{6. 3}$$

wo wir mit $\hat{\Gamma}_i^{*j}{}_k$ den Übertragungsparameter von $\mathfrak{R}_n$ bezeichnet haben. Zu jedem dualen Elementenpaar

$$(x, v), \quad (x, u)$$

der Räume $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$ kann man aber einen gemeinsamen oskulierenden Riemannschen Raum konstruieren. Dann folgt aus (6. 3)

$$\Gamma^*_{ijk}(x, v) = \hat{\Gamma}^*_{ijk}(x, u); \tag{6. 4}$$

diese Gleichung drückt aus, daß *die Übertragungsparameter der dualen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ übereinstimmen.*

Aus (6. 2) und (6. 4) folgt selbstverständlich auch

$$\Gamma_i^{*j}{}_k(x, v) = \hat{\Gamma}_i^{*j}{}_k(x, u). \tag{6. 5}$$

Wir beweisen jetzt die Identität der Krümmungstensoren (1. 15a) und (1. 15b). Nach (3. 20) und (6. 5) folgt:

$$\frac{\partial \Gamma_i^{*j}{}_k}{\partial x^m} - \Gamma_i^{*j}{}_k \|_r \Gamma_o^{*r}{}_m = \frac{\partial \hat{\Gamma}_i^{*j}{}_k}{\partial x^m} + \frac{\partial \hat{\Gamma}_i^{*j}{}_k}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial x^m} - g_{rt}\hat{\Gamma}_i^{*j}{}_k \|^t \Gamma_o^{*r}{}_m; \tag{6. 6}$$

dabei haben wir x^i, v^i als unabhängige Veränderlichen betrachtet, während u_i von x^i, v^i gemäß (2. 6) abhängt. Die Gleichung (2. 6) schreiben wir nun in der Form:

$$u_t = (\sqrt{g^*})^{-p-q} g_{rt}(x, u)\, v^r. \tag{6. 7}$$

Wegen (3. 12) und

$$\frac{\partial g_{rt}}{\partial u_s} v^r = 2(\sqrt{g})^{p+q} A_{rt}{}^s l^r = 2p(\sqrt{g})^{p+q} l_t A^s$$

bekommt man aus (6. 7)

(6. 8) $$\frac{\partial u_t}{\partial x^m} = u_t \varphi_m(x, u, v) + \frac{L}{\sqrt{g^p}} \frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r,$$

wo $\varphi_m(x, u, v)$ eine Funktion der Argumente x, u, v bedeutet, die man aus (6. 7) leicht explizit bestimmen könnte, die aber für die folgenden unwesentlich ist. Setzen wir (6. 8) in (6. 6) ein, so wird wegen der Homogenität nullter Dimension der $\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k$ in den u_t die Relation

(6. 9) $$\frac{\partial \Gamma_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} - \Gamma_i{}^{*j}{}_k\|_r \Gamma_o{}^{*r}{}_m = \frac{\partial \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} + \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k\|^t \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r - \hat{\Gamma}^*_{otm}\right)$$

bestehen. Nach (5. 1) wird wegen der Identität (1. 9a)

$$\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^m} l^r - \hat{\Gamma}^*_{otm} = \hat{\Gamma}^*_{tom} - 2p l_t A^r \hat{\Gamma}_{rom}.$$

Setzen wir das in (6. 9) ein, so wird in Hinsicht auf die Homogenität von nullter Dimension der $\hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k$ in den u_t:

(6. 10) $$\frac{\partial \Gamma_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} - \Gamma_i{}^{*j}{}_k\|_r \Gamma_o{}^{*r}{}_m = \frac{\partial \hat{\Gamma}_i{}^{*j}{}_k}{\partial x^m} + \Gamma_i{}^{*j}{}_k\|^t \Gamma^*_{tom}.$$

Aus den Relationen (6. 5) *und* (6. 10) *folgt die Identität der Krümmungstensoren der dualen Räume.*

Aus der Relation (6. 5) kann noch eine weitere fundamentale Identität bewiesen werden. Wenn für ein Vektorpaar $\xi^i, \hat{\xi}^i$ die Gleichung

$$\xi^i(x, v) = \hat{\xi}^i(x, u)$$

in den einander entsprechenden Elementen besteht, dann folgt:

(6. 11) $$\xi^i(x, v)|_k = \hat{\xi}^i(x, u)|_k.$$

Der Beweis kann analog zur Rechnung geführt werden, die aus (6. 5) zur Gleichung (6. 10) führte. Statt $\Gamma_i{}^{*j}{}_k$ steht hier ξ^i.

Wir können also unsere Resultate über die dualen Räume im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz V. *Die Grundgrößen der dualen allgemeinen Räume stimmen in den einander entsprechenden Grundelementen überein. Die Grundoperationen*[9]) *ergeben aus übereinstimmenden Größen wieder übereinstimmende Größen.*

Sind die Räume $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ dualisierbar, dann ist entweder $p = q$, oder es verschwindet identisch der Torsionsvektor A^i.

Aus dem letzten Teil dieses Satzes folgt, *daß die Räume $\mathfrak{R}_n$ mit kovarianter Vektordichte als Grundelement mit den Räumen $\mathfrak{R}_n^*$ mit kontravarianter*

---

[9]) Die Grundoperationen sind: 1) das invariante Differential, 2) die kovariante Ableitung und 3) die Operation $\|^k$ bzw. $\|_k$. Die Indentität der invarianten Differentiale der dualen Räume folgt unmittelbar aus Satz IV, da die oskulierenden Räume von $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_n^*$ gemeinsam sind.

Vektordichte als Grundelement gleichberechigt sind, falls das Gewicht der Grundelemente die Relation $p=q$ befriedigt.[10])

Zum Schluß bemerken wir noch, daß in den Räumen mit $A^i=0$ ein Rauminhalt im gewöhnlichen Sinne existiert. Nach (1. 7) ist nämlich g von u_i bzw. v^i unabhängig, somit ist

$$V=\int\limits_{(n)}\sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\ldots dx^n \tag{6. 12}$$

ein Maß des Rauminhalts. Ist $A^i\neq 0$, so kann man mit Hilfe der Formel (6. 12) den Rauminhalt erst in bezug auf ein Feld

$$u_i=u_i(x),\ \text{bzw.}\ v^i=v^i(x)$$

berechnen.

§ 7. Die Dualisierung eines allgemeinen Raumes.

In vorigem betrachteten wir immer zwei Räume $\mathfrak{R}_n^*$ und $\mathfrak{R}_n$, die wir als duale Räume bezeichneten, falls die metrischen Grundtensoren in einander entsprechenden Grundelementen übereinstimmten. Jetzt wollen wir zeigen, daß zu einem Raum $\mathfrak{R}_n^*$, dessen Grundelemente kontravariante Vektordichten sind, immer ein dualer Raum $\mathfrak{R}_n$ konstruiert werden kann, dessen Grundelemente kovariante Vektordichten sind.

Bedeutet $\mathfrak{R}_n^*$ mit der Grundfunktion $L^*(x,v)$ einen allgemeinen Raum, und ist das Gewicht der Grundelemente p, so gilt der

Satz VI. *Besitzt die Gleichung*

$$u_i=(g^*(x,v))^{-p}g^*_{ij}(x,v)v^j \tag{7. 1}$$

mindestens eine, in den u_k von erster Ordnung homogene Lösung $v^k=v^k(x,u)$, so kann zu $\mathfrak{R}_n^*$ ein dualer $\mathfrak{R}_n$ konstruiert werden.[11])

Bemerkung. Die Gleichung (7. 1) ist mit (2. 6) identisch, falls in (2. 6) $p=q$ gesetzt wird.

Beweis des Satzes VI. Bestimmt man v^k aus (7. 1) in der Form $v^k=v^k(x,u)$ und substituiert man diese Werte in die Grundfunktion $L^*(x,v)$, so erhält man eine Funktion $L(x,u)$ und es wird

$$L^*(x,v)=L(x,u).$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach partieller Ableitung nach v^i in Hin-

---

[10]) Vgl. auch den Satz VI.

[11]) Die Forderung, daß $v^k(x,u)$ in den u_i von erster Ordnung homogen sei, ist keine einschränkende Bedingung. Ist nämlich $u_i=\varphi_i(v)$ ein Gleichungssystem, wo die φ_i homogen von erster Ordnung sind, und existiert die Lösung $v^k=\psi^k(u)$, so ist auch ψ^k wegen

$$\psi^k(\varrho u)=\psi^k(\varrho\varphi(v))=\psi^k(\varphi(\varrho v))=\varrho v^k=\varrho\psi^k(u)$$

eine homogene Funktion erster Ordnung.

sicht auf (7. 1)

$$\frac{\partial L^{*2}}{\partial v^i} = \frac{\partial L^2}{\partial u_r} g^{*-p} g^*_{ri}. \tag{7.2}$$

Offensichtlich kann (7. 2) nach (1. 5b) in der Form:

$$\frac{\partial L^2}{\partial u_r} = 2\sqrt{g^{*p}}\, L^* l^{*r} \tag{7.3}$$

geschrieben werden. Nun folgt aus (7. 2)

$$a^*_{ik} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^{*2}}{\partial v^i \partial v^k} = a^{rs} g^{*-2p} g^*_{ri} g^*_{sk} + \frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial u_r} \frac{\partial}{\partial v^k} (g^{*-p} g^*_{ri}).$$

Substituieren wir $\frac{\partial L^2}{\partial u_r}$ aus (7. 3), so wird nach (1. 6b), (1. 7b) und (1. 9b):

$$a^*_{ik} = a^{rs} g^{*-2p} g^*_{ri} g^*_{sk}, \tag{7.4}$$

mit

$$a^{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial u_r \partial u_s}.$$

Nach der Multiplikationsregel der Determinanten wird aus (7. 4)

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} g^{*-2np+2}. \tag{7.5}$$

Nach (1. 2b), (7. 4) und (7. 5) erhält man

$$g^*_{ik} = \mathfrak{a}^{-\frac{p}{np-1}} a^{rs} g^*_{ri} g^*_{sk}.$$

Nach Überschiebung dieser Gleichung mit $g^{*ij} g^{*km}$ wird in Hinsicht auf (1. 2a)

$$g^{*jm}(x, v) = g^{jm}(x, u). \tag{7.6}$$

Betrachten wir also $L(x, u)$ für die Grundfunktion eines Raumes $\mathfrak{R}_n$, dann drückt die Relation (7. 6) aus, daß $\mathfrak{R}^*_n$ und $\mathfrak{R}_n$ duale Räume sind, w. z. b. w.

Schließlich bemerken wir noch, daß der Satz VI umkehrbar ist, d. h. *es läßt sich mit der angegebenen Methode auch zu einem $\mathfrak{R}_n$ ein dualer $\mathfrak{R}^*_n$ konstruieren.*

Schriftenverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-dimensionalen Oberflächenintegrals, *Acta Math.*, 71 (1939), 191—248.

[2] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. II, *Compositio Math.*, 7 (1940), 141—176.

[3] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, *Actualités scientifiques et industrielles*, No 72 (Paris, Hermann et Cie., 1933), 47 Seiten.

[4] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités scientifiques et industrielles*, No 79 (Paris, Hermann et Cie., 1934), 42 Seiten.
[5] R. S. Clark, The conformal geometry of a general differential metric space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **53** (1951), 294—309.
[6] E. T. Davies, On metric spaces based on a vector density, *Proc. London Math Soc.*, (2) **49** (1947), 241—259.
[7] A. Deicke, Über Finslerräume mit $A_i = 0$, *Archiv der Math.*, **4** (1953), 45—51.
[8] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, *Diss. Göttingen* (1918).
[9] J. G. Freeman, First and second variation of the length integral in a generalized metric space, *The Quarterly Journal of Math., Oxford Series*, **15** (1944), 70—83.
[10] J. I. Horváth—A. Moór, Entwicklung einer einheitlichen Feldtheorie begründet auf die Finslersche Geometrie, *Zeitschrift für Phys.*, **131** (1952), 544—570.
[11] A. Moór, Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen, *Acta Math.*, **88** (1952), 347—370.
[12] A. Moór, Ergänzung zu meiner Arbeit: „Über die Dualität von Finslerschen und Cartanschen Räumen", *Acta Math.*, **91** (1954), 187—188.
[13] A. Moór, Die oskulierenden Riemannschen Räume regulärer Cartanscher Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 59—71.
[14] J. A. Schouten und J. Haantjes, Über die Festlegung von allgemeinen Maßbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), 161—176.
[15] A. L. Underhill, Invariants of the functions $F(x, y, x', y')$ in the calculus of variations, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 316—338.
[16] O. Varga, Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **50** (1941), 165—175.

(Eingegangen am 16. Dezember 1954.)

Eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. Deuring.

Von ANDRZEJ MOSTOWSKI in Warszawa.

Es sei K ein Körper, L eine endliche normale Erweiterung von K, $G(L/K)$ die Galois-Gruppe von L nach K, $R(L/K)$ der Gruppenring von $G(L/K)$ mit K als Koeffizientenbereich. Es ist wohlbekannt, daß L und $R(L/K)$ (aufgefaßt als K-Moduln mit G als Operatorenbereich) miteinander operatorisomorph sind.[1]) Dieser Satz wird hier auf den Fall einer unendlichen algebraischen Erweiterung von K verallgemeinert, allerdings unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die Charakteristik von K Null ist. Der Beweis, der hier gegeben ist, funktioniert auch unter einer schwächeren Voraussetzung, daß für jeden endlichen Zwischenkörper M $(K \subset M \subset L)$ der Grad (M/K) von M über K prim zur Charakteristik von K ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß der Satz auch im allgemeinen Fall gilt, doch konnte ich nicht entscheiden, ob es dem wirklich so ist.

1. Wir beweisen zunächst ein Lemma, das sich auf den Fall einer endlichen normalen Erweiterung F/K bezieht. Es seien $M_1, M_2, \ldots, M_s$ endliche normale Erweiterungen von K $(K \subset M_j \subset F$ für $j = 1, 2, \ldots, s)$. Wir bezeichnen mit griechischen Buchstaben die Elemente des Ringes $R(F/K)$ und setzen

$$\sigma_j = \frac{1}{(F/M_j)} \sum_{\xi \in G(F/M_j)} \xi, \quad \sigma_j' = \varepsilon - \sigma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

wo ε das Einselement von $G(F/K)$ ist. Die Elemente σ_j und σ_j' $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sind beide idempotent und gehören dem Zentrum von $R(F/K)$ an.

Ein Element $b_0 \in F$ wird normal (oder genauer normal in F/K) genannt, falls es samt seiner Konjugierten eine Normalbasis von F über K bildet. Für ein normales b_0 gelten offenbar die folgenden Äquivalenzen:

(1.1) $$[\alpha b_0 \in M_j] \Longleftrightarrow [\sigma_j \alpha = \alpha],$$

(1.2) $[\alpha b_0$ ist normal in $F/K] \Longleftrightarrow [\xi\alpha = 0 \Longrightarrow \xi = 0$ für jedes $\xi \in R(F/K)]$.

Wenn $\sigma_j \alpha = \alpha$ und b_0 normal in F/K ist, so gilt ferner

(1.3) $[\alpha b_0$ ist normal in $M_j/K] \Longleftrightarrow [\xi\alpha = 0 \Longrightarrow \xi\sigma_j = 0$ für jedes $\xi \in R(F/K)]$.

---

[1]) M. Deuring, Galoissche Theorie und Darstellungstheorie, *Math. Annalen*, **107** (1932), 140—144.

Denn bedeutet $\bar{\xi}$ den Automorphismus von M_j, der auf M_j mit ξ übereinstimmt, so stimmt $R(M_j/K)$ mit der Menge aller $\bar{\xi}$ für $\xi \in R(F/K)$ überein. Folglich haben wir $[c$ ist normal in $M_j/K] \Longleftrightarrow [\bar{\xi}c=0 \Longrightarrow \bar{\xi}=0$ für jedes $\xi \in R(F/K)]$. Da nun $\bar{\xi}c=\xi c$ für $c \in M_j$, $\xi \alpha b_0=0 \Longleftrightarrow \xi\alpha=0$ und $\bar{\xi}=0 \Longleftrightarrow \xi\sigma_j=0$, so folgt (1.3) aus der zuvor gegebenen Äquivalenz durch Substitution $c=\alpha b_0$.

Ein Element $\alpha \in R(F/K)$ nennen wir eine gemeinsame Erweiterung von Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, falls

$$\sigma_j \alpha = \alpha_j \quad \text{für} \quad j=1,2,\ldots,s. \tag{1.4}$$

Wenn es eine solche gemeinsame Erweiterung gibt, so gilt offenbar

$$\sigma_j \alpha_j = \alpha_j, \quad \sigma_j \alpha_k = \sigma_k \alpha_j \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < j \leqq s. \tag{1.5}$$

Wir beweisen nun die Umkehrung: gelten die Gleichungen (1.5), so ist das Element

$$\alpha = \alpha_1 + \sigma_1'\alpha_2 + \sigma_1'\sigma_2'\alpha_3 + \cdots + \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_{s-1}'\alpha_s + \sigma_1'\cdots\sigma_s'\varrho \quad (\varrho \text{ beliebig}) \tag{1.6}$$

eine gemeinsame Erweiterung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß es für $0 \leqq k < j \leqq s$ ein Element $v_{kj} \in R(F/K)$ gibt, so daß

$$\alpha = \alpha_1 + \sigma_1'\alpha_2 + \cdots + \sigma_1'\cdots\sigma_k'\alpha_j + \sigma_j' v_{kj}. \tag{1.7}$$

Für $k=j-1$ genügt es nämlich

$$v_{j-1,j} = \sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'(\alpha_{j+1} + \sigma_{j+1}'\alpha_{j+2} + \cdots + \sigma_{j+1}'\cdots\sigma_{s-1}'\alpha_s + \sigma_{j+1}'\cdots\sigma_s'\varrho)$$

zu setzen. Gilt (1.7) für ein k $(0<k<j)$, so setzen wir $v_{k-1,j}=v_{kj}+$ $+\sigma_1'\cdots\sigma_{k-1}'\alpha_k$ und erhalten nach leichter Rechnung die Formel (1.7) für die Zahl $k-1$. (1.7) gilt also allgemein. Nun setzen wir in (1.7) $k=0$ und erhalten $\alpha=\alpha_j+\sigma_j' v_{0j}$, woraus nach (1.5) $\sigma_j\alpha=\sigma_j\alpha_j=\alpha_j$ folgt. Also ist α eine gemeinsame Erweiterung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Wir können nun das Hauptlemma dieses Paragraphen formulieren:

(1.8). *Ist b_0 ein normales Element von F/K und sind $\alpha_1 b_0, \ldots, \alpha_s b_0$ normale Elemente von $M_1/K, \ldots, M_s/K$, für welche die Formeln* (1.5) *gelten, so gibt es eine gemeinsame Erweiterung α der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, so daß αb_0 ein normales Element von F/K ist.*

B e w e i s. Wir setzen $\varrho=\varepsilon$ in (1.6) und erhalten eine gemeinsame Erweiterung α der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Um zu zeigen, daß αb_0 normal in F/K ist, haben wir nach (1.2) zu zeigen, daß $\xi\alpha=0 \Longrightarrow \xi=0$. Es sei also $\xi\alpha=0$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j$ und erhalten $\xi\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j\alpha_j=0$, da nach (1.5)

$$(\sigma_1'\cdots\sigma_{k-1}'\alpha_k)(\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j)=0$$

für $k \neq j$ ist. Da $\alpha_j b_0$ normal in M_j/K ist, so folgt daraus nach (1.3) $\xi\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j=0$. Nun multiplizieren wir die Gleichung $\xi\alpha=0$ mit $\sigma_1'\cdots\sigma_s'$ und erhalten $\xi\sigma'_1\cdots\sigma'_s=0$. Durch Addition bekommen wir also

$$\xi(\sigma_1+\sigma'_1\sigma_2+\cdots+\sigma'_1\cdots\sigma'_{s-1}\sigma_s+\sigma'_1\cdots\sigma'_s)=0,$$

also $\xi=0$, da die Summe in Klammern gleich ε ist.

2. Wir wenden nun das soeben bewiesene Lemma auf eine beliebige normale algebraische Erweiterung L von K an. Es sei $\mathfrak{N}$ die Klasse aller normalen Unterkörper $M\subset L$, für welche (M/K) endlich ist. Die Buchstaben $M, N, P, \ldots$ mit oder ohne Indizes bedeuten immer Elemente von $\mathfrak{N}$. Wir setzen

$$\sigma_{M/N}=\frac{1}{(M/M\cap N)}\sum_{\xi\in G(M/M\cap N)}\xi.$$

Die Operatoren $\sigma_{M/N}$ gehören den Ringen $R(M/N)$ an und haben folgende Eigenschaften:

(2.1) $\qquad P\subset M$ und $b\in N\subset M\Longrightarrow\sigma_{N/P}(b)=\sigma_{M/P}(b)$,

(2.2) $\qquad b\in M\supset N\supset P\Longrightarrow\sigma_{N/P}\,\sigma_{M/N}(b)=\sigma_{M/P}(b)$.

Eine Funktion Γ, die jedem M aus $\mathfrak{N}$ ein in M/K normales Element Γ_M zuordnet, nennen wir eine konsistente Auswahlfunktion, wenn

(2.3) $\qquad \Gamma_{M\cap N}=\sigma_{M/N}(\Gamma_M)$ für $M, N\in\mathfrak{N}$.

L e m m a (2.4). *Es gibt eine konsistente Auswahlfunktion.*

B e w e i s. Eine Klasse $\mathfrak{N}_0\subset\mathfrak{N}$ nennen wir voll, wenn $N\subset M\in\mathfrak{N}_0\Longrightarrow N\in\mathfrak{N}_0$. Eine auf $\mathfrak{N}_0$ erklärte Funktion Γ, die jedem $M\in\mathfrak{N}_0$ ein in M/K normales Element zuordnet und außerdem die Bedingung (2.3) für $M, N\in\mathfrak{N}_0$ erfüllt, nennen wir eine konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$. Um (2.4) zu beweisen, genügt es (nach dem Lemma von Zorn) zu zeigen, daß, falls $\mathfrak{N}_0$ voll ist und $M_0\in\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_0$, jede konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$ sich auf die kleinste $\mathfrak{N}_0$ und M_0 enthaltende volle Klasse erweitern läßt.

Es sei also Γ eine konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$ und b_0 ein normales Element von M_0/K. Wir bezeichnen mit $M_1,\ldots,M_s$ Unterkörper von M_0, die zu $\mathfrak{N}_0$ gehören, und mit $M_{s+1},\ldots,M_{s+t}$ die übrigen Unterkörper von M_0. In $R(M_0/K)$ gibt es Elemente $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$, so daß $\alpha_j b_0=\Gamma_{M_j}$ für $j=1, 2,\ldots, s$. Wir setzen zur Abkürzung $\sigma_j=\sigma_{M_0/M_j}$ und erhalten aus (2.1) und (2.3) die Gleichungen

$$\sigma_j\alpha_k b_0=\sigma_j\Gamma_{M_k}=\sigma_{M_k/M_j}(\Gamma_{M_k})=\Gamma_{M_j\cap M_k}.$$

Durch Vertauschung von k und j erhalten wir daraus die Gleichung $\sigma_k\alpha_j b_0=\Gamma_{M_k\cap M_j}$. Folglich gelten die Gleichungen (1.5), was nach (1.8) beweist, daß es eine gemeinsame Erweiterung α von $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ gibt, die zu $R(M_0/K)$ gehört und der Bedingung genügt, daß αb_0 normal in M_0/K ist. Wir setzen nun

$$\Gamma_{M_0}=\alpha b_0,\quad \Gamma_{M_{s+h}}=\sigma_{M_0/M_{s+h}}(\Gamma_{M_0})\quad\text{für}\quad h=1, 2,\ldots, t$$

und erhalten somit eine Funktion, die auf der kleinsten $\mathfrak{N}_0$ und M_0 enthaltenden vollen Klasse $\mathfrak{N}_1$ erklärt ist und jedem $M \in \mathfrak{N}_1$ ein in M/K normales Element zuordnet.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die erweiterte Funktion Γ_M die Gleichung (2. 3) für $M, N \in \mathfrak{N}_1$ erfüllt. Da dies laut Voraussetzung für $M, N \in \mathfrak{N}_0$ gilt, genügt es folgende drei Fälle zu betrachten:

Fall I. $M = M_{s+h}$, $N \in \mathfrak{N}_0$ $(h = 1, 2, \ldots, t)$. Da $\sigma_{M_{s+i}/N} = \sigma_{M_{s+i}/M_{s+i} \cap N}$, liefert die Definition von $\Gamma_{M_{s+h}}$

$$(2.5) \qquad \sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_{s+h}/M_{s+h} \cap N}\, \sigma_{M_0/M_{s+h}}(\Gamma_{M_0}),$$

also nach (2. 2)

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+h} \cap N}(\Gamma_{M_0}).$$

Nun ist aber $M_{s+h} \cap N$ ein Unterkörper von N, also ein Element von $\mathfrak{N}_0$, das in M_0 enthalten ist. Es gibt also ein $j \leqq s$, für welches $M_{s+h} \cap N = M_j$. Wir erhalten also

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_j}(\Gamma_{M_0}) = \sigma_j(\Gamma_{M_0}) = \sigma_j \alpha b_0 = \alpha_j b_0 = \Gamma_{M_j} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Fall II. $M \in \mathfrak{N}_0, N = M_{s+h}$ $(h = 1, 2, \ldots, t)$. Da $\sigma_{M/N} = \sigma_{M/M \cap N} = \sigma_{M/M_{s+h} \cap M}$ und da $M_{s+h} \cap M \in \mathfrak{N}_0$ ist, so erhalten wir aus der Voraussetzung, daß (2. 3) für $M, N \in \mathfrak{N}_0$ gilt, die Formel

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M/M_{s+h}}(\Gamma_M) = \sigma_{M/M_{s+h} \cap M}(\Gamma_M) = \Gamma_{M \cap (M_{s+h} \cap M)} = \Gamma_{M \cap M_{s+h}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Fall III. $M = M_{s+h}$, $N = M_{s+j}$ $(h, j = 1, 2, \ldots, t)$. In diesem Fall gilt die Formel (2. 5) mit $N = M_{s+j}$ und wir erhalten nach (2. 2)

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+h} \cap M_{s+j}}(\Gamma_{M_0}).$$

Falls nun $M_{s+h} \cap M_{s+j} \in \mathfrak{N}_0$, so haben wir $M_{s+h} \cap M_{s+j} = M_k$ für ein $k \leqq s$ und folglich

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_k}(\Gamma_{M_0}) = \sigma_k \alpha b_0 = \alpha_k b_0 = \Gamma_{M_k} = \Gamma_{M_{s+h} \cap M_{s+j}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Falls $M_{s+h} \cap M_{s+j}$ non $\in \mathfrak{N}_0$, so gibt es ein $i \leqq t$, so daß $M_{s+h} \cap M_{s+j} = M_{s+i}$ und folglich

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+i}}(\Gamma_{M_0}) = \Gamma_{M_{s+i}} = \Gamma_{M_{s+h} \cap M_{s+j}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Dies schließt ab den Beweis von (2. 4).

3. Es sei wie zuvor L eine normale algebraische Erweiterung von K. Wir bezeichnen mit $G(L/K)$ die Galois-Gruppe von L nach K, betrachtet als eine topologische Gruppe. Wir führen in K die diskrete Topologie ein und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ den K-Modul bestehend aus allen stetigen Funktionen, die $G(L/K)$ in K abbilden. Für jedes $f \in \mathfrak{M}$ gibt es also einen Körper $M \in \mathfrak{N}$, so daß für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in G(L/K)$

$$\gamma_1|M = \gamma_2|M \Longrightarrow f(\gamma_1) = f(\gamma_2).^{2)} \tag{3.1}$$

Wir bezeichnen weiter mit D die Darstellung von $G(L/K)$ in $\mathfrak{M}$ definiert durch die Formel

$$[D_\gamma f = g] \Longleftrightarrow [g(\xi) = f(\gamma^{-1}\xi) \quad \text{für jedes} \quad \xi \in G(L/K)]$$

und mit Δ die Darstellung von $G(L/K)$ in L definiert durch die Gleichung

$$\Delta_\gamma(a) = \gamma(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in L.$$

Satz (3.2). *Die Darstellungen D und Δ sind äquivalent.*

Beweis. Es sei $f \in \mathfrak{M}$. Wir wählen einen Körper $M \in \mathfrak{N}$ für welchen (3. 1) gilt. Jeden Automorphismus $\gamma \in G(M/K)$ erweitern wir beliebig zu einem Automorphismus $\bar{\gamma} \in G(L/K)$ und setzen

$$T(f) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\bar{\gamma})\, \gamma(\Gamma_M),$$

wo Γ eine beliebige aber ein für allemal fest gewählte konsistente Auswahlfunktion bedeutet. Nach (3. 1) ist $T(f)$ von der Art, wie γ zu $\bar{\gamma}$ erweitert wurde, unabhängig.

Wir zeigen jetzt, daß $T(f)$ auch von M unabhängig ist. Nehmen wir zu diesem Zweck an, daß M_1 ein anderer Körper ist, der (3. 1) erfüllt und bezeichnen mit N das Kompositum von M und M_1. Ferner setzen wir

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\delta \in G(N/K)} f(\bar{\delta})\, \delta(\Gamma_M) \tag{3.3}$$

und zerlegen $G(N/K)$ in Nebenklassen nach der Gruppe $G(N/M)$:

$$G(N/K) = \bigcup_{\xi \in I} \xi G(N/M).$$

Fassen wir in (3. 3) alle Glieder zusammen, für die $\delta \in \xi G(N/M)$ mit einem festen $\xi \in I$ gilt, so erhalten wir

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} \sum_{\omega \in G(N/M)} f(\overline{\xi\omega})\, \xi\omega(\Gamma_N).$$

Wegen (3. 1) und $M \subset N$ gilt $f(\overline{\xi\omega}) = f(\bar{\xi})$ für $\xi \in I$ und $\omega \in G(N/M)$. Also kommt

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} f(\bar{\xi})\,\xi\Big(\sum_{\omega \in G(N/M)} \omega(\Gamma_N)\Big) =$$

$$= \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} [f(\bar{\xi}) \cdot (N/M)\, \xi\sigma_{N/M}(\Gamma_N)] = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\xi \in I} f(\bar{\xi})\, \xi(\Gamma_M).$$

---

2) Das Symbol $\gamma|M$ bezeichnet die auf M beschränkte Funktion γ, d. h. eine Funktion, die auf M mit γ übereinstimmt und außerhalb von M nicht definiert ist.

Jedes $\gamma \in G(M/K)$ läßt sich zu einem und nur einem $\xi \in I$ erweitern und sowohl $f(\xi)$ als auch $\xi(\Gamma_M)$ hängen nur von $\xi|M$ ab. Aus der zuletzt gegebenen Gleichung folgt also $T(f) = T'(f)$. In dieser Gleichung kann man nun M überall durch M_1 ersetzen und kommt so zu der gewünschten Unabhängigkeit von $T(f)$ von M.

Jedes $b \in M$ hat die Gestalt $\frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} a_\gamma \gamma(\Gamma_M)$, wo $a_\gamma \in K$. Setzt man $f(\xi) = a_{\xi|M}$, so erhält man eine Funktion, die auf $G(L/K)$ definiert ist und die Formeln (3. 1) sowie auch $T(f) = b$ erfüllt. Also bildet T den Modul $\mathfrak{M}$ auf ganz L linear ab und diese Abbildung ist eineindeutig, da aus $T(f) = 0$ folgt $f(\bar{\gamma}) = 0$ für $\gamma \in G(M/K)$, also wegen (3. 1) $f = 0$. Um den Satz zu beweisen, brauchen wir also noch die Gleichung $TD = \Delta T$ zu beweisen.

Es sei also $f \in \mathfrak{M}$, $\xi \in G(L/K)$ und es sei M ein Körper, der (3. 1) für die Funktion f erfüllt. M erfüllt dann (3. 1) auch für die Funktion $D_\xi f$, da aus $\gamma_1|M = \gamma_2|M$ offenbar $(\xi^{-1}\gamma_1)|M = (\xi^{-1}\gamma_2)|M$ und folglich $f(\xi^{-1}\gamma_1) = f(\xi^{-1}\gamma_2)$, d. h. $D_\xi f(\gamma_1) = D_\xi f(\gamma_2)$ folgt. Also ist

$$TD_\xi(f) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} D_\xi f(\bar{\gamma}) \gamma(\Gamma_M) =$$

$$= \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\xi^{-1}\bar{\gamma}) \gamma(\Gamma_M) = \frac{1}{(M/K)} \xi_1 \left(\sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\xi^{-1}\bar{\gamma}) \xi_1^{-1} \gamma(\Gamma_M) \right),$$

wo $\xi_1 = \xi|M$ gesetzt ist. Bezeichnen wir mit δ das Element $\xi_1^{-1}\gamma$, so läuft δ zusammen mit γ über ganz $G(M/K)$. Da $\xi^{-1}\bar{\gamma}$ eine Erweiterung von δ auf $G(L/K)$ ist, können wir $\xi^{-1}\bar{\gamma} = \bar{\delta}$ setzen. Auf diese Weise erhalten wir $TD_\xi(f) = \xi_1 T(f) = \Delta_\xi(Tf)$, w. z. b. w.

