ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVIII

FASC. 1—2

REDIGUNT

L. KALMÁR, L. RÉDEI, B. SZ.-NAGY

SZEGED, 1. VII. 1957.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

18. KÖTET

1—2. FÜZET

SZERKESZTIK

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

FELELŐS SZERKESZTŐ

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

SZEGED, 1957. július 1.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVIII

1957

REDIGUNT

L. KALMÁR, L. RÉDEI, B. SZ.-NAGY

SZEGED, 1. XII. 1957.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

18. KÖTET

1957

SZERKESZTIK

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

FELELŐS SZERKESZTŐ

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

SZEGED, 1957. december 1.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM

TOMUS XVIII — 1957 — 18. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

A kiadásért felelős: Szőkefalvi-Nagy Béla

Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published
in Szeged, Hungary

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged.

1.

Dans la Note précédente [1] (voir aussi [2], [3], [4]) nous avons démontré que pour toute contraction T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ [1]) il existe, dans un espace de Hilbert plus vaste $\mathfrak{K}$, une transformation unitaire U telle qu'on ait

(1) $$T^{(n)} = \operatorname{pr} U^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,^{2})$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$); ces conditions déterminent U d'une manière univoque [3]).

Dans ce qui suit on désignera la dimension de $\mathfrak{H}$ toujours par $\mathfrak{d}$, elle peut être un nombre cardinal quelconque, fini ou infini.

On aurait croire que si l'on connaît le spectre de U on en peut tirer des informations sur le comportement de T. Or cela n'en est point le cas; en effet, M. SCHREIBER [5] vient de démontrer la proposition suivante:

Théorème 1. *Les transformations unitaires U qui correspondent aux contractions au sens strict T (c'est-à-dire telles que $\|T\| < 1$) sont toutes unitairement équivalentes à la même transformation unitaire, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace $L^2(0, 2\pi)$, définie par la formule*

$$V[u(\varphi)] = e^{i\varphi} u(\varphi).\,^{4})$$

---

[1]) Nous n'envisagerons dans la présente Note que des espaces de Hilbert complexes, mais les résultats peuvent être étendus *mutatis mutandis* aux espaces réels, cf. note [4]).

[2]) Nous employons la notation $T^{(n)} = T^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ et $T^{(n)} = T^{*|n|}$ pour $n = -1, -2, \ldots$. Pour deux transformations linéaires bornées, A de $\mathfrak{H}$ et B de $\mathfrak{K}\,(\supset \mathfrak{H})$, $A = \operatorname{pr} B$ veut dire que, pour tout élément $h \in \mathfrak{H}$, Ah est la projection orthogonale de Bh sur $\mathfrak{H}$.

[3]) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

[4]) D'ailleurs, en vertu du théorème de RIESZ—FISCHER, V est unitairement équivalente à la „translation" $\{x_k\} \to \{x_{k-1}\}$ dans l'espace l^2 des vecteurs $x = \{x_k\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

Dans sa démonstration, M. SCHREIBER se restreint au cas où $\mathfrak{d} \leqq \aleph_0$ et fait usage de la théorie de l'intégration forte des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach. La démonstration que nous allons donner diffère de celle de M. SCHREIBER principalement en ce qu'elle ne fait usage que des intégrales de fonctions ordinaires; elle est valable pour $\mathfrak{d}$ quelconque.

Le résultat s'étend aussi au cas de plusieurs contractions. Contentons-nous de le formuler seulement pour *deux* contractions T_1, T_2 de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On sait (cf. [3]) que si T_1, T_2 sont doublement permutables[5]), il existe, dans un espace plus vaste $\mathfrak{K}$, deux transformations unitaires permutables U_1, U_2 telles qu'on ait

$$T_1^{(n_1)} T_2^{(n_2)} = \text{pr}\, U_1^{n_1} U_2^{n_2} \qquad (n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U_1^{n_1} U_2^{n_2} h$ $(h \in \mathfrak{H})$; le couple $\{U_1, U_2\}$ est alors déterminé par le couple $\{T_1, T_2\}$ de manière univoque[3]). Nous démontrerons le

Théorème 2. *Les couples $\{U_1, U_2\}$ de transformations unitaires qui correspondent aux couples $\{T_1, T_2\}$ de contractions au sens strict, doublement permutables, sont tous unitairement équivalents au même couple, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du couple des transformations unitaires V_1, V_2 de l'espace $L^2[(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)]$, définies par les formules*

$$V_j u(\varphi_1, \varphi_2) = e^{i\varphi_j} u(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (j = 1, 2). \tag{3}$$

Dans le second paragraphe de cette Note nous obtiendrons un résultat analogue pour les semi-groupes à un paramètre.

Démonstration du théorème 1. Soit $r = \|T\| < 1$. Pour toute valeur réelle de φ posons

$$K(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} T^{(n)} = \text{Re}\,[(I + e^{-i\varphi} T)(I - e^{-i\varphi} T)^{-1}], \tag{4}$$

c'est une transformation autoadjointe bornée de $\mathfrak{H}$, fonction continue en norme de φ (cela découle de ce que $\|T^{(n)}\| \leqq r^{|n|}$). Pour tout $h \in \mathfrak{H}$ on a, en posant $h_\varphi = (I - e^{-i\varphi} T)^{-1} h$,

$$(K(\varphi)\, h, h) = \text{Re}\,((I + e^{-i\varphi} T)\, h_\varphi, (I - e^{-i\varphi} T)\, h_\varphi) = \|h_\varphi\|^2 - \|T h_\varphi\|^2;$$

à composantes x_k complexes et de norme $\|x\| = \left[\sum_k |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$. On peut démontrer que dans cette forme le théorème est vrai aussi pour un espace $\mathfrak{H}$ réel: U est alors unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la „translation" $\{x_k\} \to \{x_{k-1}\}$ de l'espace l^2 des vecteurs x à composantes *réelles*.

[5]) A et B sont doublement permutables si A est permutable avec B et B^*.

vu que

$$\|h\| = \|(I - e^{-i\varphi}T)h_\varphi\| \begin{cases} \leqq (1+r)\|h_\varphi\| \\ \geqq (1-r)\|h_\varphi\| \end{cases}$$

il en résulte que

$$c_1(h,h) \leqq (K(\varphi)h, h) \leqq c_2(h,h) \tag{5}$$

avec les constantes positives

$$c_1 = \frac{1-r}{1+r}, \qquad c_2 = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Notons la conséquence suivante de la définition (4):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}(K(\varphi)h, h')\,d\varphi = (T^{(n)}h, h'). \tag{6}$$

Cela étant, envisageons l'ensemble $\mathfrak{K}_0$, évidemment linéaire, des polynomes trigonométriques

$$\Phi(\varphi) = \sum_n e^{in\varphi} h_n$$

à coefficients $h_n \in \mathfrak{H}$,[6]) muni de la notion suivante de produit scalaire:

$$(\Phi, \Phi') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\,d\varphi = \sum_n (h_n, h'_n); \tag{7}$$

on a évidemment $(\Phi, \Phi) \geqq 0$, et $(\Phi, \Phi) = 0$ seulement si $\Phi = 0$, c'est-à-dire si $\Phi(\varphi) \equiv 0$. $\mathfrak{K}_0$ est donc un espace préhilbertien. Soit $\mathfrak{K}$ l'espace hilbertien, complété de $\mathfrak{K}_0$.