4. Der Modul $\mathfrak{M}$ kann in einen Ring umgewandelt werden, indem man den Mittelwert von f als

(4. 1) $$S(f) = S_\xi f(\xi) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\bar{\gamma})$$

definiert und die Multiplikation $f \times g = h$ durch die Formel

(4. 2) $$h(\alpha) = S_\xi f(\xi) g(\xi^{-1}\alpha)$$

erklärt. M bedeutet dabei einen Körper, der die Bedingung (3. 1) für die Funktion f erfüllt. Man zeigt leicht (ähnlich wie im § 3), daß (4. 1) von der Wahl von M nicht abhängt. Der von Deuring[3]) festgestellte Zusammenhang zwischen den Körpern L' mit $K \subset L' \subset L$ und rechtsseitigen Idealen von $\mathfrak{M}$ besteht auch im unendlichen Fall. Denn ist L' ein Zwischenkörper, so setzen wir

$$\mathfrak{P} = \text{Menge aller } f \in \mathfrak{M}, \text{ für welche } \gamma \in G(L/L') \Longrightarrow D_\gamma f = f.$$

---

[3]) M. Deuring, a. a. O., Satz 2, S. 142.

$\mathfrak{P}$ ist natürlich ein Modul. Die Idealeigenschaft von $\mathfrak{P}$ ergibt sich wie folgt: Ist $f \in \mathfrak{P}$, $g \in \mathfrak{M}$, $\gamma \in G(L/L')$ und $h = f \times g$, so haben wir nach (4. 1) und (4. 2)

$$D_\gamma h(\alpha) = h(\gamma^{-1}\alpha) = S_\xi f(\xi) g(\xi^{-1}\gamma^{-1}\alpha) = S_\eta f(\gamma^{-1}\eta) g(\eta^{-1}\alpha) =$$
$$S_\eta f(\eta) g(\eta^{-1}\alpha) = h(\alpha),$$

wobei wir die Gleichungen $S_\xi f(\xi) = S_\eta f(\xi\eta)$ und $D_\gamma f = f$ benutzt haben. $\mathfrak{P}$ ist gleich der Menge aller f für welche $T(f) \in L'$, denn

$$(4.3) \qquad [T(f) \in L'] \Longleftrightarrow [\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow \gamma T(f) = T(f)] \Longleftrightarrow$$
$$[\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow TD_\gamma(f) = T(f)] \Longleftrightarrow [\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow D_\gamma(f) = f] \Longleftrightarrow f \in \mathfrak{P}.$$

Auf diese Weise ist jedem Zwischenkörper ein Rechtsideal eineindeutig zugeordnet. Ist umgekehrt $\mathfrak{P}$ ein Rechtsideal, so bezeichnen wir mit G die Gruppe der γ, für welche $f \in \mathfrak{P} \Longrightarrow D_\gamma(f) = f$. Diese Gruppe ist im Raume $G(L/K)$ abgeschlossen. Denn ist $D_\gamma f(\xi_0) \neq f(\xi_0)$, d. h. $f(\gamma^{-1}\xi_0) \neq f(\xi_0)$, und erfüllt M die Bedingung (3. 1), so folgt aus $\gamma|M = \gamma_0|M$, daß $f(\gamma^{-1}\xi_0) = f(\gamma_0^{-1}\xi_0)$ also $D_{\gamma_0} f \neq f$. Die Gruppe G bestimmt also einen Körper L', für welchen die Formel $G(L/L') = G$ gilt. Aus (4. 3) folgt nun, daß $\mathfrak{P}$ das durch T vermittelte Bild von L' ist.

Wir bemerken zum Schluß, daß, genau so wie im endlichen Fall[4]), die Darstellung D beschränkt auf $\mathfrak{P}$ (d. i. die Darstellung $D|\mathfrak{P}$) äquivalent der durch die identische Darstellung von $G(L/L')$ induzierten Darstellung von $G(L/K)$ ist. Der Beweis folgt sofort aus der Definition der induzierten Darstellung.[5])

(Eingengangen am 19. Juni 1955.)

[4]) M. Deuring, a. a. O., Satz 2, S. 142.

[5]) Vgl. G. W. Mackey, On induced representations of groups, *American Journal of Math.*, 73 (1951), 576.

Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn.

By G. FODOR in Szeged.

ALEXANDROFF and URYSOHN [1] proved the following theorem. If to every ordinal number α of the second class there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$, then there exists a non-denumerable set of ordinal numbers α of the second class such that the corresponding $\mu(\alpha)$ are all equal. BEN DUSHNIK [2] proved the following more general result. If to every ordinal number $\alpha < \omega_{\nu+1}$ there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$, then there exists an ordinal number β such that the equation $\mu(\alpha) = \beta$ has $\aleph_{\nu+1}$ solutions. ERDŐS [3] proved that the following generalisation holds. If ω_ν is not confinal to ω and to every ordinal number $\alpha < \omega_\nu$ there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$, then there exists an ordinal number $\beta < \omega_\nu$ and a subset N of $W(\omega_\nu) = \{\alpha : \alpha < \omega_\nu\}$ such that N is confinal to $W(\omega_\nu)$ and $\mu(\alpha) \leqq \beta$ for every $\alpha \in N$. NOVÁK [4] proved the following theorem. If M is a closed subset of the type ω_1 of $W(\omega_1)$ and to every element $\alpha \in M$ there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$, then there exists a non-denumerable set of ordinal numbers $\alpha \in M$ such that the corresponding $\mu(\alpha)$ are all equal. NEUMER [5] proved the following more general result. Let $\Lambda > \omega$ be a regular ordinal number of the second kind and M a subset of $W(\Lambda)$. If $W(\Lambda) - M$ does not contain a closed subset similar to $W(\Lambda)$ and to every element $\alpha \in M$ there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$ then there exists a set of ordinal numbers $\alpha \in M$ similar to $W(\Lambda)$ such that the corresponding $\mu(\alpha)$ are all equal.

In the present paper we shall prove by a modification of the method of DUSHNIK and NOVÁK a theorem which contains all the preceding theorems.

Theorem. *Let Λ be an ordinal number of the second kind which is not confinal to ω and M a subset of $W(\Lambda) = \{\alpha : \alpha < \Lambda\}$. Suppose that to every element $\alpha \in M$ there corresponds an ordinal number $f(\alpha)$ such that $f(\alpha) < \alpha$. If $W(\Lambda) - M$ does not contain a closed subset confinal to $W(\Lambda)$*[1]*, then there exists an ordinal number $\pi < \Lambda$ and a subset N of M such that N is confinal to $W(\Lambda)$ and $f(\alpha) \leqq \pi$ for every $\alpha \in N$.*

---

[1]) A subset R of $W(\Lambda)$ is called closed if the limit of any fundamental sequence of elements of R belongs to R whenewer this limit is smaller than Λ. We call a subset S of $W(\Lambda)$ confinal to $W(\Lambda)$ if for every $\nu \in W(\Lambda)$ there is a $\mu \in S$ such that $\mu > \nu$.

Proof. Put $D=\{f(\alpha)\}_{\alpha\in M}\cap(W(\Lambda)-M)$. We shall consider two cases:

1) the set D is not confinal to $W(\Lambda)$,

2) the set D is confinal to $W(\Lambda)$.

Ad 1): Since $f(\alpha)<\alpha$ for $\alpha\in M$, to every element $\alpha\in M$ there corresponds a natural number $n(\alpha)$ such that

$$f_{(\alpha)}^{(n(\alpha))}\in D.^{2)}$$

Let Φ be the smallest μ for which Λ is confinal to μ, and M' a subset of the type Φ of M confinal to $W(\Lambda)$. As Λ is not confinal to ω, therefore there exists a natural number m and a subset $\{\gamma_\eta\}$ of M' such that

$$\overline{\overline{\{\gamma_\eta\}}}=\overline{\Phi} \text{ and } f_{(\gamma_\eta)}^{(m)}\in D.$$

It is obvious that $\{\gamma_\eta\}$ is confinal to $W(\Lambda)$. Consider now the sequence

$$f_{(\gamma_0)}^{(m)},\ f_{(\gamma_1)}^{(m)},\ f_{(\gamma_2)}^{(m)},\ \ldots.$$

By the condition D is not confinal to $W(\Lambda)$. The set $\{f_{(\gamma_\eta)}^{(m)}\}$ is not confinal to $W(\Lambda)$, because $\{f_{(\gamma_\eta)}^{(m)}\}\subseteqq D$. It follows that there exists a smallest natural number $m_0\leqq m$ such that the set $\{f_{(\gamma_\eta)}^{(m_0)}\}$ is not confinal to $W(\Lambda)$. Let $N=\{f_{(\gamma_\eta)}^{(m_0-1)}\}$ and π the smallest ordinal numbers β for which $\beta>f_{(\gamma_\eta)}^{(m_0)}$, for every $\eta<\Phi$.

Ad 2). Suppose that the theorem is false. Then to every $\alpha\in M$ there exists an ordinal number $\varphi(\alpha)<\Lambda$ such that for $\alpha'\geqq\varphi(\alpha)$, $f(\alpha')>\alpha$. Let now M' be the set of those $\alpha\in M$, for which $f(\alpha)\notin M$. Since D is confinal to $W(\Lambda)$ and $f(\alpha)<\alpha$ for every $\alpha\in M$, therefore the set M' is confinal to $W(\Lambda)$. We define by transfinite induction a set $\{\alpha_\eta\}$ of elements $\alpha\in M'$, arranged in their natural order, in the following manner. Let $\alpha_0(\geqq 1)$ be an arbitrary element of M' and suppose that the elements $\alpha_\eta\in M'$ are defined for every $\eta<\beta(<\Lambda)$ such that

$$f(\alpha_\eta)>\alpha_\varkappa$$

for every $\varkappa<\eta$. If there is an ordinal number $\alpha\in M$ such that $\alpha_\eta<\alpha$ for every $\eta<\beta$, then let α' be the smallest such ordinal number, if β is an ordinal number of second kind and let $\alpha'=\alpha_\nu$ if $\beta=\nu+1$. We define α_β as the smallest $\alpha\in M'$ for which $\alpha\geqq\varphi(\alpha')$. In the opposite case we do not define α_β. By the definition the set $\{\alpha_\eta\}$ is confinal to $W(\Lambda)$.

Since $W(\Lambda)-M$ does not contain any closed subset confinal to $W(\Lambda)$, there exists an ordinal number of the second kind $\varkappa$ and a fundamental subsequence $\{\alpha_{\eta_\xi}\}_{\xi<\varkappa}$ of type $\varkappa$ of $\{\alpha_\eta\}$ such that

$$\lim_{\xi<\varkappa} f(\alpha_{\eta_\xi})\in M.$$

---

2) If $f_{(\alpha)}^{(n-1)}\in M$, then $f_{(\alpha)}^{(n)}$ is the ordinal number corresponding to $f_{(\alpha)}^{(n-1)}$.

Put $\alpha^* = \lim\limits_{\xi<\varkappa} f(\alpha_{\eta_\xi})$. It is obvious that

$$\alpha^* = \lim_{\xi<\varkappa} \alpha_{\eta_\xi}$$

since by the definition of $\{\alpha_\eta\}$

$$\alpha_0 < f(\alpha_1) < \alpha_1 < f(\alpha_2) < \alpha_2, \ldots .$$

Since $f(\alpha^*) < \alpha^*$, there exists an ordinal number ξ_0 such that

$$f(\alpha^*) < \alpha_{\eta_{\xi_0}}.$$

This is impossible, since $\alpha^* > \alpha_{\eta_{\xi_0}+1} \geqq \varphi(\alpha_{\eta_{\xi_0}})$ and by the definition $f(\alpha^*) > \alpha_{\eta_{\xi_0}}$. The theorem is proved.

Remark. The theorem can not be improved by weakening the assumption that $W(\Lambda) - M$ does not contain a closed subset confinal to $W(\Lambda)$. (See the proof of theorem 4 of [5].)

Added in proof. Bachmann [6] proved the following theorem. Let Λ be an ordinal number of the second kind which is not confinal to ω and M a closed subset of $W(\Lambda)$ similar to $W(\Lambda)$. If to every $\alpha \in M$ there corresponds an ordinal number $\mu(\alpha)$ such that $\mu(\alpha) < \alpha$, then there exists an ordinal number $\beta < \Lambda$ and a set N of ordinal number $\alpha \in M$ such that N is confinal to $W(\Lambda)$ and $\mu(\alpha) \leqq \beta$, for every $\alpha \in N$. (This is contained in our theorem. See the theorem 2 of § 7 and theorem 3 of § 9 in [6].)

References.

[1] P. S. Alexandroff—P. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wiss. Amsterdam*, (1) **45**, Nr. **1**, 1—96.

[2] Ben Dushnik, A note on transfinite ordinals, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 860—862.

[3] P. Erdős, Some remarks on set theory, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 127—141.

[4] J. Novák, A paradoxical theorem, *Fundamenta Math.*, **37** (1950), 77—83.

[5] W. Neumer, Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschrift*, **54** (1951), 254—261.

[6] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen* (Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft **1**, Berlin—Heidelberg—Göttingen, 1955), S. 43.

(Received March 15, 1955.)

On primitive permutation groups.

By NOBORU ITÔ in Nagoya (Japan).

1. Let G be a (not necessarily finite) group. Let U be a subgroup of G such that the largest normal subgroup $\underline{U}$ of G contained in U is equal to the identity subgroup. Then G is faithfully represented as a group of permutations of the left (or right) residue classes by U in G. In these circumstances we call a pair $\{G, U\}$ *a permutation group.*

A permutation group $\{G, U\}$ is called *primitive,* when U is a maximal subgroup of G, and further $\{G, U\}$ is called *simply transitive,* when there exists no element g of G such that $G = U + UgU$. A permutation group, which is not simply transitive, is called *doubly transitive.*

A doubly transitive permutation group $\{G, U\}$ is primitive. In fact, let U be not maximal in G and let T be a proper subgroup of G containing U properly. Then T and TgT cannot be disjoint with each other and therefore $T = TgT$. This shows that $T = G$, which is a contradiction.

Let $\{G, U\}$ be doubly transitive: $G = U + UgU$. Put $V = U \cap gUg^{-1}$. Then *the pair $\{U, V\}$ is a permutation group.* In fact, let $\underline{V}$ be the largest normal subgroup of U contained in V. Now any element of G not contained in U has the form $u_1 g u_2$, where u_1 and u_2 are elements of U. Therefore since $u_1 g u_2 U u_2^{-1} g^{-1} u_1^{-1} = u_1 g U g^{-1} u_1^{-1}$, any conjugate subgroup $\neq U$ of U is of the form $ugUg^{-1}u^{-1}$. Therefore $\underline{V}$ is contained in any conjugate subgroup of U and consequently $\underline{V} \subseteq \underline{U} = 1$.

Let $\{G, U\}$ be a permutation group and let A be a subgroup of G such that $G = UA$. Then we call A *a transitive subgroup.* If A is abelian, then necessarily $A \cap U = 1$. In fact, since $G = UA$, any conjugate subgroup of U is of the form aUa^{-1}, where a is an element of A. And since A is abelian, $A \cap U$ is contained in the intersection $\underline{U}$ of all the conjugate subgroups of U. Therefore $A \cap U \subseteq \underline{U} = 1$.

R e m a r k. Let $\{G, U\}$ be a primitive permutation group. Then we omit the case $U = 1$ from our considerations. In that case G is of prime order. Now if A is of order 2, then U is normal in G, and therefore $U = \underline{U} = 1$.

2. From now on we assume that *the order of G is finite.* Now the structure of primitive permutation groups is very complicated, because most primitive permutation groups are insoluble and we know less, at present, of the structure of such groups. Such a complicacy does not diminish even if we restrict our considerations to such primitive permutation groups that contain abelian transitive subgroups. Let $\{G, U\}$ be a primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A. Now, in 1900, BURNSIDE [1] proved the following celebrated theorem: If A is of prime order, then either G is metacyclic or $\{G, U\}$ is doubly transitive. This result has been generalized by BURNSIDE, SCHUR and WIELANDT. The best is due to WIELANDT [1]: If at least one Sylow subgroup $\neq 1$ of A is cyclic and A is not of prime order, then $\{G, U\}$ is doubly transitive. Further KOCHENDÖRFFER [1] and D. MANNING [1] obtained (at about the same time and by quite different methods) the following result: If A is of type (p^a, p^b), where p is a prime and a and b are distinct natural numbers, then $\{G, U\}$ is doubly transitive. Now the results of these authors show: If there exists a primitive permutation group $\{G, U\}$ containing an abelian transitive subgroup A of a suitable type, then such a $\{G, U\}$ must be necessarily doubly transitive. Therefore the following question may be natural: To what type of an abelian group A', does there exist a primitive permutation group $\{G, U\}$ containing an abelian transitive subgroup A isomorphic to A'? In this direction RITT [1] proved the following theorem: If A' is cyclic of not prime order and if there exists a soluble primitive permutation group $\{G, U\}$ containing an abelian transitive subgroup A isomorphic to A', then A' must be of order 4. Further in this case actually there exists one and only one permutation group of this kind, that is, the symmetric group $\mathfrak{S}_4 = \{G, U\}$ of degree 4, where, for instance, $U = \{(123), (12)\}$ and $A = \{(1234)\}$.

The present paper is a contribution in the same direction. Thereby the result of RITT is not assumed but proved as a special case of our results. Now in our considerations the solubility of the group G is not assumed. (In fact, if we assume solubility, the contents may be vacant in essential except the result of RITT.) But to avoid the occurence of incomputably deep difficulties we assume, a priori, the following condition on G:

(S) *G contains an abelian normal subgroup $N \neq 1$.*

Now since U is maximal in G and since $\underline{U} = 1$, we have $G = U \cdot N$. Therefore, as we remarked above, we have $U \cap N = 1$. These two equalities show us that N is the only one abelian normal subgroup $\neq 1$ of G. In fact, we have two equalities $G = UM$ and $U \cap M = 1$ for every abelian normal subgroup $M (\neq 1)$ of G. Then every abelian normal subgroup $\neq 1$ of G is minimal. To see this, let M and M' be two abelian normal subgroups $\neq 1$ of G such that M contains M' properly. Then we have from the first equality the following factorization of M: $M = M \cap U \cdot M'$. Then since $M \neq M'$, $M \cap U \neq 1$. This contradicts the second equality. Now if there exist two distinct abelian minimal normal subgroups of G, then their join, as the direct product of them, is not a minimal one. This is a contradiction. In particular, N is of type $(p, \ldots, p)$, where p is a prime. Let A be any abelian transitive subgroup of $\{G, U\}$. Then $G = UA$ and $U \cap A = 1$. Therefore the orders of N and A are the same.

3. Let A' be an abelian group of order p^n and of type $(p, \ldots, p) \neq (2)$. We verify the existence of primitive permutation groups with abelian transitive subgroups isomorphic to A'. This may be done without much difficulty. In fact, let U be an irreducible matric group with coefficients in the prime field of characteristic p and let A be its representation module. Let G be the splitting extension of A by U in the sense of Schreier. (This can be constructed as a subgroup of the holomorph of A.) Then the permutation group $\{G, U\}$ is a required one. In fact, $\underline{U} = 1$, because an element of $\underline{U}$ must be commutative with all the elements of A and therefore it must be a unit matrix, and further U is maximal in G, because, otherwise, U must be reducible.

Example 1. U may be the general linear group $GL(n, p)$.

Example 2. We can choose U as a soluble group. In fact, $GL(n, p)$ contains an irreducible cyclic subgroup $Z = \{X\}$ of order $p^n - 1$. To see this let us consider a generator X of the multiplicative group of the finite field of p^n elements. Since the finite field of p^n elements may be considered as the n-dimensional vector space over the prime field, X satisfies an irreducible equation of degree n over the prime field: $X^n - c_1 X^{n-1} - \cdots - c_n = 0$, where c's are elements of the prime field. Then the matrix $X = \begin{pmatrix} c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n \\ E \quad\quad 0 \end{pmatrix}$, where E is the unit matrix of degree $n-1$ and 0 is the null matrix of type $(n-1, 1)$, is of order $p^n - 1$ and of degree n. Further all the characteristic roots of X are algebraically conjugate, because of the irreducibility of the equation. Now if $Z = \{X\}$ is reducible, then some power of $X \neq 1$ possesses the characteristic value 1. Therefore $Z = \{X\}$ must be irreducible.

4. Let A' be an abelian group which is not of type $(p, \ldots, p)$. Then, as it can be understood from the result of RITT cited above, we have not always a primitive permutation group satisfying the condition (S) with an abelian transitive subgroup isomorphic to A'.

Now let $\{G, U\}$ be a primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A isomorphic to A'. Then G admits the following factorization: $G = UA$ and $U \cap A = 1$. Further by the assumption (S) G also admits the following factorization: $G = UN$ and $U \cap N = 1$, where N is the only one abelian normal subgroup of G. Put $P = AN$. Then P admits the factorizations $P = U_p A$, $U_p \cap A = 1$ where U_p is an abelian p-subgroup of U and also, since $U \cap N = 1$ and A and N are of the same order, $P = U_p N$, $U_p \cap N = 1$. Clearly the centralizers of A and N in P coincide with A and

N themselves respectively. Now a p-group with such a factorization cannot be too simple in its structure. In fact, we prove the following

Lemma 1. *Let P be a p-group and let P admit the following factorizations: $P=NA$ and $P=UA$, $U\cap A=1$ and $P=UN$, $U\cap N=1$, where A is abelian, not of type $(p,\dots,p)$, N is abelian of type $(p,\dots,p)$, normal and coincides with its own centralizer, and U is abelian. Then we have*

(i) *P is irregular in the sense of Hall,*

(ii) *Let p^w be the order of the subgroup of A consisting of all the elements of A with order not greater than p. Then $w\geqq p-1$.*

Remark. Under this condition the centralizer of A necessarily coincides with A. In fact, otherwise, since $P=AU$, there exists an element $u_0(\neq 1)$ such that u_0 is commutative with every element of A. Now since $N\subseteqq AU$, every element of N can be written in the form of a product au, where a and u belong to A and U respectively. Therefore, since U is abelian, u_0 is commutative with every element of N.

Proof. We prove these assertions by an induction argument with respect to the order of P.

(i) Let Z_1 and Z_2 be the centre and the second centre of P. Put $U_2=U\cap Z_2$. Let us consider the subgroup U_2Z_1. Naturally U_2Z_1 is normal in P. Let us consider the factor group P/U_2Z_1 and its factorizations: $P/U_2Z_1=U\cdot U_2Z_1/U_2Z_1\cdot N\cdot U_2Z_1/U_2Z_1$ and $P/U_2Z_1=U\cdot U_2Z_1/U_2Z_1\cdot AU_2Z_1/U_2Z_1$. We show that P/U_2Z_1 satisfies the same conditions as P except the fact that AU_2Z_1/U_2Z_1 is not of type $(p,\dots,p)$. First it is clear that $U\cdot U_2Z_1=UZ_1$, $N\cdot U_2Z_1=U_2N$, $A\cdot U_2Z_1=U_2A$ and therefore $UU_2Z_1\cap NU_2Z_1=U_2Z_1$, $AU_2Z_1\cap UU_2Z_1=U_2Z_1$. Secondly if $N\cdot U_2Z_1/U_2Z_1$ is distinct from its own centralizer, then there exists an element x of $U-U_2$ such that $[x,N]\subseteqq U_2Z_1$. Since N is normal, $[x,N]\subseteqq N$ and therefore $[x,N]\subseteqq U_2Z_1\cap N=Z_1$ and further since U is abelian, we see that x belongs to Z_2. Thus x belongs to U_2, which is a contradiction.

Now if AU_2Z_1/U_2Z_1 is not of type $(p,\dots,p)$, then, by the induction hypothesis, we see that P/U_2Z_1 is irregular in the sense of Hall. Then, a fortiori, by the definition of regularity of Hall, P is irregular in the sense of Hall, too. So we may assume that AU_2Z_1/U_2Z_1 is of type $(p,\dots,p)$. Now, since $A\cap U_2Z_1=Z_1$, by the second isomorphism theorem, $AU_2Z_1/U_2Z_1\cong A/Z_1$. Further, since $A\cap N=Z_1$, $U\cong A/Z_1$. Therefore U is of type $(p,\dots,p)$. Hence P can be generated by elements of order p. Therefore if P is regular in the sense of Hall, then, by a theorem of Hall, P must be of exponent p, that is, all the elements of P except 1 are of order p, which contradicts the assumption on A. Thus P must be irregular in the sense of Hall [Hall, 1].

(ii) Let us assume $w < p-1$. Then we want to derive a contradiction from this assumption. Now, let C be a central subgroup of order p. We shall denote the subgroup of P which consists of the centre of P/C by $Z_1(P \div C)$ and let $Z_1(P \div C)/C$ be the centre of P/C. Put $U_1 = U \cap Z_1(P \div C)$. Naturally $U_1 C$ is normal in P. Let us consider the factor group $P/U_1 C$ and its factorizations: $P/U_1 C = UC/U_1 C \cdot NU_1/U_1 C = UC/U_1 C \cdot AU_1/U_1 C$. We show that $UC \cap NU_1 = U_1 C$, $UC \cap AU_1 = U_1 C$ and the centralizer of $NU_1/U_1 C$ coincides with $NU_1/U_1 C$. Since $P = NU = AU$, $N \cap U = 1$, $A \cap U = 1$, the former is evident. If the centralizer of $NU_1/U_1 C$ is distinct from $NU_1/U_1 C$, then since $P = NU$, $N \cap U = 1$, there exists an element x of $U - U_1$ such that $[x, N] \subseteq U_1 C$, which implies, since N is normal, $[x, N] \subseteq U_1 C \cap N = C$. Since U is abelian, x belongs to $Z_1(P \div C)$ and therefore to $Z_1(P \div C) \cap U = U_1$. This is a contradiction. If $AU_1/U_1 C$ is not of type $(p, \ldots, p)$, then by induction hypothesis, we see that the order of the subgroup of $AU_1/U_1 C \cong A/C$ consisting of all the elements of order not greater than p is not smaller than p^{p-1}. Then, a fortiori, by the fundamental theorem of abelian groups, the same holds for A itself, which is a contradiction. So we may assume that in the opposite case $AU_1/U_1 C \cong A/C$ is of type $(p, \ldots, p)$. Therefore since $U \cong A/A \cap N$ and $A \cap N = Z_1 \supset C$, we see that U is of type $(p, \ldots, p)$. Further A is of order not greater than p^{p-1} and of type $(p^2, p, \ldots, p)$. Let a be an element of A with order p^2. Let us consider the subgroup $\{a\}N$ and put $\{a\}N = V \cdot N$, where V is a subgroup of U. Since a^p is contained in $C \subseteq N$, the order of $\{a\}N$ is at most p^p. Thus, by a theorem of Hall, $\{a\}N$ is regular in the sense of Hall. On the other hand, $V \cdot N$ can be generated by elements of order p. Then, by a theorem of Hall, all the elements of $V \cdot N$ are of order at most p (HALL [1]). This contradicts the fact that the order of a is p^2. Hence the order of the subgroup of A consisting of all the elements of A with order at most p is not smaller than p^{p-1}.

Remark. The proof of (i) holds also good, if we replace Z_1 in that proof by C as in this proof.

Now we can generalize the second part of the preceding lemma as follows.

Lemma 2. *In the same notations as in the preceding lemma, if* $w < \dfrac{p^m - 1}{m}$ *then* p^{m+1} *cannot occur as an invariant number of the abelian group* A. (The case $m = 1$ coincides with the second part of the preceding lemma. Therefore, in the following, we assume $m \geqq 2$.)

Proof. (1) Let $P(n, p)$ be a p-Sylow subgroup of the n-dimensional general linear group over the prime field of characteristic p. Further let us assume $n \leqq p^m$. Then we show that the order of any element of $P(n, p)$ is not greater than p^m. In fact, as is well known (SCHREIER [1]) $P(n, p)$ is isomorphic to the matric group consisting of all the matrices of degree n and of the form $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Let X be any matrix of such a form. Put $X=E+Y$, where E is the unit matrix of degree n. Then $X^{p^e}=E+Y^{p^e}$ for $e=1,2,\ldots$. Further clearly

$$Y^r=\begin{pmatrix} \overbrace{0\cdots0}^{r} & & * \\ & \ddots & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Therefore if $n\leqq p^m$, then $Y^{p^m}=0$. This proves $X^{p^m}=E$.

(2) Let V_n be an n-dimensional vector space over the prime field of characteristic p. We may consider $P(n,p)$ as an automorphism group of V_n. Let P_n be the extension of V_n by $P(n,p)$ as a subgroup of the holomorph of V_n. Assume $n<p^m$. Then we show that the order of any element of P_n is not greater than p^m. In fact, let $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ be any vector of V_n. Then any element of P_n can be represented as a product (in P_n) Xx for some $X\in P(n,p)$ and some $x\in V_n$, where $XxX^{-1}=X\circ x$. ($\circ$ denotes the ordinary matrix multiplication.) We want to show $(Xx)^{p^m}=1$. Now $(Xx)^{p^m}=$ $=XxX^{-1}\cdot X^2xX^{-2}\ldots X^{p^m-1}xX^{-(p^m-1)}\cdot X^{p^m}xX^{-p^m}$, since $X^{p^m}=1$. Therefore to show $(Xx)^{p^m}=1$ we have only to prove that $(E+X+\cdots+X^{p^m-1})\circ x=0$, where 0 is the null vector. Now $E+X+\cdots+X^{p^m-1}=0$, where 0 is the null matrix of degree n. In fact, put $X=E+Y$. Then

$$\begin{aligned} E+X+\cdots+X^{p^m-1}&=E+(E+Y)+\cdots+(E+Y)^r+\cdots+(E+Y)^{p^m-1}= \\ &=p^mE+\left\{\binom{1}{1}+\cdots+\binom{r}{1}+\cdots+\binom{p^m-1}{1}\right\}Y+ \\ &\quad+\left\{\binom{2}{2}+\cdots+\binom{r}{2}+\cdots+\binom{p^m-1}{2}\right\}Y^2+ \\ &\quad+\cdots+\binom{p^m-1}{p^m-1}Y^{p^m-1}. \end{aligned}$$

Here since $m>1$ $\binom{i}{i}+\cdots+\binom{r}{i}+\cdots+\binom{p^m-1}{i}=\binom{p^m}{i+1}\equiv0 \pmod p$ for $i<p^m-1$. Further by assumption $Y^{p^m-1}=0$. This proves $E+X+\cdots$ $\cdots+X^{p^m-1}=0$. Therefore $(Xx)^{p^m}=1$, as we required.

(3) Now we repeat in the same notations the proof (by induction on the order of the group) of the second part of the preceding lemma. We assume that p^{m+1} occurs as an invariant number of the type of A. If p^{m+1} occurs also as an invariant number of the type of $AU_1/U_1C \cong A/C$, then, by induction hypothesis, the order of the subgroup of A/C consisting of all the elements of order not greater than p is not smaller than $\frac{p^m-1}{m}$. Then, a fortiori, by the fundamental theorem of abelian groups, the same holds for A itself, which contradicts the assumption $w < \frac{p^m-1}{m}$. So we may assume that p^{m+1} does not occur as an invariant number of the type of A/C. Then, since $w < \frac{p^m-1}{m}$, A/C is a subgroup of an abelian group of order $p^{m\left(\frac{p^m-1}{m}-1\right)}$ and of type $(p^m, \dots, p^m)$ and, therefore, the order of A is at most equal to $p^{m\left(\frac{p^m-1}{m}-1\right)+1} = p^{p^m-m}$. The same holds for N. Now the group P can be considered as a subgroup of P_n for $n \leqq p^m - m$. Therefore any element of P possesses the order at most equal to p^m, as we saw in (2). This contradiction proves our assertion completely.

Remark. The bound $\frac{p^m-1}{m}$ may not be the best possible one. But, at any rate, the result of Ritt cited above is a special case of our lemmas.