Définissons dans $\mathfrak{K}_0$ encore la forme bilinéaire symétrique suivante:

$$\langle \Phi, \Phi' \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (K(\varphi)\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\,d\varphi, \tag{8}$$

en vertu de (5) on a les inégalités

$$c_1(\Phi, \Phi) \leqq \langle \Phi, \Phi \rangle \leqq c_2(\Phi, \Phi).$$

Par conséquent il existe dans $\mathfrak{K}$ une transformation autoadjointe D telle que

$$c_1 I \leqq D \leqq c_2 I, \qquad \langle \Phi, \Phi' \rangle = (D\Phi, \Phi'). \tag{9}$$

Désignons par $D^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée positive de D.

La transformation

$$U[\Phi(\varphi)] = e^{i\varphi}\Phi(\varphi) \tag{10}$$

applique $\mathfrak{K}_0$ sur $\mathfrak{K}_0$ isométriquement, et elle se prolonge alors par continuité

[6]) $h_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices n au plus.

en une transformation unitaire U de $\mathfrak{K}$. De plus, U laisse invariante aussi la forme $\langle\Phi, \Phi'\rangle$, d'où il résulte par (9) que

$$U^* D U = D, \quad \text{donc} \quad DU = UD, \; D^{\frac{1}{2}} U = U D^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Faisons correspondre à chaque élément $h \in \mathfrak{H}$ l'élément $D^{\frac{1}{2}} \Phi_h \in \mathfrak{K}$ où Φ_h désigne la fonction $\Phi_h(\varphi) \equiv h$. Cette correspondance est évidemment linéaire, de plus elle est isométrique parce que, en vertu de (9), (8) et (6), on a

$$\left(D^{\frac{1}{2}} \Phi_h, D^{\frac{1}{2}} \Phi_{h'}\right) = (D\Phi_h, \Phi_{h'}) = \langle\Phi_h, \Phi_{h'}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (K(\varphi)h, h')\, d\varphi =$$
$$= (T^{(0)} h, h') = (h, h').$$

Cela justifie d'identifier $h \in \mathfrak{H}$ avec $D^{\frac{1}{2}} \Phi_h \in \mathfrak{K}$ et de plonger de cette façon $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{K}$.

Pour tout couple d'éléments $h, h' \in \mathfrak{H}$ et pour tout entier n on obtient, faisant usage de (9), (10) et (6):

$$(U^n h, h') = \left(U^n D^{\frac{1}{2}} \Phi_h, D^{\frac{1}{2}} \Phi_{h'}\right) = (D U^n \Phi_h, \Phi_{h'}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (K(\varphi) e^{in\varphi} h, h')\, d\varphi = (T^{(n)} h, h').$$

Puisque $T^{(n)}h$ est un élément de $\mathfrak{H}$, cette relation exprime que $T^{(n)}h$ est la projection orthogonale de $U^n h$ sur $\mathfrak{H}$ (sous-espace de $\mathfrak{K}$), donc U vérifie (1).

Observons encore que les éléments $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$. En effet, on a

$$U^n h = U^n D^{\frac{1}{2}} \Phi_h = D^{\frac{1}{2}} U^n \Phi_h = D^{\frac{1}{2}} \Phi_{n,h} \quad \text{où} \quad \Phi_{n,h} = \Phi_{n,h}(\varphi) = e^{in\varphi} h;$$

or les $D^{\frac{1}{2}} \Phi_{n,h}$ sous-tendent $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K}_0$ et alors aussi $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K}$, mais on a $D^{\frac{1}{2}} \mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ parce que $D^{\frac{1}{2}}$, ayant la borne inférieure positive $c_1^{\frac{1}{2}}$, admet une inverse partout définie.

La transformation unitaire U que nous venons de construire est donc celle qui correspond à la contraction T au sens précisé au début de cette Note.

Reste à prouver que U est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace $L^2 = L^2(0, 2\pi)$. Or, soit $\{g_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ un système orthonormal complet d'éléments de $\mathfrak{H}$, l'ensemble Ω des indices étant de puissance $\mathfrak{d}$. Envisageons la somme orthogonale

$$\mathfrak{L} = \sum_{\omega \in \Omega} \oplus L^2_\omega$$

de $\mathfrak{d}$ répliques de l'espace L^2; les éléments de $\mathfrak{L}$ sont les vecteurs

$$u = \sum_\omega \oplus u_\omega$$

où $u_\omega = u_\omega(\varphi) \in L^2_\omega$ et

$$\|u\|^2 = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \sum_\omega \int_0^{2\pi} |u_\omega(\varphi)|^2 \, d\varphi < \infty.$$

(La dernière condition implique que $u_\omega = 0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices ω.) Faisons correspondre à tout élément

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \sum_n e^{in\varphi} h_n \in \mathfrak{K}_0$$

le vecteur $u \in \mathfrak{L}$ ayant les composantes

$$u_\omega = u_\omega(\varphi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\Phi(\varphi), g_\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{in\varphi} (h_n, g_\omega).$$

Cette correspondance, évidemment linéaire, est aussi isométrique:

$$\|\Phi\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2 = \sum_n \sum_\omega |(h_n, g_\omega)|^2 = \sum_\omega \sum_n |(h_n, g_\omega)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_\omega \int_0^{2\pi} \Big| \sum_n e^{in\varphi} (h_n, g_\omega) \Big|^2 d\varphi = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \|u\|^2.$$

En particulier pour $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} g_\tau$ on a $u_\omega = 0$ pour $\omega \neq \tau$ et $u_\tau = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{im\varphi}$; comme les fonctions $e^{im\varphi}$ sous-tendent l'espace L^2, il s'ensuit que les $u \in \mathfrak{L}$ correspondant aux $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ sous-tendent l'espace $\mathfrak{L}$. La correspondance isométrique $\Phi \leftrightarrow u$ s'étend alors par continuité aux espaces $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ tout entiers. Lorsque $\Phi \leftrightarrow \sum_\omega \oplus u_\omega$, on a $U\Phi \leftrightarrow \sum_\omega \oplus u'_\omega$ avec $u'_\omega(\varphi) = e^{i\varphi} u_\omega(\varphi)$, fait qui est immédiat pour $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ et s'étend alors à tout $\Phi \in \mathfrak{K}$ par continuité.

Cela achève la démonstration du fait que U est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire V de l'espace L^2, multiplication par $e^{i\varphi}$.

Démonstration du théorème 2. Soient T_1, T_2 deux contractions au sens strict de l'espace $\mathfrak{H}$, doublement permutables. Les transformations correspondantes $K_1(\varphi_1)$, $K_2(\varphi_2)$ sont alors permutables pour des valeurs quelconques des paramètres; les inégalités $c_{1j}I \leqq K_j(\varphi) \leqq c_{2j}I$ $(c_{1j} > 0; j = 1, 2)$ entraînent que

$$c_{11}c_{12}I \leqq K_1(\varphi_1)\, K_2(\varphi_2) \leqq c_{21}c_{22}I.$$

En effet, on a p. ex.

$$(K_1(\varphi_1)K_2(\varphi_2)\,h,\,h) = \left(K_1(\varphi_1)\,K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h,\; K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h\right) \geqq$$

$$\geqq c_{11}\left(K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h,\; K_2^{\frac{1}{2}}(\varphi_2)\,h\right) = c_{11}(K_2(\varphi_2)\,h,\,h) \geqq c_{11}\,c_{12}\,(h,\,h).$$

Le reste de la démonstration se transporte sans difficulté du cas d'une seule contraction.

2.

Envisageons maintenant le pendant „continu" du problème, cf. [1], [2], [3]. A l'analogie de (1), la représentation

(12) $$T(s) = \mathrm{pr}\, U(s) \qquad (-\infty < s < \infty)$$

est possible pour tout semi-groupe à un paramètre $\{T(s)\}$ $(0 \leqq s < \infty)$,[7]) faiblement continu, de contractions de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$; $U(s)$ est un groupe à un paramètre, fortement continu[8]), de transformations unitaires d'un espace plus vaste $\mathfrak{K}$, sous-tendu par les éléments de la forme $U(s)\,h$ $(h \in \mathfrak{H})$; $\{U(s)\}$ est déterminé par $\{T(s)\}$ d'une manière univoque[9]).

La question se pose si, à l'analogie avec le fait affirmé par le théorème 1, les groupes $\{U(s)\}$ correspondant de cette façon à des semi-groupes $\{T(s)\}$ différents peuvent être unitairement équivalents.

Rappelons le théorème de HILLE et YOSIDA[10]) suivant lequel les semi-groupes $\{T(s)\}$ de type envisagé se caractérisent par le fait qu'ils ont comme *génératrice* une transformation linéaire A, à domaine dense, fermée mais en général non bornée, et satisfaisant à la condition suivante:

Condition (a). *$I - \varepsilon A$ admet, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inverse partout définie et on a*

$$\|(I - \varepsilon A)^{-1}\| \leqq 1.$$

---

[7]) On pose $T(s) = [T(-s)]^*$ pour $s < 0$; $T(0) = I$.

[8]) Cela entraîne que $\{T(s)\}$ est aussi fortement continu, ce qui est d'ailleurs une conséquence aussi des théorèmes 9.2.2 et 9.4.1 de [6]. Continuité est toujours entendue aussi au point $s = 0$.

[9]) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

[10]) Cf. [6], théorème 12.2.1, ou [7], n° 143.

Cette caractérisation de la génératrice d'un semi-groupe fortement continu de contractions est valable même pour un espace de Banach quelconque. Nous allons démontrer que dans un espace de Hilbert la condition (a) est équivalente à la suivante:

Condition (b). *$I-A$ admet l'inverse partout définie et on a*

$$\|(I+A)(I-A)^{-1}\| \leqq 1.$$

La démonstration sera fondée sur le théorème de VON NEUMANN affirmant que

$$\|u(T)\| \leqq \max_{|z| \leqq \|T\|} |u(z)| \tag{13}$$

pour toute transformation linéaire bornée T de l'espace de Hilbert et pour toute fonction $u(z)$ de la variable complexe $z=x+iy$, holomorphe dans un domaine contenant le disque $|z| \leqq \|T\|$ dans son intérieur. Plus tard nous ferons usage aussi du théorème voisin de HEINZ, affirmant que, sous les mêmes conditions,

$$[\min_{|z| \leqq \|T\|} \operatorname{Re} u(z)]\, I \leqq \operatorname{Re} u(T) \leqq [\max_{|z| \leqq \|T\|} \operatorname{Re} u(z)]\, I. \tag{14}$$ [11])

Démonstration de l'équivalence.

(a) *entraîne* (b). Par hypothèse, $B_\varepsilon = (I-\varepsilon A)^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$ est partout définie et $\|B_\varepsilon\| \leqq 1$. En particulier, $(I-A)^{-1}$, et alors aussi $C=(I+A)(I-A)^{-1}$ sont partout définies. Or on a

$$\begin{aligned} C &= [(1+\varepsilon)I-(I-\varepsilon A)][(I-\varepsilon A)-(1-\varepsilon)I]^{-1} = \\ &= \{[(1+\varepsilon)B_\varepsilon - I](I-\varepsilon A)\}\{[I-(1-\varepsilon)B_\varepsilon](I-\varepsilon A)\}^{-1} = \\ &= [(1+\varepsilon)B_\varepsilon - I][I-(1-\varepsilon)B_\varepsilon]^{-1} = u_\varepsilon(B_\varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$u_\varepsilon(z) = \frac{(1+\varepsilon)z-1}{1-(1-\varepsilon)z}.$$

Pour $0<\varepsilon<2$ cette fonction a son seul point singulier à l'extérieur du cercle unité, et sur ce cercle on a

$$|u_\varepsilon(z)|^2 = \frac{(1+\varepsilon)^2-2(1+\varepsilon)x+1}{(1-\varepsilon)^2-2(1-\varepsilon)x+1} \qquad (|z|=1,\ z=x+iy).$$

Le maximum de cette fonction sur le segment $-1 \leqq x \leqq +1$ est atteint au

---

[11]) Nous renvoyons le lecteur pour des démonstrations de ces théorèmes à [7], no 153, ou à [3], § 4, où ces théorèmes apparaissent comme des conséquences simples de la représentation (1) des puissances d'une contraction.

point $x = -1$ et

$$\max_{|z| \leqq 1} |u_\varepsilon(z)| = \frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon} \qquad (0<\varepsilon<2),$$

par conséquent on a en vertu de (13)

$$\|C\| = \|u_\varepsilon(B_\varepsilon)\| \leqq \frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Faisant tendre ε vers 0 il en résulte que $\|C\| \leqq 1$, c. q. f. d.

(b) *entraîne* (a). Par hypothèse faite, $B = (I+A)(I-A)^{-1}$ est définie partout et $\|B\| \leqq 1$. Partons de la relation évidente

$$I - \varepsilon A = \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)(I+A) + (1+\varepsilon)(I-A)] = \frac{1}{2}[(1-\varepsilon)B + (1+\varepsilon)I]\,(I-A).$$

$(I-A)^{-1}$ est partout définie puisque B l'est, et $(1-\varepsilon)B + (1+\varepsilon)I =$ $= (1+\varepsilon)\left[I + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}B\right]$ admet, pour $\varepsilon > 0$, une inverse partout définie et bornée, parce que $\left\|\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}B\right\| \leqq \left|\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right| < 1$. Il s'ensuit que $I - \varepsilon A$ admet, pour $\varepsilon > 0$, l'inverse partout définie

$$(I-\varepsilon A)^{-1} = 2(I-A)^{-1}[(1-\varepsilon)B + (1+\varepsilon)I]^{-1}.$$

Comme on a

$$2(I-A)^{-1} = [(I-A) + (I+A)](I-A)^{-1} = I + B,$$

il en résulte que

$$(I-\varepsilon A)^{-1} = v_\varepsilon(B)$$

avec

$$v_\varepsilon(z) = \frac{1+z}{(1-\varepsilon)z + (1+\varepsilon)} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Le seul point singulier de cette fonction est situé à l'extérieur du cercle unité, et sur ce cercle même on a

$$|v_\varepsilon(z)|^2 = \frac{1+2x+1}{(1-\varepsilon)^2 + 2(1-\varepsilon^2)x + (1+\varepsilon)^2} = \frac{1+x}{(1+x) + \varepsilon^2(1-x)} \leqq 1$$

puisque $-1 \leqq x \leqq 1$. En vertu de (13) on a donc $\|(I-\varepsilon A)^{-1}\| = \|v_\varepsilon(B)\| \leqq 1$, c. q. f. d.