5. In this section we construct an example of a primitive permutation group $\{G, U\}$ with an abelian transitive subgroup A not of type $(p, \dots, p)$. In fact, we choose the p-dimensional general linear group $GL(p, p)$ over the prime field of characteristic p as a U, the p-dimensional vector space V_p over the prime field of characteristic p as an N and the splitting Schreier extension of N by U as a subgroup of the holomorph of N as a G. Naturally since U is irreducible for N and clearly U does not contain a normal subgroup $\neq 1$ of G, $\{G, U\}$ actually defines a primitive permutation group. Therefore we have only to verify the existence of an abelian transitive subgroup A not of type $(p, \dots, p)$. To do this, first put $B_r = E + \sum_{i+r-1<j} e_{ij}$ for $r = 1, 2, \dots, p-1$, where E is the unit matrix of degree p and e_{ij}'s are the matrix units:

$$e_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\!\!\begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \cdots\ 1\ \cdots \\ \vdots \end{array}\right) \end{array} \qquad (i, j = 1, \dots, p).$$

First we prove that $\{B_1, B_2, \dots, B_{p-1}\}$ is abelian of order p^{p-1} and of type $(p, \dots, p)$. In fact, put $B_r = E + W_r$. Then $B_r B_s = E + W_r + W_s +$

$$+W_rW_s,\quad \text{where}\quad W_rW_s=\begin{array}{c}\scriptstyle r+s+1\\ \begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & \cdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 2 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}\end{array}.$$ Since the matrix W_rW_s is symmetric for r and s, we have $W_rW_s=W_sW_r$. Therefore $B_rB_s=B_sB_r$. Further $B_r^p=E+W_r^p$. Since clearly $W_r^p=0$, $B_r^p=E$. Last let us assume $B_1^{e_1}\dots B_{p-1}^{e_{p-1}}=E$, where $0\leqq e_i<p$ $(i=1,\dots,p-1)$. Then $(E+W_1)^{e_1}\dots$ $\dots(E+W_{p-1})^{e_{p-1}}=E$ and therefore, $(E+e_1W_1+\cdots)\cdots(E+e_{p-1}W_{p-1}+\cdots)=E$. Now the coefficient of e_{12} in $(E+e_1W_1+\cdots)\cdots(E+e_{p-1}W_{p-1}+\cdots)$ is equal to e_1. Therefore $e_1=0$. Thus $B_2^{e_2}\dots B_{p-1}^{e_{p-1}}=E$. Therefore $(E+e_2W_2+\cdots)\cdots$ $\cdots(E+e_{p-1}W_{p-1}+\cdots)=E$. Now the coefficient of e_{13} in $(E+e_2W_2+\cdots)\cdots$ $\cdots(E+e_{p-1}W_{p-1}+\cdots)$ is equal to e_2. Therefore $e_2=0$. Similarly $e_3=\cdots=e_{p-1}=0$. Thus $B_1,\dots,B_{p-1}$ are linearly independent.

Secondly put $x_r=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\\ \\ \\ r\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$ for $r=1,2,\dots,p$, and put $A_r=x_rB_r$ (this is a product in G!) for $r=1,2,\dots,p-1$. We prove that $\{A_1,A_2,\dots,A_{p-1}\}$ is abelian of order p^p and of type $(p^2,p,\dots,p)$. Now the equation $A_rA_s=A_sA_r$ is equivalent to the equation $x_r+B_r\circ x_s=x_s+B_s\circ x_r$, where $\circ$ denotes the ordinary matrix multiplication. Further the equation $x_r+B_r\circ x_s=x_s+B_s\circ x_r$ is equivalent to the equation $W_r\circ x_s=W_s\circ x_r$. Therefore we show $W_r\circ x_s=W_s\circ x_r$. Now if $s+r>p$, then $W_r\circ x_s=0$. If $s+r+i=p$, where i is a non-negative integer, then $W_r\circ x_s=e_1+\cdots+e_{i+1}$. By symmetry, we have $W_r\circ x_s=W_s\circ x_r$. Now similarly as in the second step of the proof of Lemma 2, we have $A_2^p=\cdots=A_{p-1}^p=E$. Further $A_1^p=(x_1B_1)^p=x_1B_1x_1B_1\cdots$ $\cdots x_1B_1=B_1^{-p}x_1B_1^p\cdot B_1^{-(p-1)}x_1B_1^{p-1}\cdots B_1^{-2}x_1B_1^2\cdot B_1^{-1}xB_1$. Here $(B_1^{p-1}+\cdots+$ $+B_1+E)\circ x_1=x_p$. Therefore $A_1^p=x_p$. Clearly $A_1,\dots,A_{p-1}$ are linearly independent of each other.

Last we prove that $A\cap U=1$. Now since an element belonging to $A\cap U$ must be commutative with $x_1,\dots,x_p$, it must be the identity. This proves the assertion.

Thus A is transitive and not of type $(p,\dots,p)$.

Remark. Such a construction may be executed for every $n\geqq p$.

6. Before proceeding further, we refer to KOCHENDÖRFFER's method of the construction of simply transitive, primitive permutation groups with abelian transitive subgroups, in a little generalized form. (In this section G may be infinite.)

Let $\{G, U\}$ be a primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A. Let $\{G_i, U_i\}$, and A_i $(i=1,2,\ldots,r)$ be the r copies of $\{G, U\}$ and A, where r is a natural number >1. We denote the isomorphism between G and G_i by $g \longleftrightarrow g_i$ $(g \in G,\ g_i \in G_i)$ for each i $(i=1,2,\ldots,r)$. Put $G^* = G_1 \times \cdots \times G_r$ (the direct product of $G_1, G_2, \ldots, G_r$). Let S be the automorphism of G^* such that $g_i^S = g_{i+1}$ $(g_{r+1} = g_1)$. Let G^{**} be the splitting Schreier extension of G^* by S, which can be constructed as a subgroup of the holomorph of G^*. Put $U^{**} = (U_1 \times \cdots \times U_r)\ \{S\}$ and $A^{**} = A_1 \times \cdots \times A_r$. Now we prove that *the pair $\{G^{**}, U^{**}\}$ is a simply transitive, primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A^{**}.*

Clearly $G^{**} = U^{**}A^{**}$ and $U^{**} \cap A^{**} = 1$. Assume $\underline{U}^{**} \neq 1$. Transforming an element of $\underline{U}^{**}$ by an element of $U^* = U_1 \times \cdots \times U_r$, we see $\underline{U}^{**} \cap U^* \neq 1$. Therefore $\underline{U}^{**} \cap G^* \neq 1$. Clearly this is a normal subgroup of G^* contained in U^*. Since $\underline{U}^* = 1$, this is a contradiction. Now we prove the maximality of U^{**} in G^{**}. Since $G^{**} = U^{**}A^{**}$, if U^{**} is not maximal in G^{**}, there exists an element $a \neq 1$ of A^{**} such that $G^{**} \neq \{U^{**}, a\}$. Put $a = a_1 \cdots a_r$, where each a_i belongs to A_i $(i=1,2,\ldots,r)$. Then there exists at least one i, say 1, such that $a_i \neq 1$. Therefore we assume $a_1 \neq 1$. We consider the elements $u_1 a u_1^{-1} = u_1 a_1 u_1^{-1} a_2 \cdots a_r$, where u_1 runs over all the elements of U_1. Since $\{U_1, a_1\} = G_1$, and since $\underline{U}_1 = 1$, there exists an element a_1 such that $u_1 a_1 u_1^{-1} a_1^{-1}$ does not belong to U_1. Then $\{U^{**}, a\}$ contains an element $\neq 1$ of A_1. Therefore $\{U^{**}, a\}$ contains G_1 and coincides with G^{**}. This is a contradiction. Next we prove that $\{G^{**}, U^{**}\}$ is simply transitive. Since $G^{**} = U^{**}A^{**}$, if $\{G^{**}, U^{**}\}$ is doubly transitive, there exists an element $a \neq 1$ of A^{**} such that $G^{**} = U^{**} + U^{**} a U^{**}$. Put $a = a_1 \cdots a_r$, where each a_i belongs to A_i $(i=1,\ldots,r)$. Let $a' \neq 1$ be any element of A^{**}. Put $a' = a_1' \cdots a_r'$, where each a_i' belongs to A_i $(i=1,\ldots,r)$. Let $l(a')$ be the number of i's such that $a_i' \neq 1$ ($l(a')$ is a natural number). Now to prove the inconsistency of the equation $G^{**} = U^{**} + U^{**} a U^{**}$, we have only to show the following: if $U^{**} a U^{**} = U^{**} a' U^{**}$, then $l(a) = l(a')$. Now $U^{**} a U^{**} = U^{**} a' U^{**}$ implies that there exist two elements u and u' of U^{**} such that $ua = a'u'$. Put $u' = u_1 \cdots u_r S^c$, where each u_i' belongs to U_i $(i=1,\ldots,r)$, and put $a' u_1' \cdots u_r' = u_1'' \cdots u_r'' a''$, where each u_i'' belongs to U_i $(i=1,\ldots,r)$ and a'' is an element of A^{**}. Since $M_i A_i = A_i M_i$ and $M_i \cap A_i = 1$ $(i=1,\ldots,r)$, we see immediately that $l(a') = l(a'')$. Put $a'' S^c = S^c a'''$, where a''' is an element of A^{**}. Since S permutes $A_1, A_2, \ldots, A_r$ cyclically, we see immediately that $l(a'') = l(a''')$. Since $U^{**} \cap A^{**} = 1$, we have $a = a'''$. This proves the assertion. Here we refer to the following

C o r o l l a r y. If there exists a primitive permutation group with an abelian transitive subgroup of type $(p_1^{e_{11}}; \ldots, p_n^{e_{nn'}})$, then there exists a simply transitive, primitive permutation group with an abelian transitive subgroup of type $(\underbrace{p_1^{e_{11}} \cdots p_1^{e_{11}}}_{s}, \ldots, \underbrace{p_n^{e_{nn'}} \cdots p_n^{e_{nn'}}}_{s})$ for every $s > 1$.

7. Now we treat the KOCHENDÖRFFER—D. MANNING case satisfying the condition (S). In consequence of Lemmas 1 and 2 only the following four cases are to be considered as the type of the abelian group A: $(4, 2)$, $(8, 2)$, $(9, 3)$ and $(8, 4)$. In this section we take the first three of these types into our consideration.

Existence. For the type $(9, 3)$ we have already constructed an example of such primitive permutation groups in § 5. Now for the types $(4, 2)$ and $(8, 2)$ the same method of construction as in § 5 can be applied. Therefore we have only to tabulate the necessaries with the same notations as in § 5:

Type $(4, 2)$, $U = GL(3, 2)$, $N = V_3$, $G = GL(3, 2)\,V_3$

$$A = \{A_1, A_2\},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_1^2 = A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Type $(8, 2)$. $U = GL(4, 2)$, $N = V_4$, $G = GL(4, 2)\ V_4$

$$A = \{A_1, A_2, A_3\},\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad A_1^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_2^2,\qquad A_2^3 A_3 = A_1^2.$$

Insolubility. We show that: Let $\{G, U\}$ be a primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A of type either $(4, 2)$ or $(8, 2)$ or $(9, 3)$. Then G is insolube. Thereby we do not use the result of KOCHENDÖRFFER and MANNING.

First we supplement the second part of Lemma 1, and Lemma 2 as follows:

Lemma 3. *In the same notations as before, let p^v be the order of the subgroup of U consisting of all the elements of U with order not greater than p. If $v < \dfrac{p^m - 1}{m}$ then p^{m+1} cannot occur as an invariant number of the type of the abelian group A.*

Proof. We repeat in the same notations the proof (by induction on the order of the group) of the second part of Lemma 1. We assume that

p^{m+1} occurs as an invariant number of the type of A. If p^{m+1} occurs as an invariant number of the type of $AU_1/U_1C \cong A/C$ then, by induction hypothesis, the order of the subgroup of $UC/U_1C \cong U/U_1$ consisting of all the elements of order not greater than p is not smaller than $\frac{p^m-1}{m}$. Then a fortiori, by the fundamental theorem of abelian groups, the same holds for U itself, which contradicts the assumption $v < \frac{p^m-1}{m}$. So we may assume that p^{m+1} does not occur as an invariant number of the type of A/C. Then C coincides with the subgroup of A generated by all the p^m-th powers of elements of A. If the centre Z of P is distinct from C, then, since $Z \leqq N$ is of type $(p, \ldots, p)$, Z contains a central subgroup C' of order p different from C. Repeat the same argument by C' in place of C. Then, since p^{m+1} occurs as an invariant number of the type of A/C', we can apply the induction hypothesis and obtain the conceived contradiction. Therefore we may assume that $Z = C$. Now since clearly $U \cong A/Z$ and, by assumption $v < \frac{p^m-1}{m}$, the order of A is at most equal to $p^{m\left(\frac{p^m-1}{m}-1\right)+1} = p^{p^m-m}$. The same holds for N. Now the group P can be considered as a subgroup of P_n for $n \leqq p^m - m$. Therefore any element of P possesses the order at most equal to p^m, as we saw in (2) of the proof of Lemma 2. This contradiction proves our assertion.

Proof of insolubility. First some remarks of general character: (1) Let N be of order p^n. Then we may consider U as a subgroup of $GL(n, p)$. (2) U does not contain a normal p-subgroup $\neq 1$. In fact, let L be a normal p-subgroup of U. Then LN is normal in G. Let N_1 be the centre of LN. If $N_1 \not\subseteqq N$, then U contains a normal subgroup $\neq 1$ of G, which contradicts $\underline{U} = 1$. Therefore $N_1 \subseteqq N$. Since N is minimal normal in G, $N_1 = N$. Then $LN = L \times N$, which implies that L is normal in G, which contradicts $\underline{U} = 1$.

Now we treat each case separately.

Case of type (4, 2). Assume the solubility of U. Then, as it is well known, since $GL(3, 2)$ is simple and not abelian (Dickson [1]), $U \neq GL(3, 2)$. We denote the order of U by (U). At any rate, $(U) | 2^3 \cdot 3 \cdot 7 =$ the order of $GL(3, 2)$. Assume $7 | (U)$ and let U_7 be a 7-Sylow subgroup of U. If U_7 is not normal in U then we see, by Sylow's theorem[1]), $(U) = 2^3 \cdot 7$. Since U does not contain a normal 2-group, U_7 must be normal in U, which is a contradiction. Therefore U_7 is normal in U. Then since $2 | (U)$, we see, by Sylow's theorem, U_7 must be normal in $GL(3, 2)$, which contradicts the simplicity of $GL(3, 2)$. Thus $7 \nmid (U)$, and $(U) | 2^3 \cdot 3$. If $2^2 | (U)$, then U must

[1]) The number of p-Sylow subgroups is congruent to 1 mod p. Cf. H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie* I (Berlin—Leipzig, 1937), p. 100.

contain a normal 2-group $\neq 1$, which is not the case. Thus $(U)=2\cdot 3$. Let U_3 be the 3-Sylow subgroup of U. Since U is irreducible for $V_3=N$, U_3 is completely reducible (cf. FROBENIUS [1]). Therefore since the degree of the representation is 3, U_3 must be irreducible. On the other hand, by SYLOW's theorem, U_3 is not maximal in U_3N. This contradiction proves our assertion.

Case of type (9, 3). Assume the solubility of U. As above, $U\neq GL(3,3)$. At any rate, $(U)|2^5\cdot 3^3\cdot 13=$ the order of $GL(3,3)$. By Lemma 3, $3^2|(U)$. Assume $13|(U)$ and let U_{13} be a 13-Sylow subgroup of U. If U_{13} is not normal in U, then we see, by SYLOW's theorem, $(U)=2^4\cdot 3^2\cdot 13$ or $=3^3\cdot 13$. Since U does not contain a normal 3-subgroup $\neq 1$, the latter case does not occur. In the former case clearly U_{13} is not maximal in U and this implies that U_{13} is normal in U, which is a contradiction. Thus U_{13} must be normal in U. Then, we see, by SYLOW's theorem, U_{13} must be normal in $GL(3,3)$, because $3^2|(U)$. Thus $13\nmid(U)$, and $(U)|2^5\cdot 3^3$. Let R be the largest normal nilpotent subgroup of U. Then, since U does not contain a normal 3-subgroup, R is a 2-group. If R is reducible for $V_3=N$, then, since R is completely reducible and the degree of the representation is 3, R is of diagonal form. Then the order of R is at most equal to 2^3. Further the subgroup R_+ of R consisting of all the matrices with determinant 1 is of order at most equal to 2^2. Since $3^2|(U)$, this implies that U contains a normal 3-subgroup $\neq 1$, which is a contradiction. Thus R is irreducible for V_3. If R_+ is not of type (2, 2, 2, 2), then, as above, U contains a normal 3-subgroup $\neq 1$, which is a contradiction. But if R_+ is of type (2, 2, 2, 2), then R_+ cannot be irreducible for V_3 (cf. HUPPERT [1]). But if R_+ is reducible for V_3, then the order of R_+ must be at most equal to 2^3. This contradiction proves our assertion.

Case of type (8, 2). Assume the solubility of U. As above, $U\neq GL(4,2)$. At any rate, $(U)|2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=$ the order of $GL(4,2)$. By Lemma 3, $2^3|(U)$. Assume $7|(U)$ and let U_7 be a 7-Sylow subgroup of U. If U_7 is normal in U, then U_7 is completely reducible for $V_4=N$, because of the irreducibility of U (cf. FROBENIUS [1]). Now U_7 cannot be irreducible, which is easily seen by considering $U\cdot N$ and using SYLOW's theorem. Further U_7 cannot be reducible. In fact, otherwise, since it is completely reducible, $U_7\cdot N=U_7\times N$, which is clearly a contradiction. Thus U_7 is not normal in U. Let R be the largest normal nilpotent subgroup of U. Then, since U does not contain a normal 2-subgroup, R is of order prime to 2. Let us consider RU_7. Then we see, by SYLOW's theorem, that $RU_7=R\times U_7$, which is clearly a contradiction. Thus $7\nmid(U)$, and $(U)|2^6\cdot 3^2\cdot 5$. Assume $5|(U)$ and let $U_5=\{u_5\}$ be a 5-Sylow subgroup of U. If U_5 is normal in U, then, since $2^3|(U)$, there exists an element t of order 2 which belongs to the centralizer of U_5. This is a contradiction. In fact, t admits an invariant vector $x\neq 0$ and since U_5 is irreducible, $u_5^i\circ x$ $(i=0,1,2,3,4)$ ($\circ$ denotes the matrix multiplication) generates the whole vector space $V_4=N$. Therefore t must be the identity.

Thus U_5 is not normal in U. Let R be the largest normal nilpotent subgroup of U. Then, as above, we come to the contradiction that $RU_5 = R \times U_5$. Thus $5 \nmid (U)$ and $(U) | 2^6 \cdot 3^2$. Now let us assume that U contains a normal subgroup of order 3. Then we can easily see that U contains a normal 2-subgroup $\neq 1$, which is a contradiction. Let U_3 be a 3-Sylow subgroup of U. Then U_3 is minimal normal in U. Since the order of $GL(2, 3)$ is $2^4 \cdot 3$, if $2^5 | (U)$, then U contains a normal 2-subgroup $\neq 1$. Further a 2-Sylow subgroup of U is isomorphic to a subgroup of a 2-Sylow subgroup of $GL(2, 3)$, which is generated by matrices $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ with coefficients in the prime field of characteristic 3 (cf. DICKSON [1], p. 86). As it is easily seen, this group does not contain an abelian subgroup of type (4, 2). On the other hand, a 2-Sylow subgroup of U contains an abelian subgroup V of type (4, 2), where $A \cdot N = V \cdot N$ and $V \cap N = 1$. This contradiction proves our assertion.

Remark. The solubility can be formally weakened to the p-solubility in the sense of ČUNIHIN [1].

Double transitivity. Now we give an other proof to our case of KOCHENDÖRFFER—MANNING's theorem.[2]) As above, we treat each case separately. First we remark the following. Let n be an element of N. Let UnU be a double-sided class of G by U. Then all the elements of N belonging to UnU are conjugate to n and conversely.

Case of type (4, 2). By BURNSIDE's theorem, if $7 \nmid (U)$, then U is soluble. Since U is insoluble, $7 | (U)$. Then, since the order of N is 8, by the remark, we see easily that $G = U + UnU$, where n is an element $\neq 1$ of N, and $\{G, U\}$ is doubly transitive (BURNSIDE [2]).

Case of type (9,3). By BURNSIDE's theorem, if $13 \nmid (U)$, then U is soluble. Since U is insoluble, $13 | (U)$. We notice that every element of order 13 does not possess the characteristic value 1. Again by BURNSIDE's theorem, if $2 \nmid (U)$, then U is soluble. Since U is insoluble, $2 | (U)$. We notice that there exists an element of order 2 such that it possesses only one characteristic value 1. In fact, otherwise, by BURNSIDE's theorem, U is soluble. Then, since the order of N is 27, by the remark, we see easily that $G = U + UnU$, where n is any element $\neq 1$ of N, and $\{G, U\}$ is doubly transitive.

Case of type (8,2). Assume $5 | (U)$. Then, since U clearly does not contain a subgroup of index 5 (*in fact, otherwise, U must be of icosahedral type. But* $8 | (U)$), and since the order of N is 16, by the remark, we see easily that $G = U + UnU$, where n is any element $\neq 1$ of N, and $\{G, U\}$

---

[2]) Here we want to refer to the following interesting problem: Is there a primitive permutation group of MANNING—KOCHENDÖRFFER type not satisfying the condition (S)?

is doubly transitive. Thus we may assume that $5 \nmid (U)$. Now, by BURNSIDE's theorem, if $7 \nmid (U)$, then U is soluble. Since U is insoluble, $7|(U)$. Again, by BURNSIDE's theorem, if $3 \nmid (U)$, then U is soluble. Since U is insoluble, $3|(U)$. If $3^2|(U)$, then U contains an element of order 3 which does not contain a characteristic value 1. Then, since the order of N is 16, by the remark, we see easily that $G = U + UnU$, where n is any element $\neq 1$ of N. But this implies $5|(U)$, which is a contradiction. Therefore $3^2 \nmid (U)$ and $(U)|2^6 . 3 . 7$. Let U_7 be a 7-Sylow subgroup of U. Since U is insoluble, U_7 is non-normal in U. Using SYLOW's theorem, we see either $(U) = 2^6 . 3 . 7$. or $(U) = 2^3 . 3 . 7$. Now if $\{G, U\}$ is simply transitive, then U contains a subgroup of index 7. Let V be such a subgroup. As it can be easily seen, V does not contain a normal subgroup $\neq 1$ of U. Further since U is insoluble, by BURNSIDE's theorem (BURNSIDE, 1) $\{U, V\}$ is doubly transitive. Therefore V contains a subgroup W such that (i) W is of index 6 in V and (ii) W does not contain a normal subgroup $\neq 1$ of V. (cf. § 1). First let us consider the case $(U) = 2^6 . 3 . 7$. Since the order of the symmetric group of degree 6 is $2^4 . 3^2 . 5$, W must contain a normal subgroup $\neq 1$ of V, which is a contradiction. Therefore $(U) = 2^3 . 3 . 7$. By Lemma 3, a 2-Sylow subgroup U_2 of U is abelian of type (4,2). As it can be easily seen, V contains a normal subgroup X of order 4. Clearly $W \cap X \neq 1$ is a normal subgroup of V, which is a contradiction.

8. Now we treat the remaining case where the type of the abelian group A is (8,4). But the fact is that this case does not occur. The present non-existence proof is complicated. We hope that it becomes trivially simple by a new method.

(1) We use the same notations as before. Let us consider $P_5 = P(5,2) V_5$. Then we want to show that P_5 does not contain an abelian subgroup A of type (8,4) such that $P_5 = P(5,2) A$. Put $P = A V_5 = U V_5$, where U is a subgroup of $P(5,2)$. Let $A_1 = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ and $A_2 = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ be the basic elements of A with orders 8 and 4 respectively, where the multiplication is that in P_5, and further

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} \\ 0 & 1 & d_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & h_{12} & h_{13} \\ 0 & 1 & h_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

and all the coefficients belong to the prime field of characteristic 2, that is, they are equal to 0 or 1. Moreover $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} F & G \\ 0 & H \end{pmatrix}$ belong to $P(5,2)$, and $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ belong to V_5.

(2) We shall make use of the following equations, where the multiplication except that of the elements of P_5 is the ordinary matrix multiplication:

(A. I) $$A_1^2 = \begin{pmatrix} E & BC+CD \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (B+E)b+Cc \\ (D+E)c \end{pmatrix}$$ (E denotes the unit matrix).

(A. II) $$A_2^2 = \begin{pmatrix} E & FG+GH \\ 0 & H^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (F+E)f+Gg \\ (H+E)g \end{pmatrix}.$$

(B. I) $$A_1^4 = \begin{pmatrix} E & (BC+CD)(E+D^2) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (BC+CD)(D+E)c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(B. II) $$A_2^4 = \begin{pmatrix} E & (FG+GH)(E+H^2) \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (FG+GH)(E+H)g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(C) The commutability of $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} F & G \\ 0 & H \end{pmatrix}$:

$$BF=FB,\ DH=HD,\ BG+CH=FC+GD.$$

(D) The commutability of A_1 and A_2 under the equation (B):

$$\begin{pmatrix} F & G \\ 0 & H \end{pmatrix}^{-1}\circ\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}\circ\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

($\circ$ denotes the ordinary matrix multiplication).

(3) First we want to show that the order of the centre Z of P is equal to 2. In fact, if Z is of order greater than 2, we may assume, by choosing a suitable base of V_5, that $B=F=E$. Assume $D^2=E$. Then by (B. 1) $A_1^4=1$, which is a contradiction. Hence $D^2 \neq E$ and $D^4=E$. Therefore we may assume, if necessary, replacing A_1 by A_1^3, that $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assume $H=E$. Then, by (C), $G=GD$, whence $G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & g_{23} \end{pmatrix}$. Since $A_2^2 \neq 1$ is a central element, $A_2^2=\begin{pmatrix} Gg \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{13} & g_3 \\ g_{23} & g_3 \end{pmatrix} \neq 0$. In particular, $g_3=1$. On the other hand, by (D), $g=D^{-1}g$, whence $g_3=0$. This contradiction proves $H \neq E$. Since A_2^2 is a central element, $H^2=E$ and $G(E+H)=0$. By (C), $DH=HD$, whence $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, and therefore, $g_{11}=g_{21}=0$. By (C), $G+C\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=C+G\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, whence $g_{12}=c_{11}$ and $g_{22}=c_{11}$. By (D), $Hc+g=D^{-1}g+c$,

whence $g_3=0$, $g_2=c_3=1$. Now $A_1^4=\begin{pmatrix}c_{11}&c_3\\c_{21}&c_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ and $A_2^2=\begin{pmatrix}g_{12}\\g_{22}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Hence $A_1^4=A_2^2$ and $Z=\{A_1^4=A_2^2\}$. Then Z must be of order 2. This is a contradiction. Thus Z is of order 2.

(4) Now only the two types of U: (8,2) and (4,4) are allowable. First we prove that the type of U must be equal to (4,4). Assume that U is of type (8,2). Since A_1^4 does not belong to V_5, $\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$ is of order 8. Therefore D is of order 4, and we may assume $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Since A_2^2 is a central element $\neq 1$, $\begin{pmatrix}F&G\\0&H\end{pmatrix}$ is of order 2. By (C), $DH=HD$. Therefore, if necessary, replacing A_2 by $A_1^2A_2$, we may assume $H=E$. Assume $F=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Then, if necessary, replacing A_1 by A_1A_2, we may assume $B=E$. Then $\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}^4=E$. This contradiction proves $F=E$, and $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. By (A. II), $\begin{pmatrix}(F+E)f+Gg\\(H+E)g\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}Gg\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}g_1+g_{12}g_2+g_{13}g_3\\g_{21}g_1+g_{22}g_2+g_{23}g_3\end{pmatrix}\neq 0$. By (C), $BG=GD$, whence $g_{11}=g_{21}=$ $=g_{22}=0$. By (D), $g=D^{-1}g$, whence $g_2=g_3=0$. Then $\begin{pmatrix}Gg\\0\end{pmatrix}=0$. This is a contradiction. Thus U is of type (4,4).

(5) At any rate, $\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}F&G\\0&H\end{pmatrix}$ are of order 4, respectively. Put $F=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. If necessary, replacing A_1 by A_1A_2, we may assume $B=E$. Assume $D^2=E$. Then, by (B. I), $0\neq\begin{pmatrix}C(D+E)^2C\\0\end{pmatrix}=0$. Hence $D^2\neq E$ and $D=E$. If necessary, replacing A_1 by A_1^3, we may assume $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. If H is of order not greater than 2, if necessary, replacing A_2 by $A_1^2A_2$, we may assume $H=E$. Now by (C), $G+C=FC+GD$, whence $c_{21}=g_{21}=g_{22}=0$. By (A. II), since A_2^2 does not belong to V_5, $(F+E)G\neq 0$, whence either g_{21} or g_{22} or $g_{23}=1$. Hence $g_{23}=1$. Now by (D) $g=D^{-1}g$, whence $g_2=g_3=0$.

Again by (D), $Fb+FGc=CD^{-1}g+b$, whence, in particular, $g_{21}c_1+g_{22}c_2+$ $+g_{23}c_3=c_{21}g_1+(c_{21}+c_{22})g_2+(c_{22}+c_{23})g_3$. Hence $c_3=0$. On the other hand, by (B. I), since A_1^4 is a central element $\neq 1$, $\begin{pmatrix}(BC+CD)(D+E)C\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}\ c_3\\c_{21}\ c_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, whence $c_3=1$. This contradiction proves that H is of order 4. If necessary, replacing A_2 by A_2^3, we may assume $H=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Now by (C), $G+C\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}C+G\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, whence $c_{21}=g_{21}=0$, $c_{22}=g_{22}$, $c_{11}=c_{22}+g_{11}$. By (B. I), since A_1^4 is a central element $\neq 1$, $\begin{pmatrix}(BC+CD)(D+E)c\\0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}c_{11}\ c_3\\c_{21}\ c_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0$, whence $c_3=1$ and $c_{11}=1$. By (D), $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}c+g=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}g+c$, whence $g_3=c_3=1$. By (B. II), since $A_2^4=1$, $\begin{pmatrix}(FG+GH)(E+H)g\\0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}g_{21}g_2+(g_{21}+g_{22}+g_{11})g_3\\g_{21}g_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0$, whence $g_{11}+g_{22}=0$. Then, $c_{11}=c_{22}+g_{11}=$ $=g_{22}+g_{11}=0$. Thus $c_{11}=1=0$. This is a contradiction. Thus $F=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

(6) Now assume $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Since the order of A_1 is 8, by (B. II), D is of order 4. If necessary, replacing A_1 by A_1^3, we may assume $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Now if H is of order not greater than 2, then, by (C), since $DH=HD$, we may assume, if necessary, replacing A_2 by $A_2A_1^2$, that $H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. By (A. II), $1\neq A_2^2=\begin{pmatrix}Gg\\0\end{pmatrix}$ belongs to V_5, which is a contradiction. Thus H must be

of order 4. Therefore, if necessary, replacing A_2 by A_2^3, we may assume $H=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. By (C), $G+C\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C+G\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, whence $c_{11}=g_{11}$, and $c_{21}=g_{21}$. By (D), $H^{-1}c+g=D^{-1}g+c$, whence $c_3=g_3$. By (B. I),

$$0\neq\begin{pmatrix}(BC+CD)(D+E)C\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}\ c_3\\c_{21}\ c_3\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$ whence $c_3=1$ and either c_{11} or $c_{21}=1$.

By (B. II), $$0=\begin{pmatrix}(FG+GH)(E+H)g\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11}\ g_3\\g_{21}\ g_3\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$ whence, since $g_3=c_3=1$,

$g_{11}=g_{21}=0$. Then, since $c_{11}=g_{11}$, $c_{21}=g_{21}$, $c_{11}=0$ and $c_{21}=0$. This contradiction proves $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(7) Now let us assume that D is of order 4. Then, if necessary, replacing A_1 by A_1^3, we may assume that $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. Now if H is of order not greater than 2, then, by (C), since $DH=HD$, we may assume if necessary, replacing A_2 by $A_2A_1^2$, that $H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. By (A. II), $1\neq A_2^2=\begin{pmatrix}Gg\\0\end{pmatrix}$ belongs to V_5, which is a contradiction. Thus H must be of order 4. Therefore, if necessary, replacing A_2 by A_2^3, we may assume $H=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

By (C), $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}G+C\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C+G\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, whence $c_{21}=g_{21}=0$, $c_{22}=g_{22}$ and $c_{11}=g_{11}+g_{22}$. By (D), $H^{-1}c+g=D^{-1}g+c$, whence $c_3=g_3$. By (B. I), since $A_1^4\neq 1$ is a central element, $$\begin{pmatrix}(BC+CD)(D+E)c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_{11}+c_{22})\,c_3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0,$$ whence $c_3=1$ and $c_{11}+c_{22}=1$. By (B. II), since $A_2^4=1$, $\begin{pmatrix}(FG+GH)(E+H)g\\0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} g_{11} & g_3 \\ \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{0} \\ \multicolumn{2}{c}{0} \end{vmatrix}=0,$$ whence, since $g_3=c_3=1$, $g_{11}=0$. Then $c_{11}=g_{22}=c_{22}$.

Hence $c_{11}+c_{22}=0$. This is a contradiction. Thus D must be of order not greater than 2. If $D=E$, then, by (B. I), $A_1^4=1$. This contradiction proves that the order of D is 2.

(8) Assume that H is of order 4. Then, if necessary, replacing A_2 by A_2^3, we may assume $H=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. By (C), $DH=HD$. Therefore $D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

By (B. I), since $A_1^4\neq1$ is a central element, $\begin{pmatrix}(BC+CD)\,(D+E)\,c\\ 0\end{pmatrix}\neq 0$, whence $c_3=1$. By (D), $H^{-1}c+g=Dg+c$, whence $c_3=0$. This is a contradiction. Thus H must be of order not greater than 2. If $H=E$, then, by (A. II), $1\neq A_2^2=\begin{pmatrix}Gg\\0\end{pmatrix}$ belongs to the centre, which is a contradiction. Thus H is of order 2.

(9) Put, for abbreviation,

$$M_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad M_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$M_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad M_5=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Since, by (C), $DH=HD$, the following seventeen pairs of $\{D,H\}$ are only to be considered:

(i) $\{M_1, M_1\}$, (ii) $\{M_1, M_2\}$, (iii) $\{M_1, M_3\}$, (iv) $\{M_1, M_4\}$, (v) $\{M_1, M_5\}$, (vi) $\{M_2, M_1\}$, (vii) $\{M_2, M_2\}$, (viii) $\{M_2, M_4\}$, (ix) $\{M_3, M_1\}$, (x) $\{M_3, M_3\}$, (xi) $\{M_3, M_5\}$, (xii) $\{M_4, M_1\}$, (xiii) $\{M_4, M_2\}$, (xiv) $\{M_4, M_4\}$, (xv) $\{M_5, M_1\}$, (xvi) $\{M_5, M_3\}$, (xvii) $\{M_5, M_5\}$.

Now let us assume $c_3=0$. Since A_1^4 is a central element $\neq 1$, by (B. I)

$$0\neq\begin{pmatrix} c_{21} & d_{12} & c_2 \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix},$$ whence $c_{21}=d_{12}=c_2=1$. By (C), $c_{21}h_{12}=0$. Hence $h_{12}=0$.

There remain only two cases: (ix) and (xv). In these cases $d_{23}=h_{23}=0$. By (C), $c_{21}=h_{13}+c_{22}h_{23}=g_{22}d_{23}$. Hence $h_{13}=0$. This is a contradiction. Thus $c_3=1$.

Now let us assume $d_{23}=0$. By (B. I), $0 \neq \begin{pmatrix} c_{11} & d_{12} & c_2+c_{21} & d_{13} \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$, whence $c_{21}=1$. By (C) $c_{21}h_{12}=0$. Hence $h_{12}=0$. There remain the cases (i), (ii). (iv), (ix), and (xv). Now in the cases (i), (ix), (xv), $h_{23}=0$. By (C), $c_{21}h_{13}+c_{22}h_{23}=g_{22}d_{23}$. Hence $h_{13}=0$. This is a contradiction. Further in the cases (ii), (iv), $h_{23}=1$. By (D), $h_{23}c_3=d_{23}g_3$. Hence $d_{23}=1$. This is a contradiction. Thus $d_{23}=1$. There remain the cases (vi), (vii), (viii), (xii), (xiii) and (xiv). In these cases $h_{12}=d_{12}=0$. Therefore, by (D), $h_{13}=d_{13}g_3$. Hence if $h_{13}=1$, then $d_{13}=1$. Thus the cases (vi) and (viii) vanish. Again by (D), $h_{23}c_3=d_{23}g_3$. Hence $h_{23}=g_3$. If $h_{23}=0$, then $g_3=0$ and therefore $h_{13}=0$. This is a contradiction. Thus $h_{23}=g_3=1$ and $h_{13}=d_{13}$. Thus the cases (xii) and (xiii) vanish. Now let us consider the case (vii). Then $h_{13}=d_{13}=0$. By (B. I), $0 \neq \begin{pmatrix} c_{21} & d_{13}+c_{22} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$, whence $c_{22}=1$. By (C), $c_{21}h_{13}+c_{22}h_{23}=g_{22}d_{23}$ and $g_{22}+c_{11}h_{12}=g_{11}d_{12}$. Hence $c_{22}=0$. This is a contradiction. Last let us consider the case (xiv). Then $h_{13}=d_{13}=1$. By (B. I), $0 \neq \begin{pmatrix} c_{21} & d_{13}+c_{22} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$, whence $c_{31}+c_{22}=1$. By (C), $c_{21}h_{13}+c_{22}h_{23}=g_{22}d_{23}$ and $g_{22}+c_{11}h_{12}=g_{11}d_{12}$. Hence $c_{31}+c_{22}=0$. This is a contradiction.

Q. E. D.

Now, in the long run, if a primitive permutation group $\{G, U\}$ of KOCHENDÖRFFER—MANNING type satisfies the condition (S), then G is insoluble. Further if such a $\{G, U\}$ does not satisfy the condition (S), then primarily G is insoluble. Thus we can say that *a primitive permutation group $\{G, U\}$ of Kochendörffer—Manning type is insoluble.*

9. Now the following two questions may be natural: (1) With some exceptionals which happen for $p=2$, any primitive permutation group with an abelian transitive subgroup not of type $(p, \ldots, p)$ is insoluble? (2) If a primitive permutation group has an abelian transitive subgroup, at least one invariant of which occurs only once, then is this primitive permutation group doubly transitive?

The second question can be answered *negatively*. Let us start from the examples $\{G, U\}$; $G=UN=UA$, where $U=GL(p,p)$, $H=V_p$ and A is of type $(p^2, p, \ldots, p)$, which are constructed in § 5. Let $\{G_i, U_i\}$; N_i and

A^i be the r copies of $\{G, U\}$; N and A, where r is a natural number >1. Then we construct the permutation group $\{G^{**}, U^{**}\}$ by KOCHENDÖRFFER's method of construction in § 6. Put $A^{***}=A_1\times N_2\times\cdots\times N_r$. We have only to show the transitivity of A^{***}. As in § 3 put $U^*=U_1\times\cdots\times U_r$ and $G^*=G_1\times\cdots\times G_r$. Then clearly $A^{***}U^*=G^*$, whence $A^{***}U^{**}=G^{**}$.

For the first problem we have only partial answers. Let $\{G, U\}$; $G=UN=UA$ be a soluble primitive permutation group with an abelian transitive subgroup A not of type $(p,\ldots,p)$. Further let p^n be the order of N and let p be greater than 2.

(1) (cf. § 7) U may be considered as a subgroup of $GL(n,p)$.

(2) (cf. § 7) U does not contain a normal p-subgroup $\neq 1$.

(3) Put $AN=V\cdot N$, where V is a subgroup of U. Then V is an abelian p-subgroup of U. Now U does not contain a subgroup L such that (i) L is irreducible for $N=V_n$ and (ii) the normalizer of L contains V and L is a minimal normal subgroup of LV.

In fact, let U contain such a subgroup L. Then, by (2), the centralizer of L in LV is coincident with L itself. Therefore we can consider L as a faithful irreducible representation module for V. Therefore V is cyclic [cf. HUPPERT]. Since $p>2$, by Lemma 3, this is a contradiction.

Now let us notice that $n\geqq p>2$. Therefore there exists a prime q such that $p^n\equiv 1 \pmod q$ and $p^m\not\equiv 1 \pmod q$ for any $m<n$ (ZSIGMONDY [1]). Then the order of U cannot be divisible by such a q.

In fact let the order of U be divisible by such a q. First we remark that in these circumstances any subgroup of U whose order is divisible by q is irreducible. By Hall's theorem (HALL [2]) there exists a $\{p,q\}$-Sylow subgroup $U_{\{p,q\}}$ (a Hall subgroup) in U. Since $U_{\{p,q\}}$ is irreducible for N, by (2), $U_{\{p,q\}}$ does not contain a normal p-subgroup $\neq 1$. Let Q be a minimal normal q-subgroup $\neq 1$ of $U_{\{p,q\}}$ and let us consider the subgroup QV. Again let Q_1 be a minimal normal q-subgroup $\neq 1$ of QV and let us consider the subgroup Q_1V. Since Q_1V is irreducible for N, by (2) Q_1V does not contain a normal p-subgroup $\neq 1$. Therefore the centralizer of Q_1 in Q_1V is coincident with Q_1 itself. Therefore we can consider Q_1 as a faithful, irreducible representation module of V. Therefore V is cyclic (cf. HUPPERT [1]). Since $p>2$, by Lemma 3, this is a contradiction.

As a corollary of the above result we see that $\{G, U\}$ is necessarily simply transitive.

In fact, if $\{G, U\}$ is doubly transitive, then the order of U is divisible by p^n-1.

Addendum. Recently Mr. BERTRAM HUPPERT in Tübingen has independently obtained, by interesting methods, similar results as those of the present paper. See his paper „Primitive, auflösbare Permutationsgruppen", *Archiv für Math.*, **6**(1955), 303—310.

Literature.

BURNSIDE, W. [1] On some properties of groups of odd order, *Proc. London Math. Soc.*, **33** (1900), 162—185.

[2] On groups of order $p^{\alpha} q^{\beta}$, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **1** (1904), 388—392.

ČUNIHIN, S. [1] O Π-svoĭstvah konečnyh grupp, *Mat. Sbornik*, **25** (67) (1949), 321—346.

DICKSON, L. E. [1] *Linear groups* (Leipzig, 1901).

FROBENIUS, G. [1] Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, *Sitzungsberichte Berlin* (1898), 501—515.

HALL, P. [1] A contribution to the theory of groups of primepower orders, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **36** (1933), 29—95.

[2] A note on soluble groups, *Journal London Math. Soc.*, **3** (1928), 98—105.

HUPPERT, B. [1] Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Zeitschrift*, **60** (1954), 409—434.

KOCHENDÖRFFER, R. [1] Untersuchung über eine Vermutung von W. Burnside, *Schriften Math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin*, **3** (1937), 155—180.

MANNING, D. [1] On simply transitive groups with transitive Abelian subgroups of the same degree, *Transactions American Math. Soc.*, **40** (1936), 324—342.

RITT, J. F. [1] On algebraic functions which can be expressed in terms of radicals *Transactions American Math. Soc.*, **24** (1922), 27—30.

SCHREIER, O. [1] Über die Erweiterung von Gruppen. II, *Hamburger Abh.*, **4** (1926), 321—346.

WIELANDT, H. [1] Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen, *Math. Zeitschrift*, **40** (1935), 582—587.

ZSIGMONDY, K. [1] Zur Theorie der Potenzreste, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **3** (1892), 265—286.

(Received August 28, 1954.)

Über die Faktorisation von Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged (Ungarn) und N. ITÔ in Nagoya (Japan).

Sind $H_1, H_2, \ldots$ echte Untergruppen einer Gruppe G und gilt $G = H_1 H_2 \ldots$, so nennt man die rechte Seite dieser Gleichung eine Faktorisation von G mit den Faktoren $H_1, H_2, \ldots$. Die Faktorisation nennen wir symmetrisch, wenn $H_{1'} H_{2'} \ldots = H_1 H_2 \ldots$ für jede Permutation $1', 2', \ldots$ von $1, 2, \ldots$ gilt. Im Falle zweier Faktoren (und auch im Falle mehrerer Faktoren, wenn die Faktoren paarweise vertauschbar sind [1]) hat sich mit solchen Faktorisationen in den letzten zwei Jahrzehnten eine ganze Reihe von Arbeiten beschäftigt.

N. ITÔ [2] hat bewiesen, daß nicht jede endliche einfache Gruppe eine Faktorisation mit zwei Untergruppen hat. Es ist also um so mehr wünschenswert die obigen Faktorisationen mit mehreren Untergruppen allgemein zu untersuchen.

Zunächst beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Es sei G eine Gruppe und H eine echte Untergruppe von G. Es seien $\{H_\chi\}$ die sämtlichen Konjugierten von H in G, wo χ irgendeine wohlgeordnete Indizesmenge I durchläuft. Dann ist das Produkt $\prod_\chi H_\chi = H_1 H_2 \ldots$ eine Untergruppe von G.*

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt auf triviale Weise, daß die Untergruppe $\prod_\chi H_\chi$ der kleinste die Gruppe H enthaltende Normalteiler von G ist, also ist die Faktorisation $\prod_\chi H_\chi$ symmetrisch.

Beweis. Es sei $x = h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ $(\alpha, \beta, \ldots, \varrho \in I)$ ein Element von G derart, daß h_ν zu H_ν gehört $(\nu = \alpha, \beta, \ldots, \varrho)$. Zunächst definieren wir die zwei elementaren Umformungen:

1) Sind h_σ, h_τ zwei benachbarte Faktoren in $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ derart, daß beide zu H_μ gehören, so ersetzen wir $h_\sigma h_\tau$ durch das ihm gleiche Element h'_μ von H_μ.

2) Es sei H_μ eine Gruppe $(\mu \in I)$ mit kleinstem Index, für welche $h_\sigma \in H_\mu$ (h_σ ein Faktor in $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$) gilt. Gilt $\mu < \sigma$, so ersetzen wir h_σ durch das ihm gleiche Element h''_μ von H_μ.

Wir nennen ein Produkt $h_\alpha h_\beta \ldots h_\varrho$ ein reduziertes Produkt, wenn man in diesem keine elementare Umformung ausführen kann. Es ist klar, daß man jedes Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ in endlich vielen Schritten in ein reduziertes Produkt umformen kann.

Es sei $x = h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein reduziertes Produkt. Es bezeichne r die Anzahl der Faktoren in diesem Produkt und es sei $l(x) = \min r$. Wir nennen das betrachtete reduzierte Produkt ein minimales reduziertes Produkt, wenn die Anzahl der Faktoren in $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ gleich $l(x)$ ist. Es is evident, daß jedes Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ mindestens einem minimalen reduzierten Produkt gleich ist. Endlich nennen wir ein Produkt $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein geordnetes Produkt, wenn $\alpha < \beta < \dots < \varrho$ gilt.

Es ist klar, daß das minimale reduzierte Produkt $h_\alpha \dots h_\gamma h_\delta \dots h_\varrho$ durch die Umformungen $h_\gamma h_\delta = h_\delta (h_\delta^{-1} h_\gamma h_\delta) = h_\delta h_{\gamma'}$ und $h_\gamma h_\delta = (h_\gamma h_\delta h_\gamma^{-1}) h_\gamma = h_{\delta'} h_\gamma$ wieder in ein minimales reduziertes Produkt übergeht. Bequemlichkeitshalber nennen wir diese Umformungen die Transformationen von minimalen reduzierten Produkten.

Es sei $x = h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ ein minimales reduziertes Produkt. Wir werden beweisen, daß man durch die gesagten Transformationen ein minimales reduziertes Produkt in ein (minimales reduziertes) geordnetes Produkt umformen kann. Es ist klar, daß wir hierdurch auch schon den Satz bewiesen haben werden.

Den Beweis werden wir durch Induktion nach $l(x)$ durchführen. Ist $l(x) = 1$, so ist die Behauptung trivial. Es sei $l(x) > 1$. Es sei $M(x)$ die Menge aller minimalen reduzierten Produkte, die aus $h_\alpha h_\beta \dots h_\varrho$ durch Transformationen entstehen. Wir betrachten in $M(x)$ ein Produkt $h_{\alpha'} h_{\beta'} \dots h_{\varrho'}$, welches den kleinsten in $M(x)$ überhaupt vorkommenden Index enthält. Wir können annehmen, daß α' dieser kleinste Index ist, und setzen $x = h_{\alpha'} y$ $(y = h_{\beta'} \dots h_{\varrho'})$. Dann ist $l(y) < l(x)$, also hat y nach der Induktionsannahme eine (minimale, reduzierte) geordnete Produktdarstellung $y = h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$, welche durch Transformationen aus $h_{\beta'} \dots h_{\varrho'}$ entsteht. Es ist klar, daß alle Indizes in $h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$ größer als α' ist. Folglich ist $x = h_{\alpha'} h_{\beta''} \dots h_{\varrho''}$ ein geordnetes Produkt. Somit ist der Satz bewiesen.

Man bezeichne das Produkt $\prod_\chi H_\chi$ mit $\bar{H}$.

Satz 2. *Ist G eine nichtnilpotente endliche Gruppe, so hat G eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $\bar{H} = G$.*

Beweis. Der Beweis geschieht mit Induktion nach der Ordnung der Gruppe. Ist jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler von G, dann is G nilpotent (dies folgt einfach aus einem bekannten Satz von H. Wielandt [3]), was unserer Annahme über G widerspricht. Daher hat G eine nicht normale maximale Untergruppe M. Ist M nilpotent, so können wir $H = M$ nehmen. Andernfalls enthält M nach Induktionsannahme eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $M = HH' \dots$, wo $H', \dots$ die Konjugierten von H in M sind. Es ist klar, daß $\bar{H} = G$ ist.

Wir bemerken, daß man im Satz 2 „nilpotent" durch „Abelsch" nicht ersetzen kann. Ein Gegenbeispiel liefert das direkte Produkt der Diedergruppe von der Ordnung 8 mit der symmetrischen Gruppe von der Ordnung 6.

Man kann leicht einsehen, daß eine Gruppe G dann und nur dann eine zyklische Untergruppe Z mit $\bar{Z} = G$ hat, wenn man die Gruppe G mit ihren eigentlichen Normalteilern nicht überdecken kann.

Literatur.

[1] H. Wielandt, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Zeitschrift*, 55 (1951), 1—7.

[2] N. Itô, On the factorisations of the linear fractional group $LF(2, p^m)$, *diese Acta*, 15 (1953), 79—84.

[3] H. Wielandt, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen, *Math. Zeitschrift*, 41 (1936), 281—282.

(*Eingegangen am 7. Juli 1955.*)

Some results concerning a problem in set theory.

By G. FODOR in Szeged.

Let S be a given set of power $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, Q a subset of power $\mathfrak{q} \geqq \aleph_0$ of S and suppose that to every element x of Q there corresponds a subset $H(x)$ of S such that for any $x \in Q$ the power of the set $H(x)$ is smaller than a given cardinal number $\mathfrak{n}$ which is smaller than $\mathfrak{m}$ and $\overline{\overline{\bigcup_{x\in Q} H(x)}} = \mathfrak{q}$. Let $\mathfrak{p}$ be a cardinal number for which $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}$.

Definition. *A subset Γ of Q is said to have the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ whenever*

$$1)\ \overline{\overline{\bigcup_{x\in\Gamma} H(x)}} = \mathfrak{q} \quad \textit{and} \quad 2)\ \overline{\overline{\bigcup_{\substack{x,y\in\Gamma\\ x\neq y}} (H(x)\cap H(y))}} < \mathfrak{p}.$$

Problem. *Does there always exist a subset Γ of Q with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$, if $\mathfrak{q} > \mathfrak{n}$, $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{n}$ and $\mathfrak{q} \geqq \mathfrak{p}$?*

We shall prove in this paper that the answer to this problem is affirmative in the following cases:

a) if $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ (in the case, when $\mathfrak{q}\ (\neq \aleph_{\alpha+\omega})$ is the sum of $\mathfrak{n}$ cardinal numbers, each of which is smaller than $\mathfrak{q}$, we assume the generalized continuum hypothesis) (Theorem 1, Theorem 6 and Theorem 8),

b) if $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+\omega}$ (where α is an arbitrary and ω the smallest infinite ordinal number) and $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha+1}$ (Theorem 6),

c) if 1) $\mathfrak{n} = \mathfrak{p} = \aleph_0$ and $\mathfrak{q}$ is a regular cardinal number or if 2) $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+2}$ (where α is an arbitrary ordinal number) and $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \leqq \aleph_\alpha$ (Theorem 7),

d) if $\mathfrak{q}$ is a singular cardinal number and if 1) $\mathfrak{n} = \aleph_0$, $\mathfrak{p} = [\mathfrak{q}^* \cdot \mathfrak{n}]^+$, or if 2) $\aleph_0 \leqq \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ for every $\aleph_\alpha$ for which $\aleph_\alpha < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{p} = [\mathfrak{q}^* \cdot \mathfrak{n}]^+$ (where $\mathfrak{q}^*$ denotes the smallest cardinal number such that $\mathfrak{q}$ is the sum of $\mathfrak{q}^*$ cardinal numbers each of which is less than $\mathfrak{q}$, and $\mathfrak{r}^+$ the cardinal number immediately following $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^* . \mathfrak{n}$) (Theorem 8),

e) in every case whenever $\mathfrak{q} = \aleph_\alpha$ is a singular cardinal number such that α is not confinal to ω and $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, supposing that the answer to the problem is affirmative in the special case whenever $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} = \aleph_\beta$ and β is confinal to ω (Theorem 11).

The answer to the problem is negative, in general, in the following cases. These results are due to P. ERDŐS.

a) If $\mathfrak{q}$ is a singular cardinal number and $\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}^*)^+$ (Theorem 9).

b) If $\mathfrak{q}=\aleph_{\alpha+1}$, $\aleph_\alpha=\mathfrak{r}$ is singular, $\mathfrak{p}\leqq\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}=(\mathfrak{r}^*)^+$ and $2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$ for every β (Theorem 10).

Remark. If the answer to the problem is affirmative with $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$ then the answer to the following problem of RUZIEWICZ [1] is affirmative with $\mathfrak{c}>\aleph_1$ too:

Let E be a given non countable set of power $\mathfrak{c}$ and suppose that there exists a relation R between the elements of E such that for any $x\in E$, the power of the set of the elements $y\in E$ $(y\neq x)$ for which xRy holds, is smaller than a given cardinal number $\mathfrak{r}\geqq\aleph_0$ which is smaller than $\mathfrak{c}$. Two distinct elements x and y of E are called independent if neither xRy nor yRx. We say that a subset of E is a free set if any two points of this subset are independent.

Problem of Ruziewicz. *Does there always exist a free subset of power $\mathfrak{c}$ of E?*

The answer to this problem is affirmative first if $\mathfrak{r}=\aleph_0$ and $\mathfrak{c}$ is either of the form $2^{\mathfrak{f}}$ or of the form $\aleph_{\alpha+1}$ ([2], [3]), then if $\mathfrak{c}$ is a regular cardinal number or if $\mathfrak{c}$ is the countable sum of cardinals smaller than $\mathfrak{c}$ ([4], [5]), finally, in the general case, assuming the generalized continuum hypothesis [6].

We shall consider two cases: 1) there exists a regular cardinal number $\mathfrak{s}$ for which $\mathfrak{r}\leqq\mathfrak{s}<\mathfrak{c}$, 2) there is no such a regular cardinal number $\mathfrak{s}$. It is obvious that in the second case $\mathfrak{c}$ is regular and $\mathfrak{r}$ singular. Thus there exists in this case a regular cardinal number $\mathfrak{r}_0<\mathfrak{r}$ and a subset F of power $\mathfrak{c}$ of E such that, for every $x\in F$, the power of the set $R(x)$ of the elements $y\in E$ for which xRy holds, is smaller than $\mathfrak{r}_0$. [Indeed let $\mathfrak{r}^*$ denote the smallest cardinal number such that $\mathfrak{r}$ is the sum of $\mathfrak{r}^*$ cardinal numbers each of which is less than $\mathfrak{r}$. Since $\mathfrak{r}$ is singular, we have $\mathfrak{r}^*<\mathfrak{r}$. Let $\varphi_{\mathfrak{r}^*}$ denote the initial number of $\mathfrak{r}^*$. There exist regular cardinal numbers $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\xi, \ldots$ $(\xi<\varphi_{\mathfrak{r}^*})$ such that $\mathfrak{r}_\alpha>\mathfrak{r}_\beta>\mathfrak{r}^*$ for $\alpha>\beta$ and

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2+\cdots+\mathfrak{r}_\xi+\cdots.$$

Let E_ξ be the set of elements $x\in E$, for which $\overline{\overline{R(x)}}<\mathfrak{r}_\xi$. Obviously $\bigcup\limits_{\xi<\varphi_{\mathfrak{r}^*}} E_\xi=E$. As $\mathfrak{c}$ is regular and $\mathfrak{r}<\mathfrak{c}$, therefore there exists an ordinal number $\xi_0(<\varphi_{\mathfrak{r}^*})$ such that $E_{\xi_0}=\mathfrak{c}$. Let $F=E_{\xi_0}$ and $\mathfrak{r}_0=\mathfrak{r}_{\xi_0}$.]

Define now the relation R' as follows: Let $xR'y$ if there exists a sequence $x_1, x_2, \ldots, x_k$ of elements of E such that xRx_1, $x_1Rx_2, \ldots, x_kRy$ hold. It is obvious that R' is transitive. In the first case, for any $x\in E$, the power of the set $R'(x)$ of elements $y\in E$, for which $xR'y$ holds, is smaller than $\mathfrak{s}_0<\mathfrak{c}$, where $\mathfrak{s}_0$ is a given regular cardinal number such that $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{s}_0 < \mathfrak{e}$. If $\mathfrak{r} = \aleph_0$, then we suppose even that $\mathfrak{s}_0 > \aleph_0$; this can be done, since $\mathfrak{e} > \aleph_1$. In the second case, for any $x \in F$, the power of the set $R'(x)$ of elements $y \in E$, for which $xR'y$ holds, is smaller than $\mathfrak{r}_0 < \mathfrak{e}$. [Indeed let x be a given element of E and $R(x) = E_1$, $R(E_1) = \bigcup_{x \in E_1} R(x) = E_2, \ldots, R(E_{k-1}) = E_k, \ldots$. It can be easily seen by induction that $\overline{\overline{E}}_k < \mathfrak{b}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, since $\mathfrak{b}$ is regular, where $\mathfrak{b} = \mathfrak{s}_0$ in the first case and $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}_0$ in the second case with $x \in F$. Obviously $R'(x) = \bigcup_{k<\infty} E_k$ and $\overline{\overline{\bigcup_{k<\infty} E_k}} < \mathfrak{b}$.] Let $P(x) = \{x\} \cup \{y \in E : xR'y\}$. The conditions of the problem are satisfied in the first case with $S = Q = E$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{s}_0$, $H(x) = P(x)$, and in the second case with $S = E$, $Q = F$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_0$, $H(x) = P(x)$. If the answer to the problem is affirmative with $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, then there exists a subset Γ of Q with the property $T(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$.

Let $\Sigma_\Gamma = \bigcup_{x \in \Gamma} P(x)$ and $\Pi_\Gamma = \bigcup_{x \neq y \in \Gamma} (P(x) \cap P(y))$. As $\overline{\overline{P(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{\Sigma}}_\Gamma = \mathfrak{m} = \mathfrak{e}$ and $\overline{\overline{\Pi}}_\Gamma < \mathfrak{m} = \mathfrak{e}$, therefore there exists a subset Γ' of power $\mathfrak{m}$ of Γ such that, for any $x \in \Gamma'$, $P'(x) = P(x) - \Pi_\Gamma \neq 0$.

Let us select from every set $P'(x)$ $(x \in \Gamma')$ an element. The set of these elements is obviously free.

N o t a t i o n s. For any subset Q' of Q let

$$\Sigma_{Q'} = \bigcup_{x \in Q'} H(x),$$
$$\Pi_{Q'} = \bigcup_{\substack{x, y \in Q' \\ x \neq y}} (H(x) \cap H(y)).$$

For any cardinal number $\mathfrak{r}$ we denote by $\varphi_\mathfrak{r}$ the initial number of $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^*$ the smallest ordinal number for which $\mathfrak{r}$ is the sum of $\mathfrak{r}^*$ cardinal numbers each of which is smaller than $\mathfrak{r}$ and by $\mathfrak{r}^+$ the cardinal number immediately following $\mathfrak{r}$. For any limes ordinal number β we denote by β^* the smallest ordinal γ for which β is confinal to γ.

T h e o r e m 1. *If $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ and $\mathfrak{q}$ is not the sum of $\mathfrak{n}$ cardinal numbers, each of which is smaller than $\mathfrak{q}$, then the answer to the problem is affirmative.*

P r o o f. Assume that the theorem is false, i. e.

(*A*) if M is a subset of Σ_Q for which $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{q}$, then for every subset Γ of Q for which

$$\Pi_\Gamma \subseteq M,$$

the power of the set Σ_Γ is smaller than $\mathfrak{q}$.

It follows from the conditions $\overline{\overline{\Sigma}}_Q = q$ and $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$ that

(*B*) if M is a subset of Σ_Q such that $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{q}$, then the power of the set of elements $x \in Q$, for which

$$H(x) \cap (\Sigma_Q - M) \neq 0,$$

is $\mathfrak{q}$.

Define the sets M_β and K_β by transfinite induction as follows. Let M_0 be a subset of power less than $\mathfrak{q}$ of Σ_Q and $K_0=0$. Let now β be an ordinal number, $1 \leqq \beta < \varphi_\mathfrak{n}$, and suppose that all sets M_ξ and K_ξ, where $0 \leqq \xi < \beta$, have been already defined such that $M_\xi \subset \Sigma_Q$, $\overline{\overline{M}}_\xi < q$. As $\overline{\beta} < \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q}$ is not the sum of $\mathfrak{n}$ cardinal numbers, each of which is smaller than $\mathfrak{q}$, the power of the set

$$N_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} M_\xi$$

is less than $\mathfrak{q}$. Let K_β be a set of elements $x \in Q$ such that

1) $H(x) \cap (\Sigma_Q - N_\beta) \neq 0$,

2) $\Pi_{K_\beta} \subseteq N_\beta$,

3) for every element x of $Q-K_\beta$ for which $H(x) \neq 0$ there is an element $y \in K_\beta$ such that the set $H(x) \cap H(y)$ is not a subset of N_β.

Let

$$M_\beta = \Sigma_{K_\beta} - N_\beta.$$

As $N_\beta < \mathfrak{q}$ we obtain by (B) that $K_\beta \neq 0$, i. e. $M_\beta \neq 0$. By (A) the power of the set Σ_{K_β} is smaller than $\mathfrak{q}$. It follows that $\overline{\overline{M}}_\beta < \mathfrak{q}$. Consider the set $M = \bigcup_{\xi<\varphi_\mathfrak{n}} M_\xi$. Obviously $\overline{\overline{M}} < \mathfrak{q}$ because $\mathfrak{q}$ is not the sum of $\mathfrak{n}$ cardinal numbers, each of which is smaller than $\mathfrak{q}$ and $\overline{\varphi}_\mathfrak{n} = \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$. It follows from (B) that there is an element x_0 of Q for which

$$H(x_0) \cap (\Sigma_Q - M) \neq 0.$$

Clearly $x_0 \notin K_\xi (\xi < \varphi_\mathfrak{n})$. In the opposite case there would be an ordinal number $\xi_0 < \varphi_\mathfrak{n}$ such that $x_0 \in K_{\xi_0}$. By the definition

$$M_{\xi_0} = \bigcup_{x \in K_{\xi_0}} H(x) - N_{\xi_0},$$

i. e.

$$H(x) \subset N_{\xi_0+1} = \bigcup_{\xi<\xi_0+1} M_\xi \subset M = \bigcup_{\xi<\varphi_\mathfrak{n}} M_\xi,$$

which is impossible.

By the property (3) of K_ξ there exists an element $y_\xi \in K_\xi$ for which the set $H(x_0) \cap H(y_\xi)$ is not a subset of N_ξ. According to the definition of M_ξ we have

$$M_\xi \cap H(x_0) \neq 0$$

for every $\xi < \varphi_\mathfrak{n}$. Let $a_\xi \in M \cap H(x_0)$. Since $M_\nu \cap M_\mu = 0$ if $\nu \neq \mu$, therefore the elements a_ξ are distinct. Thus the power of the set of elements a_ξ is $\mathfrak{n}$. It follows that

$$\overline{\overline{H(x_0)}} \geqq \mathfrak{n}.$$

This is impossible, since $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{n}$, for every element $x \in Q$. The theorem is proved.