Dans ce qui suit nous envisagerons seulement le cas où la condition (b) est vérifiée avec le signe *d'inégalité*. En posant $b = \|(I+A)(I-A)^{-1}\|$ on aura dans ce cas

$$\|(I+A)g\| \leqq b\|(I-A)g\|$$

pour tout g de la forme $(I-A)^{-1}h$, donc pour tous les éléments g du domaine de définition de A. Cette inégalité entraîne que

$$\|Ag\|-\|g\| \leqq b(\|g\|+\|Ag\|)$$

d'où il résulte que

$$\|Ag\| \leqq \frac{1+b}{1-b}\|g\|.$$

Comme A est fermée et de domaine dense, il s'ensuit que A est définie partout et qu'elle est *bornée.*

Pour mieux élucider la nature de notre condition, établissons-en quelques formes équivalentes.

Lemme 1. *Pour une transformation linéaire bornée A de l'espace $\mathfrak{H}$ de Hilbert les conditions suivantes sont équivalentes l'une à l'autre:*

(α) *$I-A$ admet une inverse partout définie et* $\|(I+A)(I-A)^{-1}\|<1$;

(β) *il existe un $b<1$ tel que $\|(I+A)h\| \leqq b\|(I-A)h\|$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$;*

(γ) *il existe un $c>0$ tel que* $\operatorname{Re} A \leqq -cI$;

(δ) *il existe un $d>0$ tel que* $\|A+dI\|<d$.

Démonstration. On procédera par la chaîne logique $(\alpha)\rightarrow(\beta)\rightarrow$ $\rightarrow(\gamma)\rightarrow(\delta)\rightarrow(\alpha)$. La première implication est évidente.

(β) *entraîne* (γ). Puisque $\|(I\pm A)h\|^2=\|h\|^2\pm 2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2$, il s'ensuit de ($\beta$) que

$$\|h\|^2+2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2 \leqq b^2[\|h\|^2-2\operatorname{Re}(Ah,h)+\|Ah\|^2] \leqq$$
$$\leqq b^2[\|h\|^2-2\operatorname{Re}(Ah,h)]+\|Ah\|^2,$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{Re}(Ah,h) \leqq -cI \quad \text{avec} \quad c=\frac{1}{2}\,\frac{1-b^2}{1+b^2}.$$

(γ) *entraîne* (δ). Posons $d=\|A\|^2/c$. On a alors pour tout $h \in \mathfrak{H}$

$$\|(A+dI)h\|^2=\|Ah\|^2+2d\operatorname{Re}(Ah,h)+d^2\|h\|^2 \leqq$$
$$\leqq (\|A\|^2-2dc+d^2)\|h\|^2=(d^2-dc)\|h\|^2,$$

donc

$$\|A+dI\| \leqq (d^2-dc)^{\frac{1}{2}}<d.$$

(δ) *entraîne* (α). On a par hypothèse $\|A+dI\|=r<d$. Le disque $|z+d| \leqq r$ étant situé dans l'intérieur du demi-plan gauche, ses points vérifient l'inégalité $|1+z|<|1-z|$, et par conséquent la fonction $\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|$ a sur ce disque son maximum <1. Il s'ensuit alors du théorème de VON NEUMANN que la transformation $(I+A)(I-A)^{-1}$ existe et sa norme est inférieure à 1.

Le lemme est ainsi démontré.

Voici encore quelques conséquences de la condition (δ).

Lemme 2. *Pour tout A vérifiant la condition (δ) on a*

$$\|e^{sA}\| \leqq e^{-as} \qquad (s \geqq 0) \tag{15}$$

avec une constante $a > 0$, les points de l'axe imaginaire appartiennent à l'ensemble résolvant de A, et la résolvante

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

vérifie les inégalités

$$\frac{c_1}{1+\varphi^2} I \leqq \operatorname{Re} R(i\varphi) \leqq \frac{c_2}{1+\varphi^2} I \qquad (-\infty < \varphi < \infty) \tag{16}$$

avec des constantes positives c_1, c_2.

Démonstration. De la condition $\|A + dI\| = r < d$ il s'ensuit par (13) que pour $s \geqq 0$ on a

$$\|e^{sA}\| \leqq \max_{|z+d| \leqq r} |e^{sz}| = e^{-(d-r)s}.$$

D'autre part, la fonction $(i\varphi - z)^{-1}$ est, pour φ réel, régulière sur le disque $|z+d| \leqq r$, et sa partie réelle, $-x|i\varphi - z|^{-2}$, y vérifie les inégalités

$$a(\varphi) = \frac{d-r}{(|i\varphi + d| + r)^2} \leqq -\frac{x}{|i\varphi - z|^2} \leqq \frac{d+r}{(|i\varphi + d| - r)^2} = b(\varphi).$$

Ces fonctions $a(\varphi), b(\varphi)$ sont positives, continues, et leurs produits par $1+\varphi^2$ tendent pour $\varphi \to \infty$ vers les limites positives $d \mp r$. Il s'ensuit qu'il existe des constantes positives c_1, c_2 telles que

$$\frac{c_1}{1+\varphi^2} \leqq a(\varphi) \leqq b(\varphi) \leqq \frac{c_2}{1+\varphi^2}.$$

En appliquant (14) il en résulte (16).

Après ces préliminaires formulons notre

Théorème 3. *Les groupes unitaires $\{U(s)\}$ correspondant aux semi-groupes $\{T(s)\}$ de contractions de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ dont les génératrices A vérifient les conditions du lemme 1, sont tous unitairement équivalents au même groupe unitaire, notamment à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe unitaire $\{V(s)\}$ de l'espace $L^2(-\infty, \infty)$, défini par la formule*

$$V(s)[u(\varphi)] = e^{is\varphi} u(\varphi).$$

Démonstration. Le semi-groupe $\{T(s) = e^{sA}\}$ $(s \geqq 0)$ vérifie l'inégalité (15) avec $a > 0$, ce qui assure la convergence en norme de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-is\varphi} T(s) ds;$$

cette intégrale est égale à $R(i\varphi)=(i\varphi-A)^{-1}$.[12] Puisque $[T(s)]^*=T(-s)$, il en découle que

$$2\,\mathrm{Re}\,R(i\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-is\varphi}T(s)ds.$$

Pour tout couple $h, h'\in\mathfrak{H}$ la fonction $v(\varphi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\mathrm{Re}\,R(i\varphi)h, h')$ est donc la transformée de Fourier de la fonction $(T(s)h, h')$. Les inégalités (16) entraînent que $v(\varphi)\in L(-\infty, \infty)$, et comme de plus $(T(s)h, h')$ est fonction continue de s, on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier:

$$(17)\qquad (T(s)h, h')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varphi s}v(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varphi s}(\mathrm{Re}\,R(i\varphi)h, h')d\varphi.$$

Cela étant, désignons par $\mathfrak{K}_0$ l'ensemble, évidemment linéaire, des polynomes trigonométriques non nécessairement périodiques

$$\Phi(\varphi)=\sum_{\nu}e^{i\nu\varphi}h_\nu$$

à coefficients $h_\nu\in\mathfrak{H}$,[13] muni de la notion de produit scalaire:

$$(18)\qquad (\Phi, \Phi')=\int_{-\infty}^{\infty}(\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))\,dm(\varphi)\quad\text{avec}\quad dm(\varphi)=[\pi(1+\varphi^2)]^{-1}d\varphi;$$

on a évidemment $(\Phi, \Phi)\geqq 0$, et $(\Phi, \Phi)=0$ seulement si $\Phi=0$, c'est-à-dire si $\Phi(\varphi)\equiv 0$. $\mathfrak{K}_0$ est donc un espace préhilbertien; soit $\mathfrak{K}$ son complété.