Corollary. *If $\mathfrak{n} < \aleph_0$ and $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, then the answer to the problem is affirmative.*

Theorem 2. *If $\mathfrak{q}$ is a regular cardinal number and there exists a subset Γ of Q with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$ such that*

$$\overline{\overline{\Pi_\Gamma}} = \mathfrak{r}$$

is a regular cardinal number and $\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{n}$, then there is a subset of Γ with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$.

First we prove the following

Lemma. *Let $\mathfrak{a}$ be a regular cardinal number, A a set of power $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ a cardinal number, which is smaller than $\mathfrak{a}$. If to every element x of A there corresponds an ordinal number $g(x) < \varphi_\mathfrak{b}$, then there exists an ordinal number $\pi < \varphi_\mathfrak{b}$ and a subset A' of power $\mathfrak{a}$ of A such that for every element x of A' we have $g(x) < \pi$.*

Proof. Let $K(\alpha)$ denote for every ordinal number $\alpha < \varphi_\mathfrak{b}$ the set of all $x \in A$ for which $g(x) = \alpha$. It is clear that

$$A = \bigcup_{\alpha < \varphi_\mathfrak{b}} K(\alpha).$$

As $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a}$ is regular it follows that there exists an ordinal number $\pi' < \varphi_\mathfrak{b}$ for which $\overline{\overline{K(\pi')}} = \mathfrak{a}$. By the definition of $K(\alpha)$ the lemma holds with $A' = K(\pi')$ and $\pi = \pi' + 1$.

Proof of the theorem 2. Let $\bigcup_{\gamma < \varphi_\mathfrak{r}} K_\gamma = \Pi_\Gamma$ be a decomposition of Π_Γ into the sum of mutually disjoint non empty sets K_γ $(\gamma < \varphi_\mathfrak{r})$ such that for any $\nu < \varphi_\mathfrak{r}$ we have

$$\overline{\overline{\bigcup_{\gamma < \nu} K_\gamma}} < \mathfrak{r}.$$

Consider now the set Ψ of $x \in \Gamma$ for which $H(x) - \Pi_\Gamma \neq 0$. Clearly the power of the set Ψ is $\mathfrak{q}$, because $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$, $\overline{\overline{\Sigma_\Gamma}} = \mathfrak{q}$ and $\overline{\overline{\Pi_\Gamma}} < \mathfrak{q}$.

As $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{n}$ and $\mathfrak{r} (\geqq \mathfrak{n})$ is regular, for every $x \in \Psi$ there exists an ordinal number $f(x) < \varphi_\mathfrak{r}$ so that for any $\gamma > f(x)$, $K_\gamma \cap H(x)$ is empty. Thus by the lemma there exists an ordinal number $\pi < \varphi_\mathfrak{r}$ and a subset Ψ' of power $\mathfrak{q}$ of Ψ such that for every element x of Ψ' we have $f(x) < \pi$. If $x \in \Gamma$, then the sets $H'(x) = H(x) - \Gamma$ are mutually disjoint. It follows by the definition of Ψ that $\Sigma_{\Psi'} = \mathfrak{q}$. As

$$\Pi_{\Psi'} \subseteqq \bigcup_{\gamma < \pi} K_\gamma$$

and $\overline{\overline{\bigcup_{\lambda < \pi} K_\gamma}} < \mathfrak{r}$, therefore Ψ' has the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$. The theorem is proved.

Theorem 3. *If $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha + k}$ (where α is an arbitrary and k (> 1) a finite ordinal number) and $\mathfrak{r} = \max\{\aleph_{\alpha+1}, \mathfrak{n}^+\}$, then there is a subset of Q with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$.*

Proof. Let L denote the set of cardinal numbers $\mathfrak{k}$ for each of which there exists a subset of Q with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{k})$. L is non empty, since by the theorem 1, $\aleph_{\alpha+k} \in L$. According to the well-ordering theorem L is well-ordered. Let $\mathfrak{k}_0$ be the first element of L. By the theorem 2, $\mathfrak{k}_0 \leqq \mathfrak{r}$. The theorem is proved.

Theorem 4. *Let $\mathfrak{q}$ be a singular cardinal number, $\mathfrak{r}_0$ a cardinal number which is smaller than q and $\{\mathfrak{q}_\xi\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}^*}}$ a sequence of regular cardinal numbers such that $\mathfrak{r}_0 < \mathfrak{q}_\xi$, $\mathfrak{q}_\beta > \mathfrak{q}_\alpha (\beta > \alpha)$, $\max\{\mathfrak{n}, \mathfrak{q}^+\} < \mathfrak{q}_\xi < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q} = \sum_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}^*}} \mathfrak{q}_\xi$. If, for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{q}^*}$, Q_ξ is subset of power $\mathfrak{q}_\xi$ of Q such that Q_ξ has a subset Q'_ξ with the property $T(q_\xi, \mathfrak{r}_0)$, then Q has a subset with the property $T(\mathfrak{q}, [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{q}^*]^+)$.*

Proof. Define the sets $Q''_\xi (\xi < \varphi_{\mathfrak{q}^*})$ by transfinite induction as follows: Let $Q''_0 = Q'_0$. Let furthermore η be an ordinal number, $0 < \eta < \varphi_{\mathfrak{q}^*}$, and suppose that all sets Q''_ξ, where $0 \leqq \xi < \eta$, have been already defined such that $\overline{\overline{Q''_\xi}} = \mathfrak{q}_\xi$ and

$$\overline{\overline{\Sigma_{L_\xi} \cap \Sigma_{Q''_\xi}}} \leqq \mathfrak{r}_0$$

where $L_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} Q''_\zeta$.

Now we show that Q'_η has a subset R_η for which

a) $\overline{\overline{\Sigma}}_{R_\eta} < \mathfrak{q}_\eta$,

b) $\overline{\overline{\Sigma_{L_\eta} \cap \Sigma_{Q'_\eta - R_\eta}}} \leqq \mathfrak{r}_0$ (where $L_\eta = \bigcup_{\zeta<\eta} Q''_\zeta$).

It is obvious that for fixed η the sets $H^\eta(x) = H(x) - \Pi_{Q'_\eta} (x \in Q'_\eta)$ are mutually disjoint. As $\mathfrak{q}_\eta$ is a regular cardinal number, $q_\xi < q_\eta$ $(\xi < \eta)$ and $\max\{\overline{\eta}, \mathfrak{n}\} < \mathfrak{q}_\eta$, therefore

$$\overline{\overline{\bigcup_{x\in L_\eta} H(x)}} = \overline{\overline{\bigcup_{\xi<\eta} \bigcup_{x\in Q''_\xi} H(x)}} \leqq \overline{\eta}\,\mathfrak{n} \sum_{\xi<\eta} \mathfrak{q}_\xi < \overline{\eta}\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{q}_\eta = \mathfrak{q}_\eta .$$

It follows that for the set R_η of elements x of Q'_η for which

$$H^\eta(x) \cap \Big(\bigcup_{y\in L_\eta} H(y)\Big) \neq 0,$$

the relation

$$\overline{\overline{\Sigma}}_{R_\eta} < q_\eta$$

holds. Let $Q''_\eta = Q'_\eta - R_\eta$. As $\overline{\overline{\Sigma}}_{R_\eta} < \mathfrak{q}_\eta$ and Q'_η has the property $T(\mathfrak{q}_\eta, \mathfrak{r}_0)$, therefore $\overline{\overline{Q''_\eta}} = \mathfrak{q}_\eta$ and Q''_η has the property $T(\mathfrak{q}_\eta, \mathfrak{r}_0)$.

Let

$$\Gamma = \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}^*}} Q''_\xi .$$

Clearly Γ has the property $T(\mathfrak{q}, [\mathfrak{r}_0, \mathfrak{q}^*]^+)$.

T h e o r e m 5. *If* $\mathfrak{q} > \aleph_0$ *and* $\mathfrak{q}_0$ *is a cardinal number such that* $\mathfrak{n} < \mathfrak{q}_0 < \mathfrak{q}$ *and* $\mathfrak{q}_0 \geqq \aleph_0$, *then there exists a subset* Q_0 *of* Q *such that*

$$\overline{\overline{Q}}_0 = \overline{\overline{\Sigma}}_{Q_0} = \mathfrak{q}_0.$$

P r o o f. Let $\{x_\xi\}_{\xi<\varphi_\mathfrak{q}}$ be any well-ordering of Q of type $\varphi_\mathfrak{q}$. We define a sequence of the type $\varphi_\mathfrak{q}$ of elements of Q by transfinite induction in the following way: Put $y_0 = x_0$. Let now η be an ordinal number, $0 < \eta < \varphi_\mathfrak{q}$, and suppose that all elements y_ξ, where $0 \leqq \xi < \eta$, have been already defined. Let ζ_0 be the smallest ordinal number ζ for which

$$H(x_\zeta) \not\subseteq \bigcup_{\xi<\eta} H(y_\xi). \tag{1}$$

There exists such an ordinal number ζ, for $\overline{\overline{\eta}} < \mathfrak{q}$, $\overline{\overline{H(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$ and $\overline{\overline{\Sigma}}_Q = \mathfrak{q}$. Let $y_\eta = x_{\zeta_0}$. It follows from (1) that $\overline{\overline{\bigcup_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}_0}} H(y_\zeta)}} = \mathfrak{q}_0$, since $\overline{\overline{H(y_\zeta)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{q}_0$. Let $Q_0 = \{y_\zeta\}_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}_0}}$. Obviously $\overline{\overline{Q_0}} = \mathfrak{q}_0$. The theorem is proved.

T h e o r e m 6. *If* $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+\omega}$ *(where* α *is an arbitrary and* ω *the smallest infinite ordinal number) and* $\mathfrak{p} = \max\{\aleph_{\alpha+1}, \mathfrak{n}^+\}$, *then* Q *has a subset* Γ *with the property* $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{p})$.

P r o o f. Let k_0 be the smallest natural number k for which $\mathfrak{n} < \aleph_{\alpha+k}$. By theorem 5, for every natural number there exists a subset Q_k of power $\aleph_{k_0+k}$ of Q for which $\overline{\overline{Q}}_k = \overline{\overline{\Sigma}}_{Q_k} = \aleph_{k_0+k}$. Applying theorem 3 with $\mathfrak{q} = \aleph_{k_0+k}$ and $Q = Q_k$ we obtain that Q_k has a subset Γ_k with the property $T(\aleph_{k_0+k}, \mathfrak{p})$. Thus the conditions of the theorem 4 are satisfied with $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+\omega}$, from where our assertion follows. The theorem is proved.

T h e o r e m 7. *If* 1) $\mathfrak{n} = \mathfrak{p} = \aleph_0$ *and* $\mathfrak{q}$ *is a regular cardinal number, or if* 2) $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+2}$ *and* $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \leqq \aleph_\alpha$, *then* Q *has a subset with the property* $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{n})$.

P r o o f. In the first case by the theorem 1 with $\mathfrak{n} = \aleph_0$, and in the second case by the theorems 1 and 2, Q has a subset Γ with the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ where $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$ in the first case and $\mathfrak{r} = \aleph_{\alpha+1}$ in the second case. As $\overline{\overline{\Sigma}}_\Gamma = q$ and $\overline{\overline{\Pi}}_\Gamma < q$, we see that Γ has a subset Γ_1 of power $\mathfrak{q}$ such that, for every $x \in \Gamma_1$, we have $H_1(x) = H(x) - \Pi_\Gamma \neq 0$. Let $N(\Pi_\Gamma)$ be the set of all subsets of power less than $\mathfrak{n}$ of Π_Γ. Put $H_2(x) = H(x) \cap \Pi_\Gamma$. It is obvious that $\overline{\overline{N(\Pi_\Gamma)}} < \mathfrak{q}$ and $H_2(x) \in N(\Pi_\Gamma)$. It follows by the regularity of $\mathfrak{q}$ that Γ_1 has a subset Γ_2 of power $\mathfrak{q}$ such that for every $x, y \in \Gamma_2$ we have $H_2(x) = H_2(y)$. By the definition for every pair x, y of distinct elements of Γ we have $H_1(x) \cap H_1(y) = 0$. It follows that Γ_2 has the property $T(\mathfrak{q}, \mathfrak{n})$. The theorem is proved.

T h e o r e m 8. *If* $\mathfrak{q}$ *is a singular cardinal number and if* 1) $\mathfrak{n} = \aleph_0$, *or if* 2) $\aleph_0 \leqq \mathfrak{n} < \mathfrak{q}$ *and* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ *for every* $\aleph_\alpha < \mathfrak{q}$, *then* Q *has a subset with the property* $T(\mathfrak{q}, [\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{q}^*]^+)$.

Proof. Let $\{\eta_\xi\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}^*}}$ be a sequence of the type $\varphi_{\mathfrak{q}^*}$ of ordinal numbers such that $\eta_\nu < \eta_\mu$ $(\nu < \eta)$, $\max\{\mathfrak{q}^*, \mathfrak{n}\} < \aleph_{\eta_\xi+2} < \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{q} = \sum_{\xi<\varphi_{\mathfrak{q}^*}} \aleph_{\eta_\xi+2}$. By theorem 5 for every ξ $(\xi < \varphi_{\mathfrak{q}^*})$ there exists a subset Q_ξ of Q such that

$$\overline{\overline{Q}}_\xi = \overline{\overline{\Sigma}}_{Q_\xi} = \aleph_{\eta_\xi+2}.$$

Applying the theorem 7 with $q = \aleph_{\eta_\xi+2}$ and $Q = Q_\xi$ we obtain that Q_ξ has a subset with the property $T(\aleph_{\eta_\xi+2}, \mathfrak{n})$. By theorem 4 the theorem is proved.

The following two theorems are due to P. ERDŐS.

Theorem 9. *If $\mathfrak{q}$ is a singular cardinal number and $\mathfrak{p} \leqq (\mathfrak{q}^*)^+$, then the answer to the problem, in general, is negative.*

Proof. Let

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{q}})$$

be any well-ordering of Q of the type $\varphi_{\mathfrak{q}}$. We define $H(x)$ as follows: Let $H(x_\xi) = 0$ if $\xi < \varphi_{\mathfrak{q}^*}$, and $H(x_\xi) = \{x_\eta, x_\xi\}$ if $\omega_\eta \leqq \xi < \omega_{\eta+1}$ $(0 < \eta < \varphi_{\mathfrak{q}^*})$. Let Γ be a subset of power $\mathfrak{q}$ of Q. It is obvious that $\overline{\overline{\Sigma}}_\Gamma = \mathfrak{q}$ and $\overline{\overline{\Pi}}_\Gamma = \mathfrak{q}^*$.

Theorem 10. *If $\mathfrak{q} = \aleph_{\alpha+1}$, $\mathfrak{s} = \aleph_\alpha$ is singular, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} = (\mathfrak{s}^*)^+$ and $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$ for every β, then the answer to the problem, in general, is negative.*

Proof. Let

$$Q = R \cup \left(\bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{s}^*}} Q_\xi \right)$$

be a decomposition of Q into the sum of mutually disjoint non empty sets such that $\overline{\overline{R}} = \mathfrak{q}$ and $\overline{\overline{Q}}_\xi = \aleph_\alpha = \mathfrak{s}$, for any $\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$. Let P be the set of all functions $y(\xi)$ defined on the set of all ordinal numbers $\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$ and such that, for each $\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$, $y(\xi) \in Q_\xi$. It is clear that $\overline{\overline{P}} = \aleph_\alpha^{\mathfrak{s}^*}$. Thus, by the generalized continuum hypothesis, $\overline{\overline{P}} = \aleph_{\alpha+1}$. Let $\{x_\eta\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{q}}}$ and $\{y_\eta\}_{\eta<\varphi_{\mathfrak{q}}}$ be any wellordering of the type $\varphi_{\mathfrak{q}}$ of R and P, respectively. We define $H(x)$ as follows: Put $H(x) = 0$ if $x \in Q_\xi (\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*})$, and $H(x_\eta) = \{x_\eta\} \cup \{y_\eta(\xi)\}_{\xi<\varphi_{\mathfrak{s}^*}}$ for $x_\eta \in R$. Let $D = \{x_{\eta_\zeta}\}_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}}}$ be a subset of type $\varphi_{\mathfrak{q}}$ of R. Let further D' be the set of elements $x_\tau \in D$ for which there exists at least one $\xi_0 < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$ such that $y_\tau(\xi_0) \neq y_{\eta_\zeta}(\xi_0)$ for every $\eta_\zeta \neq \tau$. Clearly $\overline{\overline{D'}} \leqq \mathfrak{s}\,\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s} = \aleph_\alpha$. Thus $\overline{\overline{D-D'}} = q = \aleph_{\alpha+1}$. By the definition of $H(x)$ it follows that $\overline{\overline{\Sigma}}_{D-D'} = \mathfrak{q}$. Put $\aleph_\alpha = \sum_{\nu<\varphi_{\mathfrak{s}^*}} \aleph_\nu$. There exists an increasing sequence $\{\xi_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{s}^*}}$ of the ordinal numbers $\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$ such that $\overline{\overline{\{y_{\eta_\zeta}(\xi_\nu)\}}}_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}}} \geqq \aleph_\nu$ for every $\nu < y_{\mathfrak{s}^*}$. Suppose the contrary. Then there exists an ordinal number $\mu < \alpha$ so that $\overline{\overline{\{\varphi_{\eta_\zeta}(\xi)\}}}_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}}} \leqq \aleph_\mu$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{s}^*}$. But then $\overline{\overline{\{y_{\eta_\zeta}\}}}_{\zeta<\varphi_{\mathfrak{q}}} \leqq \aleph_\mu^{\mathfrak{s}^*} < \aleph_{\alpha+1}$, which is a contradiction. It follows by the definition of D and $H(x)$ that $\overline{\overline{\Pi}}_{D-D'} = \aleph_\alpha$. The theorem is proved.

Theorem 11. *Let $\mathfrak{r}$ be an arbitrary cardinal number, $\mathfrak{r} \geqq \aleph_0$, and $\aleph_\alpha$ a singular cardinal number such that α is not confinal to ω and $\aleph_\alpha > \mathfrak{r}$. If for every $\aleph_\beta$, $\aleph_\alpha > \aleph_\beta > \mathfrak{r}$, for which β is confinal to ω, the answer to the* *problem is affirmative with* $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}=\aleph_\beta$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$, *then there exists an ordinal number* $\beta_0<\alpha$ *such that the answer to the problem is affirmative with* $\mathfrak{q}=\aleph_\alpha$, $\mathfrak{p}=[\aleph_{\beta_0}\bar{\alpha}^*]^+$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$.

Proof. Suppose that the conditions of the problem are satisfied with $\mathfrak{q}=\aleph_\alpha$ and $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$. According to the theorem 5, for every $\xi<\alpha$ for which $\max\{\mathfrak{n},\mathfrak{q}^*\}<\aleph_\xi$, there exists a subset Q_ξ of Q such that

$$\bar{\bar{Q}}_\xi=\bar{\bar{\Sigma}}_{Q_\xi}=\aleph_\xi.$$

Let D be the set of all ordinal numbers ξ which are confinal to ω and for which $\max\{\mathfrak{n},\mathfrak{q}^*\}<\aleph_\xi<\aleph_\alpha$. If $\xi\in D$, then by the condition Q_ξ has a subset Γ_ξ with the property $T(\aleph_\xi,\aleph_\xi)$ i. e.

$$\bar{\bar{\Sigma}}_{\Gamma_\xi}=\aleph_\xi \quad\text{and}\quad \bar{\bar{\Pi}}_{\Gamma_\beta}=\aleph_{f(\xi)}<\aleph_\xi.$$

We may assume that for every $x\in\Gamma_\xi$

$$H(x)-\Pi_{\Gamma_\xi}\neq 0.$$

Thus to every $\xi\in D$ there corresponds an ordinal number $f(\xi)$ such that $f(\xi)<\xi$. There exists an ordinal number β_0 and a sequence $\{\xi_\eta\}_{\eta<\alpha^*}$ of the type α^* of D such that $f(\xi_\eta)<\beta_0$ and $\lim\limits_{\eta<\alpha^*}\xi_\eta=\alpha$ (see [7]). It follows that for every Γ_{ξ_η} $(\eta<\alpha^*)$

$$\bar{\bar{\Pi}}_{\Gamma_{\xi_\eta}}<\aleph_{\beta_0}.$$

Consider now those $\xi_\eta(\eta<\alpha^*)$ for which η is of the form $\beta+1$. Let $\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}}$ be a fixed regular cardinal number such that $\aleph_{\xi_\beta}<\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}}<\aleph_{\xi_{\beta+1}}$. Let furthermore $\Gamma_{\xi_{\eta(\beta)}}$ be a subset of the power $\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}}$ of Γ_{ξ_η}. It is obvious that $\Gamma_{\xi_{\eta(\beta)}}$ has the property $T(\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}},\aleph_{\beta_0})$. As $\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}}$ is regular and $\aleph_\alpha=\sum\limits_{\beta<\alpha^*}\aleph_{\xi_{\eta(\beta)}}$, therefore applying the theorem 4 with $\mathfrak{q}=\aleph_\alpha$, $\mathfrak{r}_0=\aleph_{\beta_0}$ and $Q_\beta=\Gamma_{\xi_{\eta(\beta)}}$, we obtain that $\bigcup\limits_{\beta<\alpha^*}\Gamma_{\xi_{\eta(\beta)}}$ has a subset with the property $T(\aleph_\alpha,[\aleph_\beta\bar{\alpha}^*]^+)$. The theorem is proved.

References.

[1] S. Ruziewicz, Une généralisation d'un théorème de M. Sierpiński, *Publications Math. de l'Université de Belgrade,* **5** (1936), 23—27.

[2] W. Sierpiński, Sur un problème de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, **28** (1937), 71—74.

[3] D. Lázár, On a problem in the theory of aggregates, *Compositio Math.*, **3** (1936), 304.

[4] Sophie Piccard, Sur un problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, **29** (1937), 5—9.

[5] Sophie Piccard, Solution du problème de M. Ruziewicz de la théorie des relations pour les nombres cardinaux $\mathfrak{m}<\aleph_\Omega$, *Comptes Rendus Varsovie,* **30** (1937), 12—18.

[6] P. Erdős, Some remarks on set theory, *Proceedings American Math. Soc.*, **1** (1950), 133—138.

[7] G. Fodor, Generalization of a theorem of Alexandroff and Urysohn, *these Acta*, **16** (1955), 204—206.

(Received October 1, 1955.)

Note on the Theory of Monotone Operator Functions.

By A. KORÁNYI in Szeged.

The real-valued function $f(x)$ is said to be a *monotone operator function* in the interval (a, b) if, for any two bounded selfadjoint operators A, B on Hilbert space $\mathfrak{H}$, whose spectrum lies in (a, b), $A \geqq B$ implies $f(A) \geqq f(B)$. If we consider only operators on n-dimensional Euclidean space E_n, then these operators may be represented by matrices of type $n \times n$, and in this case a function $f(x)$ with the above property is called a *monotone matrix function* of order n.

The theory of monotone matrix functions has been developed by K. LÖWNER [4]; he gives first some necessary and sufficient conditions for a function to be a monotone matrix function of order n, and then, as a result of further deep investigations including questions of interpolation he arrives at the following criterion: A real-valued function $f(x)$ defined in (a, b) is monotone of arbitrarily high order n if and only if it satisfies the following condition (L): $f(x)$ is analytic in (a, b), can be analytically continued onto the entire upper half-plane, and has there a non-negative imaginary part.

The problem of monotone operator functions has recently been considered by J. BENDAT and S. SHERMAN [1][1]) Making use only of the necessity of LÖWNER's conditions for the monotonity of order n they proved that a function $f(x)$ with $f(0)=0$ is a monotone operator function in the interval $(-R, R)$ if and only if it is representable in the integral form

$$(1) \qquad f(x)=\int_{-\frac{1}{R}}^{\frac{1}{R}} \frac{x}{1-tx}\, d\alpha(t)$$

with a non-decreasing bounded function $\alpha(t)$. (The restrictions $f(0)=0$ and $(-R, R)$ do not of course affect the generality; moreover, it is sufficient to consider only the case $R=1$.) They also proved that the class of monotone operator functions is identical with the class of monotone matrix functions of arbitrarily high order n and so it is characterized by LÖWNER's criterion.

---

1) The first results on this domain are due to HEINZ [2].

Now, an immediate proof of the equivalence of the conditions (L) and of the integral representation (1) would make possible to arrive to LÖWNER's criterion on the simpler way taken by BENDAT and SHERMAN. This equivalence can be proved by making use of a general theorem of R. NEVANLINNA [5] on asymptotic developments.[2]) However, the following direct proof may have, for its simplicity, some interest of its own.

Theorem. *Let the function $f(z)$ be defined, for $|z|<1$, by the convergent power series with real coefficients*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

and suppose that $f(z)$ is analytic on the whole upper half-plane and that $\operatorname{Im} f(z) \geqq 0$ *for* $\operatorname{Im} z>0$. *Then $f(z)$ admits of the integral representation*

$$f(z)=\int_{-1}^{1} \frac{z}{1-tz}\, d\alpha(t) \tag{1}$$

with a non-decreasing, bounded function $\alpha(t)$.

Proof. Evidently, $f(z)$ can be continued analytically onto the lower half-plane too, thus the function $g(z)=-f\left(\frac{1}{z}\right)$ will be analytic on the entire complex plane, except possibly the interval $[-1, 1]$ of the real axis. We have $\operatorname{Im} g(z) \geqq 0$ for $\operatorname{Im} z>0$, and, for $|z|>1$, we have the development

$$g(z)=-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Choose a number $N>1$, and denote by K the circle of radius N with centre in the origin. We have

$$c_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_K \zeta^{n-1} g(\zeta)\, d\xi \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

If we denote by Γ the part of the circle K in the upper half-plane, we have by $g(\bar\zeta)=\overline{g(\zeta)}$

$$c_n=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int_\Gamma \zeta^{n-1} g(\zeta)\, d\zeta.$$

Now consider the following oriented straight line segments in the complex plane: $A=[N, N+iy]$, $B=[N+iy, -N+iy]$, $C=[-N+iy, -N]$ $(y>0)$. We may write

$$c_n=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\int_A+\int_B+\int_C\right)\zeta^{n-1} g(\zeta)\, d\zeta.$$

---

[2]) See also [7], pp. 24—26.

Since $\zeta^{n-1}g(\zeta)$ is continuous at the points $\zeta=\pm N$, we have, for $y\to 0$,

$$c_n=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_B \zeta^{n-1}g(\zeta)d\zeta+O(y).$$

Now, if we make use of the binomial formula for $\zeta^{n-1}=(x+iy)^{n-1}$, and of the boundedness for $y\to 0$ of each of the integrals

$$\int\limits_{-N}^{N} x^m \operatorname{Re} g(x+iy)dx,\ \int\limits_{-N}^{N} x^m \operatorname{Im} g(x+iy)dx \qquad (m=0,1,2,\dots)^{3)}$$

we obtain that

(2) $$c_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N} x^{n-1}\operatorname{Im} g(x+iy)dx+O(y).$$

With the help of the non-decreasing function

$$\alpha_y(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{t}\operatorname{Im} g(x+iy)dx$$

this may be written in the form

$$c_n=\int\limits_{-N}^{N} t^{n-1}d\alpha_y(t)+O(y).$$

The total variation $V(\alpha_y)$ of the function $\alpha_y(t)$ is

$$V(\alpha_y)=\alpha_y(N)-\alpha_y(-N)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}\operatorname{Im} g(x+iy)dx,$$

that is, applying (2) with $n=1$,

(3) $$V(\alpha_y)=c_1+O(y).$$

---

3) This follows from the boundedness, for $y\to 0$, of each of the integrals

$$J_m=\int\limits_{-N}^{N} x^m g(x+iy)dy \qquad (m=0,1,\dots).$$

To see this, first observe that the integrals

$$G_m=\int\limits_{-N}^{N}(x+iy)^m g(x+iy)dx=\int\limits_{-N+iy}^{N+iy} z^m g(z)dz \qquad m=0,1\ \dots$$

are bounded as $y\to 0$ since the points $\pm N$ are in the domain of regularity of the functions $z^m g(z)$. Now, from the identity $x^m=(z-iy)^m$ it follows, using again the binomial formula,

$$J_m=\sum_{\nu=0}^{m}(-iy)^{\nu}\binom{m}{\nu}G_{m-\nu}=G_m-iy\sum_{\nu=1}^{m}(-iy)^{\nu-1}\binom{m}{\nu}G_{m-\nu}=G_m+O(y),$$

which proves our assertion.

So, making y converge to zero through a sequence y_n, we may apply the well-known theorem of HELLY. Thus there exists a non-decreasing function of bounded variation $\alpha(t)$ such that

$$c_n = \int_{-N}^{N} t^{n-1}\, d\alpha(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

As N is an arbitrary number > 1, we see that $\alpha(t)$ is constant outside $[-1, 1]$, so we have

$$c_n = \int_{-1}^{1} t^{n-1}\, d\alpha(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

and, for $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \int_{-1}^{1} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} z^n\, d\alpha(t) = \int_{-1}^{1} \frac{z}{1 - tz}\, d\alpha(t),$$

thus finishing the proof of the theorem.

Finally we add some remarks.

1. If we suppose that $\alpha(t)$ is conveniently normed, e. g. by demanding $\alpha(-1) = 0$ and continuity from the left, $\alpha(t)$ is determined by (4) uniquely.

2. From the asymptotic equality (3) it follows that $V(\alpha) = c_1$, with $V(\alpha)$ the total variation of $\alpha(t)$.

3. The converse of the theorem is also true; every function of the form (1) has the properties enumerated in the theorem, as it can be seen by an elementary calculation.

4. Applying the substitution $\lambda = -\frac{M}{z}$ in the theorem we obtain for any function $g(\lambda)$ which is analytic everywhere except the real interval $[-M, M]$, tends to 0 for $\lambda \to \infty$, and has a non-negative imaginary part for λ in the upper half-plane, the integral representation

$$g(\lambda) = \int_{-M}^{M} \frac{d\beta(t)}{t - \lambda} \tag{5}$$

with a non-decreasing, bounded $\beta(t)$.

These conditions are fulfilled e. g. by the function $g(\lambda) = (R_\lambda u, u)$, if R_λ denotes the resolvent of a selfadjoint operator A, $M = \|A\|$, and u is an arbitrary element in Hilbert space.[4]) So we have a representation in the form (5) with $V(\beta) = \|u\|^2$, as a consequence of Remark 2. From these the spectral theorem for bounded selfadjoint operators follows by standard methods.[5])

---

[4]) See e. g. STONE [8].

[5]) This in essentially but a modern variant of the classical proof of E. HELLINGER. For the non-bounded case cf. LENGYEL [3] and NIEMINEN [6].

Bibliography.

[1] J. Bendat and S. Sherman, Monotone and convex operator functions, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **79** (1955) 58—71.

[2] E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Annalen*, **123** (1951), 415—438.

[3] B. Lengyel, On the spectral theorem of selfadjoint operators, *these Acta*, **9** (1939), 174—186.

[4] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, *Math. Zeitschrift*, **38** (1934), 177—216.

[5] R. Nevanlinna, Asymptotische Entwicklungen beschränkter Functionen und das Stieltjessche Momentenproblem, *Annales Acad. Sci. Fennicae*, series A, **18** (5) (1922).

[6] T. Nieminen, On the spectral theorems of unitary and selfadjoint operators, *Annales Acad. Sci. Fennicae*, series A, I. No. 187 (1955).

[7] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments* (New York, 1943).

[8] M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space* (New York, 1932).

(Received October 26, 1955.)

Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.

Par J. DIXMIER à Dijon (France).

Dans tout cet article, K désigne un corps commutatif. Toutes les algèbres de Lie et toutes les représentations de ces algèbres sont supposées de dimension finie sur K.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{g}$-module. On désigne par $C^i(\mathfrak{g}, M)$ le groupe des cochaînes alternées de degré i sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. (On convient que $C^i(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour $i < 0$.) On désigne par d l'opérateur de cobord dans la somme directe des $C^i(\mathfrak{g}, M)$, par $H^i(\mathfrak{g}, M)$ le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie (cf. [4], dont nous utilisons les notations). Lorsque M est le module de représentation trivial de dimension 1 sur K, on écrit $C^i(\mathfrak{g}), H^i(\mathfrak{g})$ au lieu de $C^i(\mathfrak{g}, M)$, $H^i(\mathfrak{g}, M)$.