Définissons sur $\mathfrak{K}_0$ encore la forme bilinéaire symétrique suivante:

$$(19)\qquad \langle\Phi, \Phi'\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\mathrm{Re}\,R(i\varphi)]\,\Phi(\varphi), \Phi'(\varphi))d\varphi;$$

la convergence de cette intégrale découle aisément des inégalités (16), de plus celles-ci entraînent que

$$c_1(\Phi, \Phi)\leqq\langle\Phi, \Phi\rangle\leqq c_2(\Phi, \Phi).$$

Par conséquent il existe dans $\mathfrak{K}$ une transformation autoadjointe D telle que

$$(20)\qquad c_1 I\leqq D\leqq c_2 I,\qquad \langle\Phi, \Phi'\rangle=(D\Phi, \Phi');$$

soit $D^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée positive de D.

---

12) Cf. [6], théorème 11.6.1.

13) $h_\nu=0$ sauf pour un nombre fini de valeurs réelles ν au plus.

Pour s réel, définissons sur $\mathfrak{K}_0$ la transformation $U(s)$ par la formule

$$U(s)[\Phi(\varphi)] = e^{is\varphi}\Phi(\varphi); \tag{21}$$

$U(s)$ applique $\mathfrak{K}_0$ sur $\mathfrak{K}_0$ de manière isométrique et se prolonge alors par continuité en une transformation isométrique de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{K}$, donc en une transformation unitaire de $\mathfrak{K}$. En sa dépendance de s, elle jouit évidemment de la propriété de groupe. Elle laisse invariante aussi la forme $\langle\Phi, \Phi'\rangle$ (sur $\mathfrak{K}_0$), d'où il s'ensuit qu'elle est permutable avec D et alors aussi avec $D^{\frac{1}{2}}$.

Faisons correspondre à chaque élément $h \in \mathfrak{H}$ l'élément $D^{\frac{1}{2}}\Phi_h \in \mathfrak{K}$ où Φ_h désigne la fonction constante $\Phi_h(\varphi) \equiv h$. Cette correspondance est évidemment linéaire, de plus elle est isométrique parce que, en vertu de (20), (19), (18) et (17) on a

$$\left(D^{\frac{1}{2}}\Phi_h, D^{\frac{1}{2}}\Phi'_h\right) = (D\Phi_h, \Phi'_h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\operatorname{Re} R(i\varphi)]h, h')d\varphi =$$
$$= (T(0)h, h') = (h, h').$$

Il est donc légitimé d'identifier $h \in \mathfrak{H}$ avec $D^{\frac{1}{2}}\Phi_h \in \mathfrak{K}$: $\mathfrak{H}$ devient ainsi un sous-espace de $\mathfrak{K}$.

Faisant usage de (21), (20), (19) et (17) on obtient que

$$(U(s)h, h') = \left(U(s)D^{\frac{1}{2}}\Phi_h, D^{\frac{1}{2}}\Phi_{h'}\right) = (DU(s)\Phi_h, \Phi_{h'}) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}([\operatorname{Re} R(i\varphi)]e^{is\varphi}h, h')d\varphi = (T(s)h, h');$$

vu que $T(s)h \in \mathfrak{H}$ cela exprime que $T(s)h$ est la projection orthogonale de $U(s)h$ sur $\mathfrak{H}$. L'équation (12) est donc vérifiée.

Les éléments de la forme $U(s)h$ $(h \in \mathfrak{H})$ sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$. En effet, on a

$$U(s)h = U(s)D^{\frac{1}{2}}\Phi_h = D^{\frac{1}{2}}U(s)\Phi_h = D^{\frac{1}{2}}\Phi_{s,h}$$

avec $\Phi_{s,h}(\varphi) = e^{is\varphi}h$, or les éléments $D^{\frac{1}{2}}\Phi_{s,h}$ sous-tendent évidemment $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}_0$ et alors aussi $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$, mais $D^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$ coïncide avec $\mathfrak{K}$ puisque $D^{\frac{1}{2}}$, ayant la borne inférieure positive $c_1^{\frac{1}{2}}$, admet une inverse partout définie.

Cela achève la démonstration du fait que le groupe $\{U(s)\}$ que nous venons de construire correspond au semi-groupe $\{T(s)\}$ au sens précisé au début de ce paragraphe.

Reste à prouver que $\{U(s)\}$ est unitairement équivalent à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe unitaire $\{V(s)\}$ de l'espace $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$. Soit $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ un système orthonormal complet dans $\mathfrak{H}$. Envisageons la somme orthogonale

$$\mathfrak{L} = \sum_{\omega\in\Omega} \oplus L^2_\omega$$

de $\mathfrak{d}$ répliques de l'espace L^2; les éléments de $\mathfrak{L}$ sont les vecteurs

$$u = \sum_\omega \oplus u_\omega$$

avec $u_\omega = u_\omega(\varphi) \in L^2$ et

$$\|u\|^2 = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \sum_\omega \int_{-\infty}^{\infty} |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi < \infty$$

($u_\omega = 0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'indices). Faisons correspondre à

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \sum_\nu e^{i\nu\varphi} h_\nu \in \mathfrak{K}_0$$

le vecteur $u \in \mathfrak{L}$ avec les composantes

$$u_\omega = u_\omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} (\Phi(\varphi), g_\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} \sum_\nu e^{i\nu\varphi}(h_\nu, g_\omega).$$

Cette correspondance, évidemment linéaire, est aussi isométrique:

$$\|\Phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\Phi(\varphi)\|^2 dm(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\omega |(\Phi(\varphi), g_\omega)|^2 dm(\varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_\omega |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_\omega \int_{-\infty}^{\infty} |u_\omega(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_\omega \|u_\omega\|^2 = \|u\|^2.$$

En particulier, à $\Phi = \Phi(\varphi) = e^{i\nu\varphi} g_\tau$ il correspond le vecteur u avec

$$u_\omega = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \neq \tau, \qquad u_\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varphi^2)}} e^{i\nu\varphi}.$$

Or les fonctions $[\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu\varphi}$ (ν réel quelconque) sous-tendent l'espace $L^2(-\infty, \infty)$.[14] Il en résulte que les $u \in \mathfrak{L}$ correspondant aux $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ sous-tendent $\mathfrak{L}$. La correspondance isométrique $\Phi \longleftrightarrow u$ s'étend alors par continuité

---

[14]) En effet, soit $v(\varphi)$ une fonction $\in L^2(-\infty, \infty)$, orthogonale à $[\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} e^{i\nu\varphi}$ pour tout ν réel. Cela veut dire que la fonction $w(\varphi) = [\pi(1+\varphi^2)]^{-\frac{1}{2}} v(\varphi)$ a sa transformée de Fourier identiquement égale à 0. Puisque $w(\varphi) \in L^2$, cela entraîne que $w(\varphi) = 0$ presque partout, donc aussi $v(\varphi) = 0$ presque partout.

aux espaces $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}$ tout entiers. Lorsque $\Phi \longleftrightarrow \sum_{\omega} \oplus u_{\omega}$, on a $U(s)\Phi \longleftrightarrow \sum_{\omega} \oplus u'_{\omega}$ avec $u'_{\omega}(\varphi) = e^{is\varphi} u_{\omega}(\varphi)$, fait qui est immédiat pour $\Phi \in \mathfrak{K}_0$ et s'étend alors à tout $\Phi \in \mathfrak{K}$ par continuité.