Comme observé dans [2], le th. 3 de [1] peut s'énoncer en disant que $H^2(\mathfrak{g}) \neq 0$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de dimension > 1. D'autre part, comme $H^1(\mathfrak{g})$ est le dual de l'espace $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, une partie du th. 1 de [3] peut s'énoncer en disant que $\dim H^1(\mathfrak{g}) \geqq 2$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente de dimension > 1. Nous allons montrer que, pour $1 \leqq i \leqq \dim \mathfrak{g} - 1$, on a $\dim H^i(\mathfrak{g}) \geqq 2$ si $\mathfrak{g}$ est nilpotente. (D'après [5], ceci s'interprète dans la cohomologie des espaces homogènes compacts des groupes de Lie connexes nilpotents.) Plus généralement, nous allons étudier les $H^i(\mathfrak{g}, M)$ pour $\mathfrak{g}$ nilpotente.

1. Une suite exacte.

Proposition 1. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$, M un $\mathfrak{g}$-module. On a une suite exacte*

$$\cdots \xrightarrow{u_{i-1}} H^{i-1}(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{s_i} H^i(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{r_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{u_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{s_{i+1}} H^{i+1}(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \cdots$$

dans laquelle l'homomorphisme u_i est l'homomorphisme défini canoniquement par x dans le $\mathfrak{g}$-module $H^i(h, M)$, et l'homomorphisme r_i est l'homomorphisme de restriction.

Démonstration. Soit $D(\mathfrak{g}, M)$ le noyau de l'homomorphisme canonique $C(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C(\mathfrak{h}, M)$. Ce noyau est somme directe de ses intersections.

$D^i(\mathfrak{g}, M)$ avec les $C^i(\mathfrak{g}, M)$. Ecrivons la suite exacte

$$0 \to D(\mathfrak{g}, M) \to C(\mathfrak{g}, M) \to C(\mathfrak{h}, M) \to 0.$$

Il en résulte la suite exacte

$$(1) \qquad \cdots \to H^i(D(\mathfrak{g}, M)) \to H^i(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{r_i} H^i(\mathfrak{h}, M) \xrightarrow{\delta_i} H^{i+1}(D(\mathfrak{g}, M)) \to$$
$$\to H^{i+1}(\mathfrak{g}, M) \to \cdots$$

où δ_i est l'homomorphisme bord. D'autre part, pour toute cochaîne $f \in C^i(\mathfrak{g}, M)$, soit $\tilde{f}$ la restriction à $\mathfrak{h}$ de la cochaîne f_x (rappelons que $f_x(x_1, \ldots, x_{i-1}) = f(x, x_1, \ldots, x_{i-1})$). Il est immédiat que l'application $f \to \tilde{f}$ définit un isomorphisme ϱ_i de l'espace vectoriel $D^i(\mathfrak{g}, M)$ sur l'espace vectoriel $C^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$, et que $\varrho_{i+1} \circ d = -d \circ \varrho^i$. Donc ϱ^i définit un isomorphisme σ_i de $H^i(D(\mathfrak{g}, M))$ sur $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$, et la suite exacte (1) devient la suite exacte de la proposition, avec $u_i = \sigma_{i+1} \circ \delta_i$. Soit $a \in H^i(\mathfrak{h}, M)$. Pour obtenir $\delta_i a$, on prend un cocycle $z \in C^i(\mathfrak{h}, M)$ représentatif de la classe a, et une cochaîne $g \in C^i(\mathfrak{g}, M)$ dont la restriction à $\mathfrak{h}$ soit z; alors, dg est une cochaîne de $D^{i+1}(\mathfrak{g}, M)$ dont la classe est $\delta_i a$. Donc $u_i a$ est la classe de la restriction à $\mathfrak{h}$ de $(dg)_x$. Or, $(dg)_x = x \cdot g - d(g_x)$ (cf. [4], p. 592). Ainsi, $(dg)_x$ est cohomologue à $x \cdot g$, donc la restriction à $\mathfrak{h}$ de $(dg)_x$ est cohomologue à $x \cdot z$, et finalement $u_i a = x \cdot a$.

La prop. 1 peut être considérée comme un cas particulier de la suite spectrale de [4] relative à un idéal.

Remarque. A l'aide de la prop. 1, on généralise aisément le th. 1 de [1]. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{a}$-module trivial. On a $H^i(\mathfrak{a}, M) = H^i(\mathfrak{a}) \otimes M = L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, M)$ ($\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ désignant le dual de l'espace vectoriel $H^i(\mathfrak{a})$, et $L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, M)$ l'espace des applications linéaires de $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ dans M). En particulier, $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ étant considéré comme un $\mathfrak{a}$-module trivial, $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})}) = L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ contient un élément correspondant à l'application identique de $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$. Appelons-le la classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$.

Supposons que $\mathfrak{a}$ soit un idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ est un $\mathfrak{g}$-module, et $\mathfrak{a}$ opère dans $\widehat{H^i(\mathfrak{a})}$ de manière triviale. Les structures canoniques de $\mathfrak{g}$-modules de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ et de $L(\widehat{H^i(\mathfrak{a})}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ s'identifient, donc la classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ est annulée par $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, la proposition 1 montre alors ceci:

La classe canonique de $H^i(\mathfrak{a}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$ est l'image par r_i d'une classe de $H^i(\mathfrak{g}, \widehat{H^i(\mathfrak{a})})$.

Pour $i = 2$, ce résultat, exprimé en langage d'extensions, est le th. 1 de [1].

2. Représentation des algèbres de Lie nilpotentes.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, M un $\mathfrak{g}$-module. Les $\mathfrak{g}$-modules quotients des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M seront appelés les $\mathfrak{g}$-modules contenus dans M. Ce sont aussi les sous-$\mathfrak{g}$-modules des $\mathfrak{g}$-modules quotients de M. Les $\mathfrak{g}$-modules contenus dans M et irréductibles sont les quotients d'une suite de Jordan—Hölder du $\mathfrak{g}$-module M.

Soit ϱ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M. Si tous les $\mathfrak{g}$-modules irréductibles contenus dans M sont triviaux, les $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ sont tous nilpotents. La réciproque est vraie d'après le théorème d'Engel.

Pour tout endomorphisme u de l'espace vectoriel M, désignons par $V(u)$ le sous-espace réunion des noyaux des u^n pour $n = 1, 2, \ldots$, et par $W(u)$ le sous-espace intersection des $u^n(M)$ pour $n = 1, 2, \ldots$ On sait que M est somme directe de $V(u)$ et $W(u)$. La proposition suivante est bien connue:

Proposition 2. *Supposons $\mathfrak{g}$ nilpotente. Soient M_1 l'intersection des $V(\varrho(x))$ pour $x \in \mathfrak{g}$, M_2 le sous-espace engendré par les $W(\varrho(x))$ pour $x \in \mathfrak{g}$. Alors, M_1 et M_2 sont des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M dont M est somme directe. Tous les $\mathfrak{g}$-modules irréductibles contenus dans M_1 (resp. M_2) sont triviaux (resp. non triviaux).*

Pour la commodité du lecteur, rappelons brièvement une démonstration. La proposition est évidente si *tous* les $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ sont nilpotents, ou si *un* $\varrho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ est un automorphisme de l'espace M. On peut donc supposer qu'il existe un $x \in \mathfrak{g}$ tel que $V(\varrho(x)) \neq 0$ et $W(\varrho(x)) \neq 0$. Alors, par récurrence sur la dimension de M, la proposition sera démontrée si on prouve que $V(\varrho(x))$ et $W(\varrho(x))$ sont des sous-$\mathfrak{g}$-modules de M. Or, cela résulte du lemme suivant: soient u et v des endomorphismes de l'espace M tels que $(ad\,u)^k v = 0$ (on pose $(ad\ u)v = [u, v]$); alors, $V(u)$ et $W(u)$ sont stables pour v. Cette propriété est évidente pour $k = 0$. Admettons-la pour $k-1$. Posant $w = [u, v]$, on a $(ad\,u)^{k-1} w = 0$, donc $V(u)$ et $W(u)$ sont stables pour w. La formule $u^q v = v u^q + \sum_{s=0}^{q-1} u^{q-s-1} w u^s$ prouve alors que: 1) si $u^p(V(u)) = 0$, alors $u^{2p} v(V(u)) = 0$, donc $v(V(u)) \subset V(u)$; 2) si $W(u) = u^p(M)$, alors $v u^{2p}(M) \subset u^p(M)$, donc $v(W(u)) \subset W(u)$.

3. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes.

Lemme 1. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, M un $\mathfrak{g}$-module, ϱ la représentation correspondante de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, x un élément de $\mathfrak{g}$, u_i l'endomorphisme de $H^i(\mathfrak{h}, M)$ défini par x. Si $\varrho(x)$ est nilpotent, u_i est nilpotent. Si $\varrho(x)$ est un automorphisme de l'espace M, u_i est un automorphisme de l'espace $H^i(h, M)$.*

Démonstration. L'endomorphisme $t \to [x, t]$ de l'espace $\mathfrak{h}$ se prolonge en une dérivation de degré 0 de l'algèbre extérieure $\wedge \mathfrak{h}$. Soit φ l'endomorphisme de $\overset{i}{\wedge}\mathfrak{h}$ induit par cette dérivation. L'espace $C^i(\mathfrak{h}, M)$ s'identifie à l'espace d'applications linéaires $L(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{h}, M)$. Soit w l'endomorphisme de cet espace défini par x; si $f \in L(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{h}, M)$, $w(f)$ est l'application $u \to \varrho(x) \cdot f(u) - f(\varphi(u))$; donc w est la somme des deux endomorphismes $f \to \varrho(x) \circ f$, $f \to -f \circ \varphi$. Ces deux endomorphismes sont permutables. Comme l'endomorphisme $t \to [x, t]$ de $\mathfrak{h}$ est nilpotent, φ est nilpotent, et par suite aussi l'endomorphisme $f \to -f \circ \varphi$. Si $\varrho(x)$ est nilpotent, $f \to \varrho(x) \circ f$ est nilpotent, donc w est nilpotent, donc u_i est nilpotent. Si $\varrho(x)$ est un automorphisme de l'espace M, $f \to \varrho(x) \circ f$ est un automorphisme de l'espace $L(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{h}, M)$, donc w est un automorphisme de l'espace $L(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{h}, M)$ (car, si α et β sont deux endomorphismes permutables d'un espace vectoriel, avec α inversible et β nilpotent, $\alpha^{-1}\beta$ est nilpotent, donc $1 + \alpha^{-1}\beta$ est inversible, donc $\alpha + \beta$ est inversible); donc u_i est un automorphisme de l'espace $H^i(\mathfrak{h}, M)$.

Théorème 1. *Supposons K infini. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, M un $\mathfrak{g}$-module. Si tout $\mathfrak{g}$-module contenu dans M est non trivial, on a $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$ pour tout i.*

Démonstration. Supposons d'abord M irréductible non trivial. Il existe un x de $\mathfrak{g}$, $x \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tel que $\varrho(x)$ ne soit pas nilpotent. (Sinon, comme K est infini, $\varrho(y)$ serait nilpotent pour tout $y \in \mathfrak{g}$, ce qui est impossible puisque M est irréductible non trivial). D'après ce qu'on a vu dans la démonstration de la prop. 2, ceci entraîne que $\varrho(x)$ est un automorphisme de M. Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tel que $x \notin \mathfrak{h}$. Ce sous-espace est un idéal de $\mathfrak{g}$, et nous pouvons appliquer la prop. 1. D'après le lemme 1, les u_i sont des automorphismes des $H^i(\mathfrak{h}, M)$. Donc $r_i = s_i = 0$. Donc $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Dans le cas général, nous établirons le théorème par récurrence sur la dimension de M. Supposons le théorème établi pour $\dim M < n$, et envisageons le cas où $\dim M = n$. Si M est irréductible, le théorème résulte de ce qui précède. Sinon, il existe un sous-$\mathfrak{g}$-module N de M tels que M et M/N soient de dimensions $< n$. Tout $\mathfrak{g}$-module contenu dans N ou M/N est non trivial. Donc $H^i(\mathfrak{g}, N) = H^i(\mathfrak{g}, M/N) = 0$. Alors, la suite exacte

$$\cdots \to H^i(\mathfrak{g}, N) \to H^i(\mathfrak{g}, M) \to H^i(\mathfrak{g}, M/N) \to \cdots$$

prouve que $H^i(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Théorème 2. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n, M un $\mathfrak{g}$-module. S'il existe un $\mathfrak{g}$-module trivial non nul contenu dans M, on a* $\dim H^0(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$, $\dim H^n(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$, *et* $\dim H^i(\mathfrak{g}, M) \geqq 2$ *pour* $0 < i < n$.

Démonstration. D'après la prop. 2, on peut supposer $M \neq 0$ et tous les $\varrho(y)$ ($y \in \mathfrak{g}$) nilpotents (ϱ désignant la représentation de $\mathfrak{g}$ dans M). Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, en supposant le théorème démontré pour $\dim \mathfrak{g} < n$. Il existe (si $\mathfrak{g} \neq 0$) un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$, tel que $x \notin \mathfrak{h}$. Utilisons les notations de la prop. 1. D'après le lemme 1, les u_i sont nilpotents. Soit i un entier tel que $0 < i < n$. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^i(\mathfrak{h}, M) \neq 0$ et $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M) \neq 0$. Le noyau de u_i est $\neq 0$ et par suite $r_i \neq 0$. L'image de u_{i-1} est distincte de $H^{i-1}(\mathfrak{h}, M)$ et par suite $s_i \neq 0$. Ainsi, r_i est non nul et de noyau non nul, de sorte que $\dim H^i(\mathfrak{g}, M) \geqq 2$. On établit de manière analogue que $\dim H^0(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$ et $\dim H^n(\mathfrak{g}, M) \geqq 1$ (ce qu'il est facile de voir directement).

Remarques. 1. Signalons l'exemple suivant. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie nilpotente de dimension 6 sur K, admettant une base $(e_1, e_2, \ldots, e_6)$ telle que $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_2, e_5] = e_6$, $[e_3, e_4] = -e_6$, les crochets non écrits étant ou nuls, ou déduits des précédents par antisymétrie. Si la caractéristique de K est $\neq 2$, on a $\dim H^i(\mathfrak{g}) = 2$ pour $0 < i < 6$.

2. On peut parfois améliorer le th. 2. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre dérivée d'une algèbre nilpotente, on peut montrer que $\dim H^i(\mathfrak{g}) \geqq 4$ pour $1 < i < n-1$. Il suffit pour cela d'utiliser le lemme 2 de [3].

3. Les théorèmes 1 et 2 sont en défaut pour les algèbres résolubles.

Bibliographie.

[1] I. Ado, Über die Struktur der endlichen kontinuierlichen Gruppen, *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan,* (3) **6** (1932—33), 38—42 (en russe, avec un résumé allemand).

[2] C. Chevalley et S. Eilenberg, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, *Transactions American Math. Soc.*, **63** (1948), 85—124.

[3] J. Dixmier, Sur les algèbres dérivées des algèbres de Lie, *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, **51** (1955), 541—544.

[4] G. Hochschild et J. P. Serre, Cohomology of Lie algebras, *Annals of Math.*, **57** (1953), 591—603.

[5] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, *Annals of Math.*, **59** (1954), 531—538.

(Reçu le 3 juin 1955)

Theorie der Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihrer affinen Theorie.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

Einleitung.

Die allgemeine Theorie der Bahnkurven in Punkträumen wurde von J. DOUGLAS [1] begründet. Er hat einen n-dimensionalen Punktraum zu Grunde gelegt, in dem er die endliche Gleichung der Bahnen definierte, dann leitete er von dieser ausgehend das Differentialgleichungssystem der Bahnen ab. Er erklärte nun die Parallelübertragung der Vektoren längs der Bahnen des Raumes derart, daß die Bahnen eben die autoparallelen Kurven der Übertragung werden.

Wir nehmen an, daß wir eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente haben, in der in irgendeiner Weise eine Geometrie der Bahnen festgelegt ist. Es wird vielleicht nicht uninteressant sein, das Problem zu untersuchen, ob es möglich ist, die Bahnen dieser Geometrie mit der von O. VARGA [2] zur Einführung der Normalkoordinaten verwendeten sog. quasigeodätischen Kurvenschar in Zusammenhang zu bringen. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem.

In § 1 definieren wir in der Mannigfaltigkeit der Linienelemente den Begriff der Bahnen, dann leiten wir von dem endlichen Gleichungssystem der Bahnen ihr Differentialgleichungssystem ab. In § 2 werden wir die Parallelverschiebung der Vektoren erklären, und zeigen, daß die Bahnen die Verallgemeinerungen der von O. VARGA betrachteten quasigeodätischen Kurven sind. In § 3 bestimmen wir die Torsions- bzw. die Krümmungsgrößen des Raumes. In § 4 wird das Äquivalenzproblem der allgemeinen Affingeometrie untersucht.

Alle vorkommenden Funktionen sollen regulär-analytisch von ihren Veränderlichen abhängen.

§ 1. Bahnen in einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen.

Bezeichne F_{2n-1} eine Mannigfaltigkeit von Linienelementen, d. h. einen Raum, dessen Grundelement aus einem Punkt $P(x^1, \ldots, x^n)$ und aus einer in diesem Punkt definierten Richtung $V(v^1, \ldots, v^n)$ besteht. Da die v^i die Richtung bestimmenden Parameter sind, kommt nur ihr Verhältnis in Betracht. Offensichtlich wird das Wertsystem $v^1 = v^2 = \cdots = v^n = 0$ ausgeschlossen. Ist λ eine positive Zahl, so bestimmen die λv^i dieselbe Richtung, wie die v^i.

Bedeutet

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x) \tag{1, 1}$$

eine Koordinatentransformation, so erklären wir das Transformationsgesetz der v^i durch die Formeln

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k. \tag{1, 2}$$

Es seien im Raum F_{2n-1} ∞^{3n-3} Kurven und längs jeder eine Linienelementfolge durch die Gleichungen

$$x^i = f^i(t, a^1, \ldots, a^{3n-3}), \quad v^i = v^i(x) = \varphi^i(t, a^1, \ldots, a^{3n-3}) \tag{1, 3}$$

gegeben, wobei t die Kurvenparameter und $a^1, \ldots, a^{3n-3}$ die Scharparameter sind.

Sind die Kurven (1, 3) von der Eigenschaft, daß durch jede zu einem Linienelement (x, v) gehörige Richtung ξ^i eine und nur eine Kurve bestimmt ist, und wird ferner eine gewisse Umgebung eines Punktes $P(\underset{(0)}{x^1}, \ldots, \underset{(0)}{x^n})$ durch die zu einem festen Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ gehörigen Kurven schlicht bedeckt, dann nennt man die Kurven (1, 3) parametrizierte Bahnen[1]).

Würde man nur fordern, daß es zu einer festen Richtung durch einen festgehaltenen Punkt genau eine berührende Kurve gibt, so wäre die Parameterzahl gerade $2n-2$.[2]) Da die Gesamtheit der Richtungen durch einen Punkt von $n-1$ Parametern abhängt, ergibt sich die Parameterzahl, wie oben behauptet.

Die Bahnen (1, 3) werden analytisch festgelegt 1) durch die Koordinaten x^i, 2) durch die, die Richtung bestimmenden Parameter v^i, 3) durch den Kurvenparameter t, 4) durch die Scharparameter a^i.

In dem System, das die Bahnen bestimmt, sind folgende Transformationen zulässig:

A) die analytische Transformation der Grundelemente (x^i, v^i):

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \quad \bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k,$$

---

[1]) Siehe z. B. Douglas [1].

[2]) Siehe Douglas [1].

B) die simultane analytische Transformation der Bahnparameter t:

$$\bar{t}=\bar{t}(t),$$

C) die analytische Transformation der Parameter $a^1, \ldots, a^{3n-3}$:

$$\bar{a}^A=\bar{a}^A(a).$$

Werden in (1, 3) die durch A), B) und C) definierten neuen Größen substituiert, so stellen

$$\bar{x}^i=g^i(\bar{t}, \bar{a}), \quad \bar{v}^i=\psi^i(\bar{t}, \bar{a}) \tag{1, 4}$$

in diesem neuen Bezugssystem die Gleichungen der Bahnen dar.

Die Bahnen sind also durch die Gleichungen (1, 3) und die Gesamtheit der zulässigen Transformationen A), B) und C) festgelegt.

Eine Geometrie der Bahnen ist die Gesamtheit derjenigen Eigenschaften der Bahnen, die bei den Transformationen A), B) und C) unverändert bleiben.

Ist die Transformation B) von der Form

$$\bar{t}=\alpha t+\beta, \tag{1, 5}$$

wobei α und β Konstanten sind, so spricht man von einer affinen Geometrie der Bahnen.

Die Gleichungen der Bahnen seien durch

$$x^i=f^i(\alpha t+\beta, a), \quad v^i=\varphi^i(\alpha t+\beta, a) \tag{1, 6}$$

gegeben. Wegen der für die v^i vorgeschriebenen Beschränkungen enthält das Gleichungssystem (1, 6) $(2n-1)$ unabhängige Gleichungen.

Differenzieren wir die ersten der Gleichungen (1, 6) zweimal, die zweiten einmal nach dem Parameter t, so erhalten wir:

$$\frac{dx^i}{dt} \overset{\text{def.}}{=} p^i=\alpha f'^i(\alpha t+\beta, a), \tag{1, 7}$$

$$\frac{dv^i}{dt}=\alpha \varphi'^i(\alpha t+\beta, a), \tag{1, 7'}$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=\alpha^2 f''^i(\alpha t+\beta, a). \tag{1, 7''}$$

Wegen der Bedingungen, die wir früher für die Bahnen vorgeschrieben haben, sind die $(3n-1)$ unabhängigen Gleichungen (1, 6), (1, 7) nach den $(3n-1)$ Unbekannten $\alpha, \alpha t+\beta$, und $a^1, \ldots, a^{3n-3}$ auflösbar.

Substituieren wir die erhaltenen Werte in (1, 7'), (1, 7''), so erhalten wir:

$$\frac{dv^i}{dt}=H^i(x, p, v), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2}=G^i(x, p, v), \tag{1, 8}$$

dies sind die Differentialgleichungen der Bahnen.

Lemma. *Die H^i sind in den p^i und v^i von erster, die G^i in den p^i von zweiter, in den v^i von nullter Dimension homogene Funktionen.*

Beweis. Ersetzt man in der Gleichung (1, 7) die p^i durch λp^i, so bekommt man

$$p^i = \frac{\alpha}{\lambda} f'^i(\alpha t + \beta, a). \tag{1, 9}$$

Lösen wir die Gleichungen (1, 6) und (1, 9) nach den Unbekannten $\frac{\alpha}{\lambda}, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ auf, und substituieren die Lösungen in (1, 7') und (1, 7''), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \lambda \frac{\alpha}{\lambda} \varphi'^i = \lambda H^i(x, p, v), \\ \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \lambda^2 \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 f''^i = \lambda^2 G^i(x, p, v). \end{aligned} \tag{1, 10}$$

Bestimmen wir anderseits $\alpha, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ aus den Gleichungen (1, 6) und (1, 9), so wird:

$$\frac{dv^i}{dt} = H^i(x, \lambda p, v), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = G^i(x, \lambda p, v). \tag{1, 11}$$

Aus (1, 10) und (1, 11) erhält man

$$H^i(x, \lambda p, v) = \lambda H^i(x, p, v), \quad G^i(x, \lambda p, v) = \lambda^2 G^i(x, p, v). \tag{1, 12}$$

Setzt man in (1, 6) statt v^i die Werte λv^i ($\lambda =$ konst.) ein, so bekommt man

$$x^i = f^i(\alpha t + \beta, a), \quad \lambda v^i = \varphi^i(\alpha t + \beta, a). \tag{1, 13}$$

Differenziert man (1, 13) nacht t, so folgt:

$$p^i = \alpha f'^i, \tag{1, 14}$$

$$\lambda \frac{dv^i}{dt} = \alpha \varphi'^i, \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = \alpha^2 f''^i. \tag{1, 15}$$

Wenn wir nun $\alpha, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ aus den Gleichungen (1, 13) und (1, 14) bestimmen und die erhaltenen Werte in (1, 15) substituieren, so ergeben sich die Relationen:

$$\lambda \frac{dv^i}{dt} = H^i(x, p, \lambda v), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = G^i(x, p, \lambda v). \tag{1, 16}$$

Da die Gleichungen (1, 13) dieselben Bahnen bestimmen wie (1, 6), so folgt aus (1, 16) und (1, 8):

$$H^i(x, p, \lambda v) = \lambda H^i(x, p, v), \quad G^i(x, p, \lambda v) = G^i(x, p, v). \tag{1, 17}$$

Aus (1, 12) und (1, 17) folgt die Richtigkeit unseres Lemmas.

Wir bestimmen jetzt das Transformationsgesetz der Größen H^i und G^i. Es sei

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x) \tag{1, 18}$$

eine Koordinatentransformation, dann ist

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}. \tag{1, 19}$$

Aus (1, 7) und (1, 9) folgt

$$\bar{p}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} p^k. \tag{1, 20}$$

Aus (1, 8), (1, 2) und (1, 20) folgt auf Grund einer einfachen Rechnung

$$\bar{G}^i = G^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} p^k p^j, \tag{1, 21}$$

$$\bar{H}^i = H^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} p^k v^j, \tag{1, 22}$$

oder, wegen (1, 2) und (1, 20):

$$\bar{G}^i = G^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^c} \bar{p}^j \bar{p}^k, \tag{1, 23}$$

$$\bar{H}^i = H^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^c} \bar{p}^k \bar{v}^j. \tag{1, 24}$$

§ 2. Affinzusammenhängender Raum der Bahnen.

Damit der in § 1 definierte affine Raum der Bahnen ein affinzusammenhängender Raum sei, müßen wir die Parallelverschiebung definieren. Die Parallelverschiebung von Vektoren wird in drei Schritten definiert:

1. Parallelübertragung von Linienelementen längs Bahnkurven,
2. Parallelübertragung von Vektoren längs Bahnkurven,
3. Übertragung von Vektoren längs sogenannter Doppelfelder von Linienelementen.

Definition 1. *Die Linienelemente* (x, v), *die längs der Bahn* (1, 8) *erklärt sind, sollen parallele Linienelemente genannt werden.*

Dementsprechend bedeutet

$$\frac{dv^i}{dt} - H^i(x, p, v) = 0, \tag{2, 1}$$

daß die v^i längs der Bahn (1, 8) parallel verschoben sind.

Die Größen K^i_j und L^i_j seien durch

$$-K^i_j(x, p, v) = \frac{\partial H^i(x, p, v)}{\partial v^j}, \tag{2, 2}$$

$$-L^i_j(x, p, v) = \frac{\partial H^i(x, p, v)}{\partial p^j} \tag{2, 3}$$

bestimmt. Wegen (1, 12) und (1, 7) ist

(2, 4) $$-K^i_j v^j = -L^i_j p^j = H^i.$$

Aus der Homogenität von H^i folgt, daß K^i_j in den p^i homogen von erster, in den v^i homogen von nullter, die L^i_j in den p^i homogen von nullter, in den v^i homogen von erster Dimension sind.

Wir definieren nun eine Größe $\Gamma^{*i}_{jk}(x, p, v)$ durch die Formel:

(2, 5) $$\Gamma^{*i}_{jk}(x, p, v) = \frac{\partial K^i_j}{\partial p^k} = -\frac{\partial^2 H^i}{\partial v^j \partial p^k}.$$

Es ist klar, daß Γ^{*i}_{jk} in den p^i und v^i homogen von nullter Dimension ist. Nach (2, 3) und (2, 5) bekommt man

(2, 6) $$\Gamma^{*i}_{jk} = \frac{\partial L^i_k}{\partial v^j} = \frac{\partial K^i_j}{\partial p^k}.$$

Aus den Relationen (2, 2)—(2, 6) folgt:

(2, 7) $$\Gamma^{*i}_{jk} v^j = L^i_k,$$

(2, 7′) $$\Gamma^{*i}_{jk} p^k = K^i_j,$$

(2, 7″) $$\Gamma^{*i}_{jk} v^j p^k = H^i.$$

Differenzieren wir (2, 7) nach v^a, und (2, 7′) nach p^a, so wird:

(2, 8) $$\frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial v^a} v^j + \Gamma^{*i}_{ak} = \frac{\partial L^i_k}{\partial v^a} = \Gamma^{*i}_{ak},$$

(2, 9) $$\frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial p^a} p^k + \Gamma^{*i}_{ja} = \frac{\partial K^i_j}{\partial p^a} = \Gamma^{*i}_{ja},$$

d. h.

(2, 10) $$\frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial v^a} v^j = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial p^a} p^k = 0.$$

Definition 2. *Wir sagen, daß der Vektor ξ^i längs der Bahn (1, 8) parallel verschoben ist, wenn die folgende Gleichung besteht:*

(2, 11) $$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^{*i}_{jk}(x, p, v) p^k \xi^j = 0.$$

Aus der Forderung, daß die Tangentenvektoren $\frac{dx^i}{dt}$ längs der Bahn parallel seien, folgt in Hinsicht auf (2, 11):

(2, 12) $$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^{*i}_{jk} p^k p^j = 0.$$

Aus (2, 12) und (1, 8) folgt unmittelbar:

(2, 13) $$G^i = -\Gamma^{*i}_{jk} p^j p^k = -K^i_j p^j.$$

Die Transformationsformeln von K_j^i, L_j^i und Γ_{jk}^{*i} erhält man aus den Relationen (1, 20)—(1, 24) und (1, 2):

$$\bar{K}_j^i = K_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j} p^k, \tag{2, 14}$$

$$\bar{L}_j^i = L_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j} v^k, \tag{2, 15}$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^{*i} = \Gamma_{bc}^{*a} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^b \partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}, \tag{2, 16}$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{K}_j^i &= K_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \bar{p}^k, \\ \bar{L}_j^i &= L_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \bar{v}^k, \end{aligned} \tag{2, 17}$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^{*i} = \Gamma_{bc}^{*a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a}. \tag{2, 18}$$

Die Gleichungen (1, 2), (1, 20) und (2, 16) zeigen, daß die Größen

$$\omega^i(d) = dp^i + \Gamma_{jk}^{*i} p^k dx^j, \tag{2, 20}$$

$$\pi^i(d) = dv^i + \Gamma_{jk}^{*i} v^j dx^k \tag{2, 21}$$

sich wie Vektoren transformieren.

Aus den vorigen Gleichungen folgt, daß das Gleichungssystem

$$\frac{\omega^i(d)}{dt} = 0, \quad \frac{\pi^i(d)}{dt} = 0 \tag{2, 22}$$

die Definitionsgleichungen der Bahnen darstellt.

Aus (2, 14)—(2, 16) folgt, daß die Größen

$$\frac{\partial K_j^i}{\partial v^a}, \quad \frac{\partial L_j^i}{\partial p^a}, \quad \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial v^a}, \quad \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial p^a}$$

Tensoren sind.

Man kann leicht verifizieren, daß die Ableitungen eines Tensors nach v^i und p^i auch Tensoren sind; selbstverständlich vermindert sich aber der Homogenitätsgrad um eins.

Eine Bahnkurve ist nach Angabe von zwei Richtungen v^i und p^i festgelegt. Wir werden deswegen im Folgenden alle Größen auf zwei durch einen Punkt gehende Linienelemente beziehen und daher die Übertragung eines Vektors längs eines Doppelfeldes von Linienelementen erklären. Eine solche Doppelfolge ist durch

$$x^i = x^i(t), \quad v^i = v^i(t), \quad p^i = p^i(t)$$

erklärt.

Aus den vorangehenden folgt, daß im eben definierten affinzusammenhängenden Raum alle Größen in einem Linienelement (x, v) erklärt sind, das *noch* von einer Richtung p^i abhängig ist.

Es bezeichne $\xi^i(x, p, v)$ einen Vektor, der in p^i und v^i homogen von nullter Dimension ist.

Definition 3. *Der Vektor* $\xi^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{p}, \underset{(0)}{v})$ *ist längs des Doppelfeldes der Linienelemente* $[x(t), p(t), v(t)]$ *parallel verschoben, falls er den Gleichungen*

$$(2,23) \qquad \frac{d\xi^i}{dt} + \left[C^i_{kl}(x, p, v)\frac{dp^l}{dt} + B^i_{kl}(x, p, v)\frac{dv^l}{dt} + \gamma^i_{kl}(x, p, v)\frac{dx^l}{dt}\right]\xi^k = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x^i(t_0) = \underset{(0)}{x^i}, \quad p^i(t_0) = \underset{(0)}{p^i}, \quad v^i(t_0) = \underset{(0)}{v^i}$$

genügt.

Die Größen C, B, γ sind die sogenannten Zusammenhangsobjekte.