Cela achève la démonstration de ce que $\{U(s)\}$ est unitairement équivalent à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de $\{V(s)\}$, c'est-à-dire la démonstration du théorème 3.

Littérature.

[1] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[2] ——— Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *ibidem*, **15** (1954), 104—114.

[3] ——— Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace, *Appendice au livre „Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy* (Budapest, 1955).

[4] J. J. Schäffer, On unitary dilations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 322.

[5] M. Schreiber, Unitary dilations of operators, *Duke Math. Journal*, **23** (1956), 579—594.

[6] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948).

[7] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3me édition (Budapest, 1955).

(Reçu le 2 avril 1957.)

Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux.

Par CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest (Roumanie).

La notion d'ensemble spectral d'une transformation linéaire bornée d'un espace de Hilbert, introduite par J. v. NEUMANN ([2]), a aussi sens dans le cas général d'une algèbre de Banach A quelconque, à élément unité e. Nous dirons, d'après v. NEUMANN, qu'un ensemble de nombres complexes S est un ensemble spectral de $x \in A$ si, quel que soit la fonction rationnelle $r(\lambda)$ satisfaisant à l'inégalité $|r(\lambda)| \leqq 1$ pour $\lambda \in S$, $r(x)$ existe et on a $||r(x)|| \leqq 1$. La question que nous nous posons c'est de caractériser les algèbres A, pour lesquelles les théorèmes de v. NEUMANN sur les ensembles spectraux sont valables.

Dans le paragraphe 1 nous envisagerons des algèbres de Banach A *involutives* ([1], § 4, 2), tandis que dans le paragraphe 2 il s'agira de l'algèbre $L(X)$ des opérateurs bornés d'un espace de Banach X.

1. La proposition suivante est valable pour une algèbre de Banach quelconque A, à élément unité.

Proposition (N_1). *Si le demi-plan* $\mathrm{Re}\lambda \geqq 0$ *est un ensemble spectral de* x, *on a* $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ *pour toute forme linéaire positive* f *sur* A ([1], § 6, 1 et 2).

Démonstration. Pour $r > 0$ on a $\left|\frac{r-\lambda}{r+\lambda}\right| \leqq 1$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}\lambda \geqq 0$, et par conséquent $||(re-x)(re+x)^{-1}|| \leqq 1$; comme d'autre part $(re-x)(re+x)^{-1} = e - \frac{2x}{r} + \frac{2x^2}{r}(re+x)^{-1}$ on a, pour toute forme linéaire positive f sur A:

$$(1)\quad f(e) - \frac{2}{r}\mathrm{Re} f(x) + \frac{2}{r}\mathrm{Re} f[x^2(re+x)^{-1}] \leqq |f[(re-x)(re+x)^{-1}]| \leqq f(e),$$

où l'on a utilisé le fait que la norme de f est égale à $f(e)$ ([1], § 6, 2).

Mais $\left|\frac{r}{r+\lambda}\right| \leqq 1$ dans le demi-plan droit, donc $\|(re+x)^{-1}\| \leqq \frac{1}{r}$; on a

$$\operatorname{Re} f[x^2(re+x)^{-1}] \geqq -|f[x^2(re+x)^{-1}]| \geqq -f(e)\frac{\|x\|^2}{r};$$

la relation (1) donne

$$f(e)-\frac{2}{r}\operatorname{Re} f(x)-\frac{2\|x\|^2}{r^2}f(e) \leqq f(e),$$

d'où

$$-\frac{f(e)\|x\|^2}{r} \leqq \operatorname{Re} f(x).$$

Faisant tendre r vers l'infini il en résulte que $\operatorname{Re} f(x) \geqq 0$, q. e. d.

Dans le cas de l'algèbre $L(E)$ des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert E, la proposition (N_1) admet une réciproque ([2], th. 52); dans le cas général il y correspondrait la

Proposition (N_2). *Si pour toute forme linéaire positive f sur A on a $\operatorname{Re} f(x) \geqq 0$, le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x.*

Dans le cas de l'algèbre $L(E)$, les deux propositions (N_1), (N_2) se réduisent au théorème 5.2 de v. Neumann ([2]), équivalent au théorème principal 4.2.

Notre problème est de caractériser les algèbres A, dans lesquelles est vraie la proposition (N_2).

Théorème 1. *Si dans une algèbre de Banach involutive A, à élément unité, la proposition (N_2) est toujours vraie, l'algèbre A est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre fermée de l'algèbre des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert.*

Nous démontrerons ce théorème en utilisant le théorème de représentation des algèbres involutives réduites, avec norme régulière, donné par Gelfand et Neumark ([1], § 8, 3, th. 1). Dans ce but nous donnerons quelques propositions simples sur les algèbres de Banach A involutives, à élément unité et dans lesquelles la proposition (N_2) est vraie. (Il sera utile de désigner par F l'ensemble des formes linéaires positives sur A.)

Lemme 1. *L'algèbre A est réduite, c'est-à-dire que si $f(x^*x)=0$ pour tout $f\in F$, on a $x=0$.*

Démonstration. Si $f\in F$, $f(x^*x)=0$ entraîne $f(x)=0$, donc is $f(x^*x)=0$ pour tout $f\in F$, on a $f(x)=0$, donc aussi $f(e^{-i\theta}x)=0$, pour tout θ réel et pour tout $f\in F$. En vertu de la proposition (N_2), $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ est alors un ensemble spectral de $e^{-i\theta}x$, d'où il s'ensuit évidemment que $\mathrm{Re}\, e^{i\theta}\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x. Il résulte que pour tout $\lambda_0 \neq 0$ on a $|\lambda_0(\lambda_0-\lambda)^{-1}| \leqq 1$ sur l'un des ensembles spectraux de x; donc $(\lambda_0 e-x)^{-1}$ existe et on a $||(\lambda_0 e-x)^{-1}|| \leqq |\lambda_0|^{-1}$, ce qui montre d'abord que x est quasinilpotent; la dernière inégalité et la formule

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\varrho} \lambda(\lambda e-x)^{-1} d\lambda \qquad (\varrho > 0)$$

donnent immédiatement $x=0$, q. e. d.

Lemme 2. *Si* $(e+x)^{-1}$ *existe et si* $u=(e-x)(e+x)^{-1}$, *le fait que* $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ *pour tout* $f \in F$, *est équivalent au fait que* $f(e) \geqq f(u^* u)$ *pour tout* $f \in F$.

Démonstration. Nous ferons usage de la formule évidente

$$f[(e+x)^*(e+x)] - f[(e-x)^*(e-x)] = 4\,\mathrm{Re} f(x). \tag{2}$$

Supposons que $(e+x)^{-1}$ existe et que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ pour tout $f \in F$. Alors, en posant $f_1(z) = f[(e+x^*)^{-1} z (e+x)^{-1}]$ pour un $f \in F$, on aura $f_1 \in F$ et par conséquent $\mathrm{Re} f_1(x) \geqq 0$; en appliquant (2) à $f_1(x)$ au lieu de $f(x)$, il resulte que $f(e)-f(u^*u) = 4\,\mathrm{Re} f_1(x) \geqq 0$ donc $f(e) \geqq f(u^*u)$. Supposons inversement que la condition $f(e) \geqq f(u^*u)$ est vérifiée pour tout $f \in F$. Puisque $f_2(z) = f[(e+x)^* z (e+x)] \in F$, on aura aussi $f_2(e) - f_2(u^*u) \geqq 0$, d'où il s'ensuit, en faisant de nouveau usage de (2), que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$, q. e. d.

Lemme 3. *Soit* u *un élément de* A *pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées: (i)* $f(e) \geqq f(u^*u)$ *pour tout* $f \in F$, *(ii)* $(e+u)^{-1}$ *existe. On a alors* $||u|| \leqq 1$.

Démonstration. Si l'on considère $x=(e-u)(e+u)^{-1}$, $(e+x)^{-1}$ existe car $e+x = 2(e+u)^{-1}$. Du lemme 2 il résulte que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ pour tout $f \in F$, donc, en vertu de la proposition (N_2), le demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x. Par conséquent $||u|| = ||(e-x)(e+x)^{-1}|| \leqq 1$, q. e. d.

Pour démontrer le théorème énoncé, nous utilisons un théorème de représentation dû à Gelfand et Neumark ([1], § 8, 3, th. 1). D'après ce théorème, toute algèbre de Banach involutive et réduite est isomorphe à une sous-algèbre de transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert. La construction, de Gelfand et Neumark, de cette isomorphie, a la propriété que si $x \to T_x$ est la représentation isomorphique de l'algèbre, on a $||T_x|| = \sqrt{\sup f(x^*x)}$, le supremum étant pris par rapport à toutes les formes $f \in F$, $f(e) \leqq 1$ ([1], § 8, 3, th. 2). En appliquant ces résultats à notre cas, on obtient que l'algèbre A est isomorphe à une sous-algèbre des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert, et que si $x \to T_x$ est cette isomorphie, on a $\|T_x\| = \sqrt{\sup f(x^* x)}$, $f \in F$, $f(e) \leqq 1$. En posant $\|x\|_1 = \|T_x\|$, on voit sans peine que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur A et que $\|x\|_1 = \|x^*\|_1$; ce dernier fait résulte immédiatement de la relation $T_{x^*} = (T_x)^*$. En plus, si l'on utilise le fait que la norme d'une forme linéaire positive f sur A est égale à $f(e)$, on obtient que $\|x\|_1 \leqq \|x\|$. Nous pouvons maintenant passer au

Lemme 4. *Pour tout élément autoadjoint* x $(x^* = x)$ *on a* $\|x\|_1 = \|x\|$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|x\| \leqq \|x\|_1$. Dans ce but, remarquons que si $x = x^*$, $f(x)$ est réelle, quelle que soit la forme $f \in F$; on a alors $\operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} i f(x) = 0$ pour tout $f \in F$. D'après la proposition (N_2), le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de ix, donc l'inégalité $\left|\frac{1}{1+\lambda}\right| \leqq 1$, vraie dans tout le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqq 0$, entraîne aussi l'existence de $(e + ix)^{-1}$. Si $\|x\|_1 \leqq 1$, il s'ensuit de la définition de $\|\cdot\|_1$ que $f[(ix)^* ix] = f(x^* x) \leqq f(e)$, pour toute forme $f \in F$. On voit donc que si $\|x\|_1 \leqq 1$, l'élément $u = ix$ vérifie les conditions du lemme 3; d'après ce lemme on a alors $\|x\| = \|ix\| \leqq 1$. Nous avons ainsi obtenu que pour les éléments autoadjoints l'inégalité $\|x\|_1 \leqq 1$ entraîne $\|x\| \leqq 1$. En appliquant ce résultat à $x/\|x\|_1$ on obtient que $\|x\| \leqq \|x\|_1$, q. e. d.

Reprenons la démonstration du théorème: On voit que l'algèbre A est complète aussi par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$. Cela résulte immédiatement du fait que pour tout $x \in A$ on a:

$$\|x\|_1 \leqq \|x\| \leqq \left\| \frac{x+x^*}{2} + i \frac{x-x^*}{2i} \right\| \leqq \left\| \frac{x+x^*}{2} \right\| + \left\| \frac{x-x^*}{2i} \right\| =$$
$$= \left\| \frac{x+x^*}{2} \right\|_1 + \left\| \frac{x-x^*}{2i} \right\|_1 \leqq 2\|x\|_1$$

(on a utilisé d'abord le lemme 4, puis le fait que A est une algèbre normée involutive par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$).

Soit maintenant $x \in A$, $\|x\|_1 < 1$; comme A est une algèbre de Banach par rapport à $\|\cdot\|_1$, l'existence de $(e+x)^{-1}$ est assurée; d'autre part l'inégalité $\|x\|_1 < 1$ entraîne $f(x^* x) \leqq f(e)$ quelle que soit la forme $f \in F$, donc x satisfait aux conditions du lemme 3, d'où il résulte que $\|x\| \leqq 1$. Le fait que $\|x\|_1 = \|x\|$ est alors évident car si l'on avait $\|x\|_1 < \|x\|$ pour un $x \in A$, on aboutirait, en choisissant ϱ tel que $\|x\|_1 < \varrho < \|x\|$, à la contradiction cherchée: $\|x/\varrho\|_1 < 1$, $\|x/\varrho\| > 1$. Donc $\|x\| = \|x\|_1 = \|T_x\|$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire que la représentation $x \to T_x$ est aussi isométrique, ce qui achève la démonstration.

2. Dans ce qui suit, X sera un espace de Banach complexe quelconque, X^* son espace dual.

Théorème. 2. *Si le disque unité $|z| \leqq 1$ est un ensemble spectral de tout opérateur T de X tel que $\|T\| \leqq 1$, X est nécessairement un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soient $x_0^* \in X^*$, $x_0 \in X$, et supposons que $\|x_0^*\| \|x_0\| \leqq 1$. Alors si $Tx = x_0^*(x)x_0$ on a $\|T\| \leqq 1$, donc (en considérant la fonction $r(\lambda) = (\lambda + \alpha)(1 + \bar{\alpha}\lambda)^{-1}$, $|\alpha| < 1$)

$$\|(T + \alpha I)(I + \bar{\alpha}T)^{-1}x\| \leqq \|x\|, \quad x \in X,$$

ce qui est équivalent à

$$\|(T + \alpha I)x\| \leqq \|(I + \bar{\alpha}T)x\|, \quad x \in X.$$

Dans notre cas particulier cela signifie que

$$\|x_0^*(x)x_0 + \alpha x\| \leqq \|x + \bar{\alpha}x_0^*(x)x_0\|. \tag{3}$$

Soient maintenant $x, y \in X$, $\|x\| \geqq \|y\| > 0$. Il existe un $x_0^* \in X^*$ tel que $\|x_0^*\| = \|x\|^{-1}$ et $x_0^*(x) = 1$. Si l'on pose $x_0 = y$, on a $\|x_0^*\| \|x_0\| = \|x\|^{-1}\|y\| \leqq 1$, donc, d'après (3),

$$\|y + \alpha x\| \leqq \|x + \bar{\alpha}y\| \qquad (|\alpha| < 1). \tag{4}$$

Cette relation reste évidemment vraie aussi pour $|\alpha| = 1$.