Aus den weiteren, an die Parallelübertragung zustellenden Forderungen wird sich ergeben, daß längs einer Bahnkurve die Parallelübertragung (2,23) mit der für diesen Fall durch (2,11) erklärten Übertragung zusammenfällt.[3])

Auf Grund von (2,23) erklären wir das invariante Differential des Raumes auf folgende Weise:

$$(2,24) \qquad D\xi^i = d\xi^i + [C^i_{kl}dp^l + B^i_{kl}dv^l + \gamma^i_{kl}dx^l]\,\xi^k.$$

Wir fordern von $D\xi^i$ die folgenden Eigenschaften: 1) Bei einer Koordinatentransformation $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ soll

$$D\bar{\xi}^i = \overline{D\xi}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} D\xi^k$$

bestehen. 2) $D\xi^i$ soll in p^i und v^i homogen von nullter Dimension sein.

Aus der Bedingung 2) ergibt sich, daß die γ^i_{jk} in den p^i und v^i homogen von nullter Dimension, die C^i_{jk} in den p^i, die B^i_{jk} in den v^i homogen von (-1)-ter Dimension, und die C^i_{jk} in den v^i, bzw. die B^i_{jk} in den p^i homogen von nullter Dimension sind, und noch

$$C^i_{kl}p^l = B^i_{kl}v^l = 0$$

besteht. Es folgt aus der Bedingung 1):

$$\bar{C}^a_{bc} = C^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}, \quad \bar{B}^a_{bc} = B^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i},$$

$$(2,25) \qquad \bar{\gamma}^a_{bc} = \gamma^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} + C^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d\,\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^s}p^s +$$

$$+ B^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d\,\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^s}v^s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b\,\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}.$$

---

[3]) Aus den Formeln (2,28), (2,26), (2,22) und (2,23) folgt nämlich (2,11).

Aus (2, 23), (2, 20) und (2, 21) folgt:

$$D\xi^i = d\xi^i + [C^i_{kl}\,\omega^l(d) + B^i_{kl}\,\pi^l(d) + \overset{*}{\gamma}{}^i_{kl}\,dx^l]\,\xi^k, \tag{2, 26}$$

wo

$$\overset{*}{\gamma}{}^i_{kl} = \gamma^i_{kl} - K^s_l\,C^i_{ks} - L^s_l\,B^i_{ks}. \tag{2, 27}$$

Ferner folgt aus den Relationen (2,20), (2,21), (2,27), (2,12), (2,1) und (2,11):

$$\overset{*}{\gamma}{}^i_{kl} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kl}. \tag{2, 28}$$

Auf Grund der Gleichungen (2, 12), (2, 1) und (2, 11) kann leicht gezeigt werden, daß die Bahnen $\left(\text{wenn } -H^i = A^i_j(x, v)\dfrac{dx^j}{dt}\right)$ mit derjenigen Kurvenschar identisch sind, die Herr O. VARGA [1] in der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen bei der Einführung der Normalkoordinaten benützt hat.

Wegen (2,16) können drei kovariante Ableitungen eigenführt werden:

$$\xi^i_{;k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial p^k} + C^i_{ks}\,\xi^s, \tag{2, 29}$$

$$\xi^i_{:k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial v^k} + B^i_{ks}\,\xi^s, \tag{2, 30}$$

$$\xi^i_{/k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial p^r}K^r_k - \frac{\partial \xi^i}{\partial v^r}L^r_k + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{sk}\,\xi^s. \tag{2, 31}$$

Nach diesen Relationen kann (2, 26) in der Form

$$D\xi^i = \xi^i_{;k}\,\omega^k(d) + \xi^i_{:k}\,\pi^k(d) + \xi^i_{/k}\,dx^k \tag{2, 32}$$

geschrieben werden.

Die verschiedenen kovarianten Ableitungen eines beliebigen Tensors T^i_{kl} lauten:

$$T^i_{kl;s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial p^s} + C^i_{as}\,T^a_{kl} - C^a_{ks}\,T^i_{al} - C^a_{ls}\,T^i_{ka}, \tag{2, 33'}$$

$$T^i_{kl:s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial v^s} + B^i_{as}\,T^a_{kl} - B^a_{ks}\,T^i_{al} - C^a_{ls}\,T^i_{ka}, \tag{2, 33''}$$

$$T^i_{kl/s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial x^s} - \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial p^a}K^a_s - \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial v^a}L^a_s + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{as}\,T^a_{kl} - \overset{*}{\Gamma}{}^a_{ks}\,T^i_{al} - \overset{*}{\Gamma}{}^a_{ls}\,T^i_{ka}. \tag{2, 33'''}$$

§ 3. Die Grundtensoren des Raumes.

Bedeuten d und δ miteinander vertauschbare Differentialsymbole, und D bzw. Δ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so bestimmt

$$\Delta dx^i - D\delta x^i \tag{3, 1}$$

ein Vektorfeld.

Berechnen wir den Ausdruck (3, 1), so folgt in Hinsicht auf die Relationen (2,26) und (2,28)

$$\begin{aligned}\Delta dx^i - D\delta x^i = C^i_{kl}\,[dx^k\omega^l(\delta)-\delta x^k\omega^l(d)] + B^i_{kl}[dx^k\pi^l(\delta)-\delta x^k\pi^l(d)] + \\ + \frac{1}{2}\,[\Gamma^{*i}_{kl}-\Gamma^{*i}_{lk}]\,[dx^k\delta x^l-\delta x^k dx^l]. \qquad (3,2)\end{aligned}$$

Wegen der Willkürlichkeit der in (3,2) auftretenden Bilinearformen sind

$$C^i_{kl},\ B^i_{kl},\ \frac{1}{2}\,[\Gamma^{*i}_{kl}-\Gamma^{*i}_{lk}] = \Omega^i_{kl} \qquad (3,3)$$

drei Tensoren, die als die Torsionstensoren des Raumes bezeichnet werden sollen.

Bedeutet nun ξ^i ein beliebiges Vektorfeld, so ist auch

$$\Delta D\xi^i - D\Delta\xi^i$$

ein Vektorfeld. Eine Rechnung, bei der die Gleichungen (2, 26), (2, 28), (2, 20), (2, 21), (2, 7), (2, 7') und (2, 31) zu benützen sind, gibt für den obigen Vektor den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta D\xi^i - D\Delta\xi^i = \Big\{ & \frac{1}{2}\,\Sigma^i_{krs}[\omega^s(\delta)\,\omega^r(d)-\omega^s(d)\,\omega^r(\delta)] + \\ & + \frac{1}{2}\,\Phi^i_{krs}[\pi^s(\delta)\,\pi^r(d)-\pi^s(d)\,\pi^r(\delta)] + \Lambda^i_{krs}\,[\omega^s(\delta)\pi^r(d)-\omega^s(d)\pi^r(\delta)] + \\ & + \Pi^i_{krs}[dx^s\omega^r(\delta)-\delta x^s\omega^r(d)] + \Psi^i_{krs}[dx^s\pi^r(\delta)-\delta x^s\pi^r(d)] + \\ & + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}^i_{krs}[\delta x^s dx^r - dx^s\delta x^r\Big\}\,\xi^k, \qquad (3,4)\end{aligned}$$

wo

$$\Sigma^i_{krs} = \frac{\partial C^i_{kr}}{\partial p^s} - \frac{\partial C^i_{ks}}{\partial p^r} + C^i_{as}C^a_{kr} - C^i_{ar}C^a_{ks}, \qquad (3,5)$$

$$\Phi^i_{krs} = \frac{\partial B^i_{kr}}{\partial v^s} - \frac{\partial B^i_{ks}}{\partial v^r} + B^i_{as}B^a_{kr} - B^i_{ar}B^a_{ks}, \qquad (3,6)$$

$$\Lambda^i_{krs} = \frac{\partial B^i_{kr}}{\partial p^s} - \frac{\partial C^i_{ks}}{\partial v^r} + C^i_{as}B^a_{kr} - C^a_{ks}B^i_{ar}, \qquad (3,7)$$

$$\Pi^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^r} - C^i_{kr/s} + B^i_{kj}\frac{\partial L^j_s}{\partial p^r}, \qquad (3,8)$$

$$\Psi^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^r} - B^i_{kr/s} + C^i_{kj}\frac{\partial K^j_s}{\partial v^r}, \qquad (3,9)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^i_{krs} = & \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial p^j}K^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^j}K^j_r + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial v^j}L^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^j}L^j_r + \\ & + C^i_{kj}\Big\{\frac{\partial K^j_s}{\partial x^r} - \frac{\partial K^j_r}{\partial x^s} + \frac{\partial K^j_r}{\partial v^a}L^a_s - \frac{\partial K^j_s}{\partial v^a}L^a_r + \Gamma^{*j}_{ar}K^a_s - \Gamma^{*j}_{as}K^a_r\Big\} + \qquad (3,10) \\ & + B^i_{kj}\Big\{\frac{\partial L^j_s}{\partial x^r} - \frac{\partial L^j_r}{\partial x^s} + \frac{\partial L^j_r}{\partial p^a}K^a_s - \frac{\partial L^j_s}{\partial p^a}K^a_r + \Gamma^{*j}_{ar}L^a_s - \Gamma^{*j}_{as}L^a_r\Big\} + \Gamma^{*i}_{ar}\Gamma^{*a}_{ks} - \Gamma^{*i}_{as}\Gamma^{*a}_{kr}.\end{aligned}$$

Da die Bilinearformen auf der rechten Seite von (3, 4) willkürlich wählbar sind, sind die durch die Relationen (3, 5)—(3, 10) angegebenen Größen Tensoren des Raumes. Diese Tensoren haben die folgenden Homogenitätseigenschaften: Die Tensoren P^i_{krs}, Ψ^i_{krs} und Φ^i_{krs} sind in den p^i homogen von nullter, Π^i_{krs} und Λ^i_{krs} homogen von (—1)-ter, und Σ^i_{krs} homogen von (—2)-ter Dimension; in den v^i sind P^i_{krs}, Π^i_{krs} und Σ^i_{krs} homogen von nullter, Ψ^i_{krs} und Λ^i_{krs} homogen von (—1)-ter, und Φ^i_{krs} homogen von (—2)-ter Dimension.

Dies sind die Krümmungstensoren des Raumes.

Es folgt aus den Gleichungen (2, 12)—(2, 16), (2, 24) und (2, 25), daß

(3,11)
$$F^i_{krs}=\frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial x^r}-\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial x^s}+\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial p^j}K^j_s-\frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^j}K^j_r+\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial v^j}L^j_s-\frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^j}L^j_r+\Gamma^{*i}_{ar}\Gamma^{*a}_{ks}-\Gamma^{*i}_{as}\Gamma^{*a}_{kr},$$

(3, 12)
$$M^i_{rs}=\frac{\partial L^i_s}{\partial x^r}-\frac{\partial L^i_r}{\partial x^s}+\frac{\partial L^i_r}{\partial p^a}K^a_s-\frac{\partial L^i_s}{\partial p^a}K^a_r+\Gamma^{*i}_{ar}L^a_s-\Gamma^{*i}_{as}L^a_r,$$

(3, 13)
$$N^i_{rs}=\frac{\partial K^i_s}{\partial x^r}-\frac{\partial K^i_r}{\partial x^s}+\frac{\partial K^i_r}{\partial v^a}L^a_s-\frac{\partial K^i_s}{\partial v^a}L^a_r+\Gamma^{*i}_{ar}K^a_s-\Gamma^{*i}_{as}K^a_r$$

Tensoren sind. Diese sollen die Hauptkrümmungstensoren des Raumes genannt werden. Diese Tensoren sind alle in den p^i und v^i homogen von nullter Dimension.

§ 4. Das Äquivalenzproblem.

Es seien durch die Grundgrößen

$C^i_{kl}(x,p,v)$, $B^i_{kl}(x,p,v)$, $\Gamma^{*i}_{kl}(x,p,v)$ bzw. $\bar{C}^i_{kl}(\bar{x},\bar{p},\bar{v})$, $\bar{B}^i_{kl}(\bar{x},\bar{p},\bar{v})$, $\bar{\Gamma}^{*i}_{kl}(\bar{x},\bar{p},\bar{v})$

zwei, in dem vorigen § erklärte allgemeine affinzusammenhängende Räume angegeben. Offensichtlich sind die beiden Räume äquivalent, falls Koordinatentransformationen von der Form

(4, 1)
$$x^i=x^i(\bar{x}),$$

(4, 2), (4, 3)
$$\left.\begin{aligned} v^i&=\varphi^i_a\bar{v}^a\\ p^i&=\varphi^i_a\bar{p}^a\end{aligned}\right\}\quad\left(\varphi^i_a=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)$$

existieren, die die Größen C^i_{kl}, B^i_{kl} und Γ^{*i}_{kl} gemäß den Formeln (2, 16), (2,25) in $\bar{C}^i_{kl}$, $\bar{B}^i_{kl}$ und $\bar{\Gamma}^{*i}_{kl}$ überführen.

Die Existenzbedingung einer Koordinatentransformation von der Form (4, 1) wollen wir durch einen von J. M. THOMAS und O. VEBLEN [1] herrührenden Satz über die Lösbarkeit eines partiellen Differentialgleichungssystems bestimmen.

Es sei durch

(4, 4)
$$\frac{\partial Z^a}{\partial u^\varrho}=\Psi^a_\varrho(Z,u)\qquad(\alpha=1,\ldots,n;\ \varrho=1,\ldots,m),$$

(4, 5)
$$F^{(0)}_\sigma(Z,u)=0\qquad(\sigma=1,\ldots,r)$$

ein sogenanntes gemischtes System angegeben. Bilden wir jetzt die Integrabilitätsbedingungen des Systems (4,4) unter Verwendung der Gleichungen des Systems selbst, differenzieren ferner (4, 5) nach u^ϱ, und benützen bei diesen Gleichungen wieder die Gleichungsgruppe (4, 4), so erhalten wir eine neue Gleichungsgruppe:

$$F_\mu^{(1)}(Z, u) = 0. \qquad (\mu = 1, \ldots, s). \tag{4, 6}$$

Aus den Gleichungen (4, 6) entsteht durch ähnliches Verfahren eine neue Gleichungsgruppe, u. s. w. Mit

$$F_\lambda^N(Z, u) = 0 \tag{4, 7}$$

bezeichnen wir die so erhaltene N-te Gleichungsgruppe.

Der erwähnte Satz lautet: *Existiert eine natürliche Zahl N derart, daß die N ersten Gleichungsgruppen verträglich sind, und ihre Lösung auch die $(N+1)$-te Gleichungsgruppe identisch befriedigt, so ist das System* (4, 4), (4, 5) *integrierbar.*

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Äquivalenz der beiden angegebenen Räume können wir auf Grund von (2, 25), (2, 19) und (4, 1) in der Gestalt

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = \varphi_a^i, \tag{4, 8}$$

$$\frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{x}^c} = \varphi_e^i \bar{\Gamma}^{*e}_{ac} - \Gamma^{*i}_{kl} \varphi_a^k \varphi_c^l, \tag{4, 9}$$

$$\bar{C}^e_{bc} \varphi_e^i = C^i_{kl} \varphi_b^k \varphi_c^l, \tag{4, 10}$$

$$\bar{B}^e_{bc} \varphi_e^i = B^i_{kl} \varphi_b^k \varphi_c^l \tag{4, 11}$$

schreiben. Die Gleichungen (4, 8)—(4, 11) stellen ein gemischtes System von Differentialgleichungen in den Funktionen x^i, φ_a^i dar. Da aber in diesen Gleichungen auch die $\bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ als unabhängige Veränderliche vorkommen, müßen wir diese Gleichungen durch Hinzufügung der Ableitungen nach $\bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ erweitern, und noch die p^i und v^i als unbekannte Funktionen betrachten. So erhält man aus (2, 14), (2, 15), (4, 2) und (4, 3):

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{v}^a} = 0, \tag{4, 12}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{p}^a} = 0, \tag{4, 13}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \bar{p}^a} = 0, \tag{4, 14}$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial \bar{v}^a} = 0, \tag{4, 15}$$

$$\frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{v}^b} = 0, \tag{4, 16}$$

$$\frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{p}^b} = 0, \tag{4, 17}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \bar{v}^a} = \varphi_a^i, \tag{4, 18}$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial \bar{p}^a} = \varphi_a^i, \tag{4, 19}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \bar{x}^b} = \bar{L}_b^a \varphi_a^i - L_s^i \varphi_b^s, \tag{4, 20}$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial \bar{x}^b} = K_b^a \varphi_a^i - K_s^i \varphi_b^s. \tag{4, 21}$$

In unserem Falle bilden die Gleichungen (4, 8)—(4, 21) das gemischte System von Differentialgleichungen, wo statt Z^{α} die $x^i, \varphi^i_{\alpha}, v^i$ und die p^i, und statt die u^{ϱ} die $\bar{x}^i$, $\bar{p}^i$ und die $\bar{v}^i$ stehen.

Es sollen jetzt die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (4, 8), (4, 9), (4, 12)—(4, 21) gebildet werden. Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 9) sind auf Grund von (4, 20), (4, 21), (3, 11), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{F}^e_{bdc} = \varphi^k_b \varphi^l_d \varphi^s_c F^i_{kls}, \tag{4, 22}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}, \tag{4, 23}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}. \tag{4, 24}$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 20) sind nach (4, 21), (4, 9), (3, 3), (3, 12), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{M}^e_{dc} = \varphi^l_d \varphi^s_c M^i_{ls}, \tag{4, 25}$$

$$\varphi^i_e \bar{\Omega}^e_{dc} = \varphi^k_d \varphi^l_c \Omega^i_{kl}, \tag{4, 26}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{L}^e_b}{\partial \bar{p}^s} = \varphi^d_b \varphi^r_s \frac{\partial L^i_d}{\partial p^r}. \tag{4, 27}$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 21) sind nach (4, 20), (4, 21), (4, 9), (3, 13), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{N}^e_{dc} = \varphi^l_d \varphi^s_c N^i_{ls}, \tag{4, 28}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{K}^e_b}{\partial \bar{v}^s} = \varphi^d_b \varphi^r_s \frac{\partial K^i_d}{\partial v^r}. \tag{4, 29}$$

Die übrigen Integrabilitätsbedingungen sind entweder trivialerweise erfüllt, oder man kann sie auf die vorangehenden zurückführen. Die Bedingungen (4, 27) und (4, 29) können wir ebenfalls weglassen, da diese aus (4, 23) bzw. (4, 24) nach einer Überschiebung mit $\bar{p}^c$ und $\bar{v}^c$ entstehen.

Leitet man jetzt die skalaren Relationen (4, 10) und (4, 11), und die Relationen (4, 22)—(4, 26), (4, 28) nach $\bar{x}^i, \bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ ab, so erhält man in Hinsicht auf (4, 1)—(4, 3) und (2, 33'''):

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi^i_e \bar{C}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d C^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \bar{B}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d B^i_{kl/s},\\
&\varphi^i_e \bar{\Omega}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \Omega^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \bar{M}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d M^i_{kl/s},\\
&\varphi^i_e \bar{N}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d N^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{v}^d}\right)_{/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right)_{/m},\\
&\varphi^i_e \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{p}^d}\right)_{/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right)_{/m}, && \varphi^i_e \bar{F}^e_{bcd/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f F^i_{kls/m},
\end{aligned}\right. \tag{4, 30}$$

$$(4,31)\begin{cases}
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{C}_{bc}^e}{\partial \overline{v}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial C_{kl}^i}{\partial v^s}, \qquad \varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{B}_{bc}^e}{\partial \overline{v}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial B_{kl}^i}{\partial v^s}, \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{\Omega}_{bc}^e}{\partial \overline{v}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial \Omega_{kl}^i}{\partial v^s}, \qquad \varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{M}_{bc}^e}{\partial \overline{v}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial M_{kl}^i}{\partial v^s}, \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{N}_{bc}^e}{\partial \overline{v}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial N_{kl}^i}{\partial v^s}, \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \overline{v}^d}\right) = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial}{\partial v^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial v^s}\right), \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \overline{p}^d}\right) = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial}{\partial v^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial p^s}\right), \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{F}_{bcd}^e}{\partial \overline{v}^f} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial F_{kls}^i}{\partial v^m},
\end{cases}$$

$$(4,32)\begin{cases}
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{C}_{bc}^e}{\partial \overline{p}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial C_{kl}^i}{\partial p^s}, \qquad \varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{B}_{bc}^e}{\partial \overline{p}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial B_{kl}^i}{\partial p^s}, \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{\Omega}_{bc}^e}{\partial \overline{p}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial \Omega_{kl}^i}{\partial p^s}, \qquad \varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{M}_{bc}^e}{\partial \overline{p}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial M_{kl}^i}{\partial p^s}, \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{N}_{bc}^e}{\partial \overline{p}^d} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \dfrac{\partial N_{kl}^i}{\partial p^s}, \qquad \varphi_e^i \dfrac{\partial}{\partial \overline{p}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \overline{p}^d}\right) = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial}{\partial p^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial p^s}\right), \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial}{\partial \overline{p}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}_{bc}^{*e}}{\partial \overline{v}^d}\right) = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial}{\partial p^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma_{kl}^{*i}}{\partial v^s}\right), \\
\varphi_e^i \dfrac{\partial \overline{F}_{bcd}^e}{\partial \overline{p}^f} = \varphi_b^k \varphi_c^l \varphi_d^s \varphi_f^m \dfrac{\partial F_{kls}^i}{\partial p^m}.
\end{cases}$$

Die Gleichungen (4, 30)—(4, 32) sind mit der Gleichungsgruppe (4, 6) äquivalent.

Man sieht leicht ein, daß in der durch dieses Verfahren enstehenden m-ten Gleichungsgruppe die $(m-1)$-ten kovarianten Ableitungen von (4, 30) und die $(m-1)$-ten partiellen Ableitungen nach $\overline{v}^i$ bzw. $\overline{p}^i$ der Gruppen (4, 31) und (4, 42) vorkommen.

Wir sind nun imstande die folgenden Sätze auszusprechen:

Satz 1. *Zwei allgemeine affinzusammenhängende Räume von Linienelementen sind dann und nur dann äquivalent, falls eine natürliche Zahl N existiert derart, daß die N ersten aus* (4, 30) *durch kovariante Ableitung, und die N aus* (4, 31) *und* (4, 32) *durch partielle Ableitung gewonnenen Gleichungsgruppen verträglich sind, und die Lösung dieser Gruppen auch die $(N+1)$-te Gleichungsgruppe identisch befriedigt.*

SATZ 2. *Die Hauptkrümmungstensoren* $F^i_{kls}, M^i_{kl}, N^i_{kl}$, *die Torsionstensoren* $C^i_{kl}, B^i_{kl}, \Omega^i_{kl}$, *die Tensoren* $\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}, \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}$ *und die aus ihnen durch kovariante bzw. durch partielle Ableitungen nach* v^i *und* p^i *gebildeten Tensoren bilden ein vollständiges System von Differentialinvarianten.*

Schriftenverzeichnis.

CARTAN, E., [1] *Les espaces de Finsler* (Actualités scientifiques et industrielles, 79), Paris, 1937

DOUGLAS, J., [1] The general geometry of paths, *Annals of Math.*, **29** (1928), 143.

THOMAS, J. M.—VEBLEN, O., [1] Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.*, **27** (1926), 279.

VARGA, O., [1] Über Affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), 7.

[2] Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen, und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du I. Congrès des Mathématiciens Hongrois*, Budapest (1952), 147.

VEBLEN, O., [1] *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Cambridge Tracts, No. 24), Cambridge, 1953.

(Eingegangen am 15. Dezember 1954.)

On the Jordan—Dedekind chain condition.

By J. JAKUBÍK in Košice (Czechoslovakia).

Let S be a partly ordered set, $a, b \in S$, $a < b$. $R(a, b)$ (eventually with indices) denotes a chain in S with the least element a and the greatest element b. If $R(a, b)$ is finite and contains n elements, his length is $n-1$. A chain $R(a, b)$ is maximal, if it is not a proper subset of any chain $R_1(a, b)$ in S. Many important properties of the partly ordered set S can be proved under the assumption that (i) all bounded chains in S are finite and (ii) the following Jordan—Dedekind condition holds:

(JD) If $a, b \in S, a < b$, and $R_1(a, b), R_2(a, b)$ are maximal chains, then both these chains have the same length.

In a recent paper [1] G. SZÁSZ generalizes the concept of the length of a chain as follows: if a chain $R(a, b)$ is infinite, his length is the cardinal number of the set $R(a, b)$. The condition (JD) can now be considered in the generalized sense, without supposing that the lengths of $R_1(a, b), R_2(a, b)$ are finite.

It is well-known that every distributive lattice in which all bounded chains are finite satisfies the Jordan—Dedekind chain condition. In the paper [1] the interesting theorem (theorem 3) is stated:

There exists a distributive lattice which does not satisfy the (generalized) condition (JD)[1]).

In the present note we give a generalization of this theorem.

Let M be a non-empty set. Let us denote by $S(M)$ the set of all functions f defined on M such that, for every $i \in M$, $f(i)$ is a rational number, $f(i) \in [0, 1]$. $S(M)$ is partly ordered in the usual way: $f_1 \leqq f_2$ if and only if $f_1(i) \leqq f_2(i)$ for every $i \in M$. $S(M)$ is a distributive lattice; we shall denote the least and the greatest elements of $S(M)$ by f_0 and f_1, respectively.

Lemma 1. *If M is non-empty, then there exists in the lattice $S(M)$ a countable maximal chain $R_1(f_0, f_1)$.*

1) The formulation of the example in the proof of this theorem is not correct; see the „Correction" on p. 270 of this volume.

Proof. Let R_1 be the set of all „constants" of $S(M)$ (i. e. of the $f \in S(M)$ with $f(i)=f(j)$ for all $i, j \in M$); the function $f \in R_1$, for which $f(i)=x$ ($x \in [0, 1]$, x rational) identically, we denote by f_x. Clearly, R_1 is a countable chain, containing f_0 and f_1. Let $g \in S(M), g \notin R_1$. Then there exist elements $i, j \in M$ for which $g(i)<g(j)$. We choose a rational number z such that $g(i)<z<g(j)$. Then we have $g(i)<f_z(i)$, $g(j)>f_z(j)$, and the elements g, f_z are incomparable. It follows that the chain R_1 is maximal. We shall say that R_1 is the *diagonal chain* in $S(M)$.

Lemma 2. *Let $M=[0, 1]$. In the lattice $S(M)$ there exists an uncountable maximal chain $R_2(f_0, f_1)$.*

Proof. For every $i \in M$ let R^i be the set of all $f \in S(M)$ with the property

$$j<i \Longrightarrow f(j)=1, \quad j>i \Longrightarrow f(j)=0.$$

Every R^i is a chain. It is clear that the set-theoretical sum $R_2=\bigcup R^i$ is a chain containing f_0 and f_1. The chain R_2 is uncountable.

We will prove that the chain R_2 is maximal. Let the element $g \in S(M)$ be comparable with all $f \in R_2$, let $f_0 \neq g \neq f_1$. i) If there exists $i \in M$ such that $g(i) \in (0, 1)$, we choose $f_\alpha, f_\beta \in R^i$ such that $f_\alpha(i)<g(i)<f_\beta(i)$. Then it must be $f_\alpha(j) \leqq g(j) \leqq f_\beta(j)$ for every $j \in M$, thus $g \in R^i \subset R_2$. ii) Let us suppose that, for every $i \in M$, $g(i)=0$ or $g(i)=1$. If there exist $i, j \in M, i<j$ with $g(i)=0$, $g(j)=1$, then we consider the function $f^j \in R^j$ such that $f^j(j)=\frac{1}{2}$. The elements f^j, g are incomparable, contrary to the hypothesis. Hence if $g(i)=0$, $g(j)=1$, it must be $j<i$. Let M_1 be the set of all $i \in M$ such that $g(i)=0$, $k=\inf M_1$. Clearly $g \in R^k \subset R_2$, and the chain R_2 is maximal. We shall say that R_2 is the *superficial chain* in $S(M)$.

The proof of the theorem 3 in [1] follows from lemma 1 and 2.

Remarks. 1) In the proof of lemma 2 the assumption $M=[0, 1]$ can be replaced by the following weaker one: M is an uncountable complete chain.

2) If we suppose only that M is an uncountable chain, the chain R_2 constructed in the proof of lemma 2 need not be maximal.

3) Let M be non-empty. Then the lattice $S(M)$ is not complete. We shall now suppose the axiom of choice and construct a complete distributive lattice which does not satisfy the condition (JD).

Let M be a non-empty set. We denote by $S^0(M)$ the lattice of all real functions f defined on M such that, for every $i \in M$, $f(i) \in [0, 1]$. Clearly the lattice $S^0(M)$ is isomorphic with the direct union ΠA_i ($i \in M$) where every A_i is isomorphic with the chain $A=[0, 1]$. The lattice A is complete and completely distributive (see [2], p. 146, (22'), and [3]), hence the lattice $S^0(M)$ is complete and completely distributive. The least (greatest) element of $S^0(M)$ will be denoted by f_0 (f_1).

L e m m a 3. *Let M be non-empty. In the lattice $S^0(M)$ there exists a maximal chain $R_1(f_0, f_1)$ the length of which is c (i. e. the power of the continuum).*

See the proof of lemma 1.

L e m m a 4. *Let $\alpha(M)$ be the cardinal number of the set M, let $\alpha(M) > c$. In the lattice $S^0(M)$ there exists a maximal chain $R_2(f_0, f_1)$, the length of which is $\alpha(M)$.*

P r o o f. Suppose the set M is well-ordered. We construct the maximal chain $R_2(f_0, f_1)$ as in lemma 2. The cardinal number of every chain $R^i, i \in M$, is c. The chains $R^i, R^j, i \neq j$ have not more than one element in common (the set $R^i \cap R^j$ contains one element if i covers j or i is covered by j in M). It follows that the cardinal number of the chain $R_2 = \bigcup R^i \; (i \in M)$ is $c \cdot \alpha(M) = \alpha(M)$.

L e m m a 5. *Let S be a lattice, $S = A \times B$, let $0_a, 1_a$ $(0_b, 1_b)$ be the least resp. the greatest element of A (B), let $R_1(0_a, 1_a)$, $R_2(0_b, 1_b)$ be a maximal chain in the lattice A resp. B. Then the set R of all elements of S which have the form*

$$\text{a)} \quad (a_i, 0_b), \quad a_i \in R_1(0_a, 1_a)$$

or

$$\text{b)} \quad (1_a, b_i), \quad b_i \in R_2(0_b, 1_b)$$

is a maximal chain in S with the least element $(0_a, 0_b)$ and with the greatest element $(1_a, 1_b)$.

P r o o f. Clearly, R is a chain in S containing the elements $(0_a, 0_b)$, $(1_a, 1_b)$. Suppose that the element $(a, b) \in S$ is comparable with all elements of the chain R. Then the element a resp. b is comparable with all elements of the chain $R_1(0_a, 1_a)$ resp. $R_2(0_b, 1_b)$. If $b = 0_b$, then clearly $(a, b) \in R$. If $b > 0_b$, then the element (a, b) is comparable with the element $(1_a, 0_b) \in R$; hence $a \geqq 1_a$, $a = 1_a$, consequently $(a, b) \in R$.

L e m m a 6. *Let M_1, M_2 be non-empty, disjoint subsets of the set M with $M_1 \cup M_2 = M$. Then the lattice $S^0(M)$ is isomorphic with the direct union $S^0(M_1) \times S^0(M_2)$.*

The proof is clear.

Now we will prove the

T h e o r e m. *Let α be a cardinal number, $\alpha \geqq c$. There exists a complete and completely distributive lattice S_α with the least element f_0 and the greatest element f_1, which has the following property: for any cardinal number β with $c \leqq \beta \leqq \alpha$, there exists in S_α a maximal chain $R_\beta(f_0, f_1)$ the length of which is β.*

Proof. Let M be a well-ordered set the cardinal number of which is α. We show that $S_\alpha = S^0(M)$ possesses the required property. For $\beta = c$ or $\beta = \alpha$ the statement is proved in the lemma 3 resp. 4. Let $c < \beta < \alpha$. Then there exists a subset $M_1 \subset M$ such that the cardinal number of M_1 is β. Denote $M_2 = M - M_1$, $A = S^0(M_1)$, $B = S^0(M_2)$. Let A_0 be the superficial chain in the lattice A (see lemma 4); let B_0 be the diagonal chain in the lattice B (see lemma 3). We denote the least and the greatest element in A (B) as in lemma 5. By lemma 5 the set of all elements of $A \times B$ which have the form a) or b) is a maximal chain R in $A \times B$. The length of the chain $A_0(B_0)$ is β (c), hence the length of the chain R is $\beta + c = \beta$. Thus by lemma 6 there exists a maximal chain $R_\beta(f_0, f_1)$ in the lattice $S^0(M)$ the length of which is β.

References.

[1] G. Szász, Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices, *these Acta*, **16** (1955), 89—91.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory* (American Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25), revised edition, (New York, 1948).

[3] J. R. Büchi, Representation of complete lattices by sets, *Portugaliae Math.*, 11 (1952), 151—167.

(Received October 24, 1955.)

Correction to my paper "Generalization of a theorem of Birkhoff..."*).

By G. SZÁSZ in Szeged.

J. JAKUBÍK has kindly called my attention to the fact that the proof of Theorem 3 is not correct, because the relation Θ is not a congruence relation on H. The proof may be corrected as follows.

Let S_1 and S_2 be the sets consisting of all real numbers x_1, x_2, respectively, such that

$$0 \leqq x_1 \leqq 1; \quad 0 \leqq x_2 < 1, \ x_2 \text{ rational},$$

and let S_1, S_2 be partial ordered in the natural way. Consider the set H of all couples (x_1, x_2) $(x_1 \in S_1, x_2 \in S_2)$, partial ordered as in the original proof. Then H is the cardinal product of the chains S_1, S_2. Consequently, H is a distributive lattice without greatest element. By adjoining a greatest element I, we get a lattice L which is again distributive. Now, consider in L the chains C_1, C_2 consisting of the elements

$$C_1: (0, x_2) \ (x_2 \in S_2), \text{ and } I,$$
$$C_2: (x_1, 0) \ (x_1 \in S_1), \ (1, x_2) \ (x_2 \in S_2), \text{ and } I.$$

Clearly C_1 and C_2 both are maximal, however C_1 is countable and C_2 is not countable. Thus our theorem is proved.

(*Received November 11, 1955.*)

*) *These Acta*, **16** (1955), 89—91.

Bibliographie.

Paul Dubreil, Algèbre I. Équivalences, opérations, groupes, anneaux, corps. Deuxième édition revue et augmentée (Cahiers scientifiques, publiés sous la direction de M. Gaston Julia, fascicule XX), XII + 468 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954.

Les trois premiers chapitres exposent les éléments de la théorie des ensembles et les notions fondamentales de l'algèbre abstraite, y compris les éléments de la théorie des treillis, développent les propriétés les plus simples et les plus importantes des groupes, et discutent en détail des groupes de transformations.

Le chapitre IV traite des relations d'équivalence régulière (autrement dit, relations de congruence) opérant dans un groupoïde, dans un groupe ou dans un anneau, puis, en les appliquant, on introduit le concept des sous-groupes invariants et des idéaux. On traite en particulier de la théorie des idéaux dans les anneaux noethériens.

Le chapitre V est consacré à l'étude de quelques problèmes d'extension concernant des demi-groupes et des corps. Il commence par étudier le problème de plonger un demi-groupe dans un groupe et, particulièrement, de plonger un anneau dans un corps; ensuite, après avoir analysé les propriétés des corps ordonnés, il nous conduit à la méthode de complétion de ces corps; enfin, il fait quelques remarques générales sur les extensions algébriques et sur les extensions transcendantes des corps.

Le chapitre VI commence par discuter du problème de factorisation des éléments dans un anneau et, en appliquant les résultats obtenus, il traite d'une condition nécessaire et suffisante, donnée par W. Krull, pour que les éléments d'un domaine d'intégrité avec élément-unité soient à factorisation unique. Puis les anneaux de polynomes (sur un anneau commutatif) et leurs idéaux sont étudiés en détail, particulièrement le théorème de la base finie de Hilbert et quelques théorèmes fondamentaux concernant l'irréductibilité des polynomes.

La première partie du chapitre VII a pour sujet la théorie des équations algébriques. On indique d'abord quelques propriétés générales des équations sur un anneau, puis on traite des équations sur un corps. Comme application à la géométrie algébrique on y trouve le théorème de Noether sur les idéaux de polynomes. Dans la seconde partie du chapitre on démontre d'abord le théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques, puis on l'applique pour étudier les propriétés les plus importantes des nombres algébriques, particulièrement des entiers algébriques.

Quelques notes, à la fin du volume, apportent différents compléments, utiles à la compréhension de certains passages.

Un second volume est en préparation.

Ce qui caractérise la méthode du livre, c'est que le point de départ de la discussion est toujours le plus général possible; ainsi, après avoir analysé systématiquement les propriétés essentielles des notions introduites, on arrive aux problèmes centraux de l'Algèbre par spécialisation.

Comparée à la première édition, de 1946, la seconde, que nous présentons, est considérablement augmentée (de 150 pages environ). Signalons, parmi les nombreuses additions, les suivantes. Un rôle important a été donné, particulièrement dans l'étude des relations transitives, des sous-groupes invariants et des idéaux, aux ensembles partiellement ordonnés et à la théorie des treillis; la place consacrée à la théorie des demi-groupes et à l'étude de leurs relations d'équivalence a été fort élargie; la discussion des équivalences régulières a été complétée par un paragraphe sur la décomposition multiplicative des éléments d'un demi-groupe abélien avec élément unité; la note III, consacrée à l'axiome du choix, a été complétée par quelques pages sur le théorème de Zorn, les conditions de Hausdorff et de Tukey; quelques nouveaux exercices ont été ajoutés; etc.

Ce livre, ne supposant aucune connaissance préalable des mathématiques supérieures, et traitant de tous les problèmes avec minutie, est aussi un très bon ouvrage d'introduction à l'Algèbre abstraite, mais sa lecture est surtout profitable aux lecteurs possédant déjà une certaine culture mathématique.

G. Szász (Szeged)

N. Dequoy, Axiomatique intuitionniste sans négation de la géométrie projective (Collection de logique mathématique, Série A, fascicule VI), 108 pages, Paris et Louvain, Gauthier-Villars et E. Nauwelaerts, 1955.

Ce travail a pour sujet l'axiomatique de la géométrie projective selon la conception de "l'intuitionnisme sans négation". La dénomination de cette théorie prétend exprimer que son point de départ est l'intuitionnisme et que son développement a pour élément essentiel la suppression de la négation et de tout ce qui y est lié.

Du point de vue mathématique le livre a pour intérêt principal que les axiomes d'incidence ici traités diffèrent considérablement de ceux qui sont usuels dans la construction axiomatique de la géométrie projective. En effet, les axiomes usuels sont ici essentiellement affaiblis (par exemple, dans le cas des deux points écartés il est supposé seulement qu'ils déterminent *au moins* une droite); on a dû néanmoins ajouter deux axiomes complémentaires, "l'axiome du triangle" et "l'axiome du tétraèdre".

G. Szász (Szeged)

H. Pailloux, Un aspect du calcul tensoriel (Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 130), 74 p., Paris, Gauthier-Villars, 1955.

Le calcul tensoriel classique développé pour les espaces à r dimensions E_r est étendu dans ce fascicule à certains espaces fonctionnels E. Une différence significative du calcul tensoriel de l'espace E à celle de l'espace E_r est que, tandis que l'indice muet indique, dans E_r, une sommation, il indique dans E une intégration. Pour que ce calcul soit possible pour E, il est nécessaire que certaines équations intégrales admettent une solution. Cette condition se réduit, dans le cas de E_r, à ce que les systèmes de n équations linéaires à n inconnues qui apparaissent au cours du calcul, aient une solution.

Quelques applications en Mécanique montrent l'importance et l'utilité de la théorie, et font espérer que la théorie trouvera des applications aussi dans d'autres domaines de la Physique mathématique.

Table des matières: I. Calcul tensoriel et calcul fonctionnel. II. Premières variétés de l'espace E. III. L'intégration. IV. Géodésiques d'une variété riemannienne et nouvelles variétés. V. Mécanique analytique. VI. Remarques au sujet d'une équation intégrale.

A. Moór (Debrecen)

Gaston Julia, Cours de Géométrie infinitésimale. Deuxième édition entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars.

Deuxième Fascicule. *Cinématique et Géométrie cinématique.* Première Partie: *Généralités*, 80 pages, 1955.

Ce fascicule traite des idées fondamentales de la cinématique du point et du corps solide, mais il embrasse aussi des applications intéressantes nouvelles de la composition des mouvements. Citons en particulier l'étude des mouvements inverses. A l'aide de deux mouvements inverses on peut établir une sorte de dualité entre les points et les plans de l'espace à trois dimensions. Si, p. e., le point M lié au système invariable S_2 se meut par le mouvement S_2/S_1 dans un plan Π lié à un autre système invariable S_1, alors le plan Π passe par le mouvement inverse S_1/S_2 par un point fixe. (Le symbole S_2/S_1 désigne le mouvement du système S_2 par rapport au système S_1). Sur les théories exposées on peut voir combien intimement sont liées la Géométrie et la Cinématique. Les plus beaux exemples de cette connexion sont la méthode de Poinsot pour construire la normale d'une surface, et l'analyse des singularités d'une surface par cette méthode.

Table des matières: Chap. II. Cinématique du point. Chap. III. Cinématique du corps solide. — Généralités. Étude des vitesses et des accélérations. Chap. IV. Composition des mouvements. — Applications. Chap. V. Détermination du mouvement fini d'un solide connâissant à chaque instant le mouvement instantané. Méthode du trièdre mobile.

Troisième fascicule. *Géométrie infinitésimale.* Première partie: *Méthodes générales. Théorie des courbes*, 220 pages, 1955.

Dans ce fascicule l'A. étudie plusieurs problèmes intéressants de la géométrie différentielle. Les théories discutées sont développées pour les espaces à deux et trois dimensions, mais avec quelques modifications faciles il serait possible le plus souvent de les étendre aux espaces à plus de trois dimensions. Pour les transformations de contact l'A. donne explicitement les formules dans l'espace à $(n+1)$ dimensions. Beaucoup d'applications et d'exemples particuliers montrent l'importance et l'applicabilité des théories développées. La théorie de contact est d'importance notamment dans la théorie des courbes gauches, parce qu'elle permet d'obtenir d'une manière élégante les éléments osculateurs des courbes.

Table des matières: Chap. VI. Généralités sur la représentation analytique des courbes, des surfaces, et sur leurs éléments différentiels du premier ordre. Chap. VII. Théorie du contact. Chap. VIII. Théorie des enveloppes. Chap. IX. Transformation de contact. Chap. X. Étude particulière des familles de droites à un, deux et trois paramètres. Chap. XI. Étude des courbes gauches ou planes.

Quatrième fascicule. *Cinématique et Géométrie cinématique.* Deuxième Partie: *Étude approfondie du mouvement d'un corps solide*, 88 pages, 1955.

Les résultats du troisième fascicule, c'est-à-dire les théorèmes de la géométrie infinitésimale des courbes sont liés dans ce fascicule aux théorèmes de la cinématique. Les quantités cinématiques sont exprimées ainsi par les invariants différentiels des courbes.

La formule la plus importante de la première section est celle d'Euler—Savary, qui détermine le centre de courbure d'une roulette (à savoir de la trajectoire d'un point quelconque du plan mobile). Avec beaucoup d'applications géométriques de cette formule fondamentale, l'A. traite aussi de quelques autres théorèmes intéressants de la géométrie cinématique, comme p. e. le corollaire au page 23 Si les quatre plans mobiles Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 glissent l'un sur l'autre et si I_{kl} désigne le centre instantané de rotation de Π_k/Π_l, alors les six I_{kl} distincts sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Après une définition convenable des propriétés différentielles de premier et de second ordre de la géométrie sphérique, l'A. montre d'une manière élégante que le mouvement d'un solide ayant un point fixe est une généralisation directe du mouvement d'une figure plane.

Table des matières: Chap. XII. Mouvement d'une figure plane. Chap. XIII. Mouvement d'un solide ayant un point fixe. Chap. XIV. Mouvement le plus général d'un corps solide.

A. Moór (Debrecen)

N. Mihăileanu, Geometrie neeuclidiană, 143 p., Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1954.

Die Absicht des Verf. ist eine leichtverständliche, orientierende Einführung in die nichteuklidische Geometrie zu bieten. Dementsprechend verzichtet er auf den axiomatischen Aufbau des zur Darstellung bestimmten Stoffes und bereitet vielmehr den Leser durch Modelle im euklidischen Raume zur Auffassung des Raumes im nichteuklidischen Sinne vor. Betrachtet man die durch irgendwelchen Punkt des euklidischen Raumes gehenden Geraden und Ebenen als Punkte und Gerade, so erhält man das einfachste Modell der projektiven Ebene. Wenn hingegen weitergehend — gestützt auf die Begriffe der Orthogonalität und des Winkels — auch die metrischen Verhältnisse eingeführt werden, dann gewinnt man ein einfaches Modell der elliptischen Ebene. Die um den Mittelpunkt des Modells als Zentrum beschriebene Kugel wird durch die die Punkte der projektiven bzw. elliptischen Ebene repräsentierenden Geraden in diametral entgegengesetzten Punkten getroffen. Wenn die Elemente eines solchen Punktpaares als ein einziger Punkt aufgefaßt werden, gelangen wir zu einem noch plastischeren, sphärischen Bilde der projektiven, bzw. elliptischen Ebene. Das Studium der sphärischen Kegelschnitte leitet zum Begriffe des absoluten Gebildes und führt, nach einer entsprechenden Wahl der Metrisierung zur einheitlichen Auffassung der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Geometrie. Auf Grund dieser Vorbereitung begreift der Leser schon leicht die Äquivalenz der verschiedenen Modelle und ist zur Aufnahme eines streng axiomatischen Aufbaues der Geometrie genügend vorbereitet — die ihm nunmehr keine Swierigkeit verursachen dürfte.

Das Buch gliedert sich in fünf Teile. Der erste Teil bespricht die sphärische Geometrie, im Laufe der Behandlung der sphärischen Kegelschnitte gelangen wir mit Hilfe des absoluten Gebildes zu den Laguerreschen Formeln. Der zweite Teil legt auf Grund des projektiven Maßes die einheitliche Auffassung der Geometrien dar, und geht auf die klassischen Begriffe und Sätze der nichteuklidischen Trigonometrie und auf die nichteuklidische Bewegung ausführlich ein. Der dritte Teil behandelt die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene und des hyperbolischen Raumes. Der vierte Teil bespricht einige differentialgeometrische Fragen, wie Linien und Bogenelement, Krümmung, geodätische Gebilde, Frenet-sche Formeln, die Pseudosphäre, den Riemannschen Raum. Der fünfte Teil behandelt die Poincaréschen und Kleinschen Modelle, ferner wird das Hilbertsche Axiomensystem dargelegt und es wird betont, daß die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, der Stetigkeit sowohl mit dem euklidischen als auch mit dem hyperbolischen Parallelenaxiom verträglich sind.

Franz Kárteszi (Budapest)

Karl Strubecker, Differentialgeometrie I. Kurventheorie der Ebene und des Raumes (Sammlung Göschen, Bd. 1113/1113a), 150 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1955.

Der Inhalt dieses Bändchens steht zu seinem Umfang in einem günstigen Verhältnis. Das Buch gliedert sich in zwei Abschnitte, die die Differentialgeometrie der ebenen Kurven bzw. die Theorie der Raumkurven behandeln. Gelegentlich werden auch komplexe analytische Kurven betrachtet; so z. B. das letzte Kapitel des zweiten Abschnittes beschäftigt sich mit der Theorie der krummen isotropen Raumkurven. Zahlreiche Beispiele machen die Darstellung lebendig. So ist das Bändchen ein brauchbares Hilfsbuch für Studenten und auch für Vortragenden der einführenden differentialgeometrischen Vorlesungen.

T. Szerényi (Szeged)

H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXIII), VIII + 164 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Das Buch beschäftigt sich größtenteils mit den Elementen der Verbandstheorie; gibt aber auch einige Anwendungen auf die abstrakte Algebra, projektive Geometrie, Topologie und mathematische Logik.

Zuerst werden die grundlegenden Begriffe der Verbandstheorie (algebraische und ordnungstheoretische Definition, Isomorphismus, Ordnungs- und Verbandshomomorphismus, Teilverbände u. s. w.) und die einfachsten Eigenschaften der wichtigsten Verbandsklassen (distributive und modulare, vollständige, komplementäre und atomare Verbände) besprochen, dann kommt eine eingehende Untersuchung der modularen, distributiven und Booleschen Verbände. Anschließend werden die obenerwähnten Anwendungen, und zwar die verbandstheoretische Charakterisierung der projektiven Geometrien, die wichtigsten Eigenschaften der Verbände von Äquivalenzrelationen in Mengen, der Verfeinerungssatz von Schreier, die verbandstheoretische Interpretation der lineare Abhängigheit, die algebraische bzw. die topologische Charakterisierung der Booleschen Verbände und deren Beziehungen mit der klassischen Aussagenlogik dargestellt. In einem Anhang werden die im Text verwendeten logischen und mengentheoretischen Begriffe und weiter einige Begriffe aus der universellen Algebra zusammengestellt.

Dieses sorgfältig geschriebene Buch hat tatsächlich den Charakter einer Einführung und ist ein wohl brauchbares Werk für Anfänger in der Verbandstheorie. Nur die Beispiele, die aus der Geometrie, der Algebra und der Topologie gewählt sind, setzen eine gewisse mathematische Allgemeinbildung voraus.

G. Szász (Szeged)

Lothar Heffter, Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen, VIII + 63 S., Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Das Büchlein behandelt verschiedene (notwendige und) hinreichende Bedingungen für die Analytizität einer Funktion $f(z)$, d. h. für ihre Darstellbarkeit als Summe einer Potenzreihe um jeden Punkt eines Gebietes G. Diese Bedingungen sind die von Cauchy (Existenz und Stetigkeit von $f'(z)$), die von Goursat (Existenz von $f'(z)$) und die von Morera (Verschwinden des Integrals von $f(z)$ am Rande jedes achsenparallelen Rechtecks $R \subset G$). Die Hinlänglichkeit der letzten Bedingung wird neben der klassischen Beweismethode auch durch zwei verschiedene Beweisverfahren des Verfassers bewiesen. Es ist sehr enttäuschend, daß der Verfasser, obwohl er einen neuen einfachen Beweis des Looman—Menschoffschen Satzes verspricht, am Anfang desselben aber die gleichmäßige partielle Differenzierbarkeit von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ voraussetzt, woraus natürlich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y folgt, so daß der wesentliche Inhalt des erwähnten Satzes umgegangen und das ganze Problem unmittelbar auf die klassische Cauchysche Bedingung zurückgeführt wird.

Die notwendigen Vorkenntnisse werden in einem einleitenden Kapitel zusammengefaßt. Auch hier findet man einige Fehler. Es wird z. B. behauptet, daß die Summen

$U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{b-a}{n}$, wo $u_i = \inf_{x_{i-1} \leqq x \leqq x_i} f(x)$, $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ist, mit wachsendem n nicht abnehmen (S. 10), was natürlich im allgemeinen nicht zutrifft. Unrichtig ist auch die Behauptung, daß der Konvergenzradius einer beliebigen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ gleich $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$ ist (S. 27). Ebenso enthält der Beweis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit des Integrals $\int_a^x f(t)\,dt$ eine wesentliche Lücke (S. 11—12). Es ist noch zu bemerken, daß auf S. 44 die Bedingung (D) aus der Bedingung (Δ) nur bei vorausgesetzter Stetigkeit der partiellen Ableitungen f_2 und g_1 folgt.

Ein Anhang gibt Übersicht über die Literatur der Begründung der Funktionentheorie.

Ákos Császár (Budapest)

Günter Pickert, Analytische Geometrie (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 24), X + 397 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.—G., 1953.

Die analytische Geometrie wurde auch in neueren Zeiten in verschiedenartigen Bearbeitungen den interessierten Lesern vorgelegt. Das vorliegende Buch bringt eine neue Farbe in diese bunte Manigfaltigkeit. Sein Ziel ist, bei Voraussetzung von möglichst wenigen Vorkentnissen eine exakte und klare Darstellung der analytischen Geometrie zu geben, die sich an anderen Studien nicht lehnt. Verf. sucht dieses Ziel dadurch erreichen, daß er den Punkt und den Vektor als Grundbegriffe nimmt, und — das Kenntnis des Körpers der reellen Zahlen voraussetzend — stufenweise ein Axiomensystem zusammenstellt (das auch die Definitionen der Vektoroperationen enthält). Auf Grund dieses Axiomensystems wird dann die affine, metrische und projektive Geometrie des n-dimensionalen Raumes entwickelt. Durch diese axiomatische Behandlung vermeidet er einerseits die Benützung elementargeometrischer Vorkenntnisse, andererseits die Gefahr bloß lineare Algebra zu treiben.

Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die analytischen Geometrie des n-dimensionalen Raumes; die Ebene und der 3-dimensionalen Raum kommen nur als Spezialfälle oder illustrierende Beispiele vor. Oft werden anstatt des Körpers der reellen Zahlen allgemeinere Schiefkörper oder angeordnete Schiefkörper zugrundegenommen. Obgleich der Apparat der modernen Algebra in großem Maße benutzt wird, behält das Buch seinen geometrischen Charakter. Die Darstellung ist überall interessant und anziehend.

Obwohl die Betrachtungen überall klar und leichtverständlich sind, jedoch scheint das Buch wegen der allgemeinen Voraussetzungen zum Zweck einer Einführung etwas schwierig zu sein. Verf. versucht sich dadurch rechtfertigen, „daß die so erreichte frühzeitige Heranführung des Lernenden an die Begriffsbildungen und Gedankengänge der heutigen Mathematik es lohnt, diese Schwierigkeiten in Kauf zu nehmen.“ Dieser Standpunkt ist natürlich bestreitbar.

Kapitel I, über affine Geometrie, behandelt die Kennzeichnung der reellen affinen Räume, Vektorräume, Gerade und Ebene, Vektorscharen und lineare Unterräume, kanonische Basis einer Vektorschar, Linearformen, lineare Gleichungen, affine Abbildungen, lineare Abbildungen und Matrizen, Multiplikation von linearen Abbildungen und Matrizen, Determinanten, Unterdeterminanten, Eigenwerte und Eigenvektoren, Orientierung.

In Kapitel II, über metrische Geometrie, handelt es sich über: Kennzeichnung der metrischen Räume, inneres Produkt, Winkel, Bewegungen, Inhalt, vektorielles Produkt, Kreis und Kugel, komplexe metrische Räume, Hyperflächen zweiter Ordnung.

Kapitel III, über projektive Geometrie, behandelt die projektiven Räume, Koordinaten und Doppelverhältnisse, Kollineationen, Projektionen, Korrelationen, Polaritäten und Nullsysteme, Quadriken, doppelpunktfreie Quadriken bei Dimension 2 und 3, Übergang zur affinen Geometrie, Linienkoordinaten bei Dimension 3.

Es folgt ein aus drei kurzen Paragraphen bestehender Anhang über trigonometrische Funktionen mit Verwendung des Integrals von $(1+x^2)^{-1}$; Kennzeichnung der projektiven Ebenen ohne Verwendung von Vektoren und Skalaren; endlich die Automorphismen des Körpers der reellen Zahlen (d. h. der Beweis, daß der Körper der reellen Zahlen nur den identischen Automorphismus besitzt).

Zahlreiche Aufgaben dienen zur Vertiefung des behandelten reichhaltigen Stoffes, und der Text ist durch schöne, übersichtliche Abbildungen illustriert.

J. Szendrei (Szeged)

G. Pickert, Lineare Algebra (Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. I, 1. Teil, Heft 3/I), 72 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner, 1953.

Diese zwei Artikel der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften geben eine übersichtliche Darstellung der neueren Entwicklung der linearen Algebra und der Theorie der Matrizen. Der erste Teil des ersten Artikels enthält die Theorie der Moduln und Vektorräume (Linearformen, Dualität in Vektorräumen usw.), der zweite die Theorie der tensoriellen und äußeren Produkte. Der zweite Artikel bringt eine Übersicht über verschiedene mit dem Matrizenbegriff zusammenhängende Fragen (Ähnlichkeit, Äquivalenz von Matrixpaaren, Kongruenz usw.). Der Stoff wird vom Standpunkt der modernen Algebra aus behandelt; den Betrachtungen wird der Begriff eines Moduls über einem beliebigen Ring zugrunde gelegt, welcher Begriff den des Vektorraumes umfaßt. Dementsprechend werden die in der Einleitung angedeuteten mannigfachen Zusammenhänge mit den anderen Gebeiten der Mathematik nicht näher verfolgt. Für diesen wird aber der Leser durch die bis 1932 zurückgehenden ausführlichen Literaturangaben entschädigt.

L. Pukánszky (Szeged)

O.-H. Keller, Geometrie der Zahlen (Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. I, 2. Teil, Heft 11/III), 84 Seiten, Leipzig, B. G. Teubner, 1954.

Das Werk referiert über die Ergebnisse auf dem Gebiet der Geometrie der Zahlen bis zum Jahr 1951. Außer der Aufzählung der Resultate werden auch die Grundideen der wichtigsten Beweise angegeben, und eine Reihe von Vermutungen und Problemen mitgeteilt. Das Orientieren wird dem Leser durch manche geschichtliche Bemerkungen erleichtert.

Kapitel A: „Die grundlegenden Sätze über konvexe Körper im Zahlengitter" enthält einen Bericht über die Minkowskische Geometrie, die zwei Hauptsätze von Minkowski und ihre Verallgemeinerungen, ferner über kritische Gitter und dichteste gitterförmige Lagerungen kongruenter Körper. Kapitel B: „Sternkörper" ist eine ausführliche Bearbeitung der neueren Ergebnisse über nicht-konvexe Körper. Auch die Ergebnisse über spezielle Sternkörper, und eine Reihe von Mahler herrührenden Vermutungen und Problemen sind mitgeteilt. Kapitel C ist dem Problemkreis des Minkowskischen Linearformensatzes gewidmet. Hier ist zu finden die Bibliografie des Minkowski—Hajósschen Satzes, endlich folgen Sätze über diophantische Approximationen. Kapitel D berichtet über die Ergebnisse über das

Minimum homogener Formen. Die Paragraphen sind: definite quadratische Formen und dichteste Kugelpackung; höhere Minima; indefinite binäre Minimalformen; indefinite binäre Formen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern; binäre positiv-definite Hermitesche Formen; ternäre indefinite Formen; binäre kubische Formen; Potenzsummen; Produkte homogener Linearformen. Das folgende Kapitel E: „Inhomogene Formen" bringt ausführlich die Ergebnisse über das Produkt inhomogener Linearformen. Kapitel F: „Definite quadratische Formen" gibt eine schöne Übersicht über das Reduktionsproblem. Es werden auch die Ergebnisse von VORONOJ über Paralleloeder angeführt. Kapitel G berichtet über zahlengeometrische Methoden in der Theorie der Kettenbrüchen. Auch Anwendungen an algebraische Zahlentheorie sind angegeben. Die Anwendungen an algebraische Zahlentheorie bilden den Gegenstand des folgenden Kapitels H. Es werden die Probleme der Diskriminante eines Zahlkörpers, der Einheiten und der Idealklassen diskutiert, und die Zusammenhänge mit der Galoisschen Theorie gezeigt. Kapitel I führt endlich die Resultate von TIETZE über Partitionen und Gitterpunktfiguren an.

Über all diese Gegenstände ist vom Heftchen ein klares Überblick zu gewinnen. Dabei geben 416 Fußnoten eine ausführliche Bibliographie der behandelten Fragen.

Á. Korányi (Szeged)

A. Scholz und B. Schoeneberg, Einführung in die Zahlentheorie. Zweite Auflage (Sammlung Göschen, Nr. 1131), 128 Seiten, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955.

Das vorliegende Buch stellt eine neubearbeitete Auflage des Werkes von A. SCHOLZ mit demselben Titel dar. Die neue Ausgabe kann auf ein ebenso ausgebreitetes Interesse rechnen, wie die originale. Wegen seiner kurzgefaßter, aber doch immer klarer und exakter Darstellung wird das Büchlein schon dem anfängenden Leser ein nützlicher Freund sein. Der Überarbeiter hat gegen der Originalauflage mehrere Änderungen angebracht. Neben stilären und methodischen Änderungen sind an mehreren Stellen neue Beweise angeführt (so z. B. bei der Möbiusschen Umkehrformel), oder die Beweise sind durch Zergliederung einiger Sätze verständlicher gemacht (z. B. im Kapitel über quadratische Formen). Aus der neuen Auflage ist das ursprüngliche erste Kapitel über die Arithmetik natürlicher Zahlen ausgeblieben, es werden nur die Sätze aufgezählt, die im späteren Anwendung finden. Das letzte Kapitel der ersten Auflage (Algorithmisches Rechnen) wurde ganz weggelassen.

Die neue Auflage enthält die folgenden Abschnitte: I. Teilbarkeitsrechnen, II. Kongruenzen, Restklassen, III. Quadratische Reste, IV. Quadratische Formen. Das inhaltsreiche und wertvolle Buch ist mit einem gut brauchbaren Sach- und Namenregister versehen.

J. Szendrei (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION.

H. Bachmann, Transfinite Zahlen (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 1), VII + 204 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 29,80.

L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 3), IV + 168 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 24,80.

H. Boerner, Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXXIV), XI + 287 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 33.

E. Borel—A. Chéron, Théorie mathématique du bridge à la portée de tous (Monographies des probabilités, Calcul des probabilités et ses applications, Fascicule V), Deuxième édition revue et corrigée, XVIII + 424 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LX), zweite Auflage, XV + 526 Seiten. Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 56.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band: Funktionen einer Veränderlichen. Dritte, verbesserte Auflage, XI + 450 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 33.

R. Damien, Théorème sur les surfaces d'onde en optique géométrique avec une note sur le miroir intégral, 34 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 900 fr.

J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 5, Reihe: Gruppentheorie), VII + 115 pages, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 12,60.

H. Dölp—E. Netto, Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten, verbesserte Auflage, 201 Seiten, Berlin, Verlag Alfred Töpelmann, 1955. — DM 4,80.

A. Einstein, Sur l'électrodynamique des corps en mouvement. Traduit par M. Solovine (Les maitres de la pensée scientifique, Collection de mémoires et ouvrages), 56 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 300 fr.

O. Haupt—G. Aumann, Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuer Ergebnisse, zweite, völlig neubearbeitete Auflage unter Mitwirkung von **Christian Y. Pauc,** III. Band: **Integralrechnung** (Göschens Lehrbücherei, Gruppe: Reine und angewandte Mathematik, Band 26), XI + 319 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955. — DM 28.

G. Julia, Cours de géométrie infinitésimale, cinquième fascicule, **Géométrie infinitésimale,** deuxième partie: **Théorie des surfaces.** Deuxième édition entièrement refondue, 145 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 2400 fr.

E. Kamke, Mengenlehre (Sammlung Göschen, Band 999/999a), dritte neugearbeitete Auflage, 194 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955. — DM 4,80.

J. Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations à integrale de Dirichlet bornée (Cahiers scientifiques, fascicule XXII), VII + 257 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 4000 fr.

E. Lutz, Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques (Actualités scientifiques et industrielles, No 1224), 106 pages, Paris, Hermann, 1955.

C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 2), VIII + 222 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 28,80.

G. Pickert, Projektive Ebenen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXXX), VIII + 343 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 44,80.

H. Poincaré, Oeuvres, tome X, **Physique mathématique,** X + 632 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1954. —

L. Rougier, Traité de la connaissance, 450 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955. — 2200 fr.

P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 4), IX + 123 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 23,60.

H. Sanden, Praxis der Differentialgleichungen, vierte, erweiterte Auflage, 114 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955. — DM 6,80.

F. G. Tricomi, Vorlesungen über Orthogonalreihen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LXXVI), übersetzt und zum Druck bearbeitet von F. Kasch, VIII + 264 Seiten, Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. — DM 34.

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 130—131, Paris, Gauthier-Villars.

130. M. H. Pailloux, Une aspect du calcul tensoriel, 74 pages, 1955. — 1100 fr.

131. F. Pollaczek, Sur une généralisation des polynomes de Jacobi, 55 pages, 1956. — 1000 fr.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

Prix d'abonnement pour l'étranger \$ 6.—. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Sztálin-út 21).

Engedélyezési szám: 877/233/14188/55.

Formátum B/5. Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla.
Terjedelem 9 B/5 iv. Nyomdábaadás ideje: 1955. VIII. 26.
Példányszám 600. Megjelenés: 1955. XII. 20.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, V., Szalay-u. 10—14.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója.

Szegedi Nyomda Vállalat 55-4122 Felelős vezető: Vincze György