Supposons maintenant que $\|x\| = \|y\|$. Alors, en changeant les rôles de x et y, et en remplaçant α par $\bar{\alpha}$, on obtient de (4) l'inégalité opposée, donc on a

$$\|x + \bar{\alpha}y\| = \|y + \alpha x\| \qquad (|\alpha| \leqq 1). \tag{5}$$

Si $|\alpha| > 1$, on a pour $\beta = 1/\bar{\alpha}$:

$$\|x + \bar{\alpha}y\| = |\alpha| \, \|\beta x + y\| = |\alpha| \, \|x + \bar{\beta}y\| = \|\alpha x + y\|,$$

donc (5) reste vraie pour *tout* α. En posant $\alpha = p/q$, p et q réels, il résulte

$$\|py + qx\| = |q| \left\| \frac{p}{q} y + x \right\| = |q| \left\| y + \frac{p}{q} x \right\| = \|qy + px\|.$$

Donc, si $\|x\| = \|y\| > 0$, on a pour tous p, q réels

$$\|px + qy\| = \|qx + py\|,$$

relation qui est d'ailleurs évidemment vraie aussi pour $x = y = 0$. Or, d'après un théorème de Ficken [3], cette relation est caractéristique pour l'espace de Hilbert. Donc X est un espace de Hilbert, q. e. d.

Bibliographie.

[1] M. A. Наймарк, Кольца с инволюцией, Успехи Матем. Наук, III/5 (1948), 52—145.

[2] J. v. Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 258—281.

[3] F. A. Ficken, Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Annals of Math.*, 45 (1946), 362—366.

(Reçu le 2 janvier et le 11 avril 1957.)

A remark on the theorem of Simmons.

By A. RÉNYI in Budapest.

The theorem of SIMMONS in question [1] can be formulated as follows:

If n and h are positive integers, and if we put for $0 \leqq p \leqq 1$, $q = 1 - p$

$$f_{n,h}(p) = \sum_{r=0}^{h-1} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} - \sum_{r=h+1}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}, \tag{1}$$

then we have

$$f_{n,h}\left(\frac{h}{n}\right) > 0 \quad \text{if} \quad p = \frac{h}{n} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

An ingenious and simple proof of this theorem has been given by E. FELDHEIM ([2] and [3]; the proof is reproduced also in the text book [4], p. 171—172).

The generalization of the inequality of SIMMONS, for the case when np is not an integer, has been considered in this journal by CH. JORDAN[1]) [5] and recently by I. B. HAÁZ [6].

HAÁZ tried to generalize the inequality of Simmons in that he has shown that for fixed values of n and h

$$f_{n,h}(p) > 0 \quad \text{if} \quad 1 \leqq h \leqq \frac{n+1}{2} \quad \text{and} \quad \frac{h-1}{n} \leqq p < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{h}{n}\right). \tag{3}$$

The aim of this note is to show that the apparent generalization given by HAÁZ is really a consequence of the original inequality of SIMMONS if $\frac{h}{n} < \frac{1}{2}$, and for the remaining cases $n = 2h$ resp. $n = 2h - 1$ it follows

---

[1]) One of JORDAN's results expressed by the notations of the present paper runs as follows:

$$f_{n,h}(p) > \binom{n}{h} p^h q^{n-h} \quad \text{if} \quad p < \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \frac{h-1}{n} \leqq p \leqq \frac{h - \frac{1}{2}}{n};$$

further for $\frac{h}{n+1} \leqq p \leqq \frac{h}{n}$ and $p < \frac{1}{2}$ the reversed inequality is valid.

from the evident relations

$$(4) \qquad f_{2h,h}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{and} \quad f_{2h-1,h}\left(\frac{1}{2}\right)>0.$$

To prove our assertions we need nothing else than the well known formula

$$(5) \qquad \sum_{r=0}^{s}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}=(n-s)\binom{n}{s}\int_p^1 t^s(1-t)^{n-s-1}\,dt$$

(see e. g. [2] p. 110 or [4] p. 133). It follows from (1) and (5) that

$$(6) \qquad f_{n,h}(p)=\binom{n}{h}\int_p^1 (h(1-t)+(n-h)t)t^{h-1}(1-t)^{n-h-1}\,dt-1.$$

It can be seen from (6) without any calculations that $f_{n,h}(p)$ is a *decreasing* function of p $(0\leqq p\leqq 1)$. Thus it follows from (2) that

$$(7) \qquad f_{n,h}(p)>0 \quad \text{for} \quad p\leqq\frac{h}{n} \quad \text{if} \quad \frac{h}{n}<\frac{1}{2},$$

further it follows from (4) resp. (5) that

$$(8) \qquad f_{2h,h}(p)>0 \quad \text{and} \quad f_{2h-1,h}(p)>0 \quad \text{for} \quad p<\frac{1}{2}.$$

Evidently (7) and (8) contain (3) which is thus shown to be a consequence of (2) resp. (4).

We have at the same time shown that for $\frac{h}{n}<\frac{1}{2}$ (3) can be replaced by the stronger inequality

$$(3') \qquad f_{n,h}(p)>f_{n,h}\left(\frac{h}{n}\right) \quad \text{for} \quad p<\frac{h}{n}<\frac{1}{2}.$$

References.

[1] T. C. Simmons, A new theorem of probability, *Proceedings of the London Math. Soc.*, **26** (1894—95), 290—334.

[2] E. Feldheim, Simmons valószínűségszámítási tételének új bizonyítása és általánosítása, *Mat. és Fiz. Lapok*, **45** (1938), 99—113.

[3] E. Feldheim, Nuova dimostrazione e generalizzazione di un teorema di calcolo delle probabilità, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **10** (1939), 229—243.

[4] Rényi A., *Valószínűségszámítás* (Budapest, 1954).

[5] Ch. Jordan, Complément au théorème de Simmons sur les probabilités, *these Acta*, **11** (1946), 19—27.

[6] I. B. Haáz, Une généralisation du théorème de Simmons, *these Acta*, **17** (1956), 41—44.

(Received February 12, 1957.)

On the compound Poisson distribution.

By ANDRÁS PRÉKOPA in Budapest.

A probability distribution is called a compound Poisson distribution if its characteristic function can be represented in the form

$$\varphi(u)=\exp\left\{i\gamma u+\int_{-\infty}^{0}(e^{iux}-1)\,dM(x)+\int_{0}^{\infty}(e^{iux}-1)\,dN(x)\right\} \tag{1}$$

where γ is a constant, $M(x)$ and $N(x)$ are defined on the intervals $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$, respectively, both are monotone non-decreasing, $M(-\infty)=N(\infty)=0$, further the integrals

$$\int_{-1}^{0}x\,dM(x),\quad \int_{0}^{1}x\,dN(x)$$

exist. We shall prove that under certain conditions we obtain (1) as a limit distribution of double sequences of independent and infinitesimal random variables and apply this theorem to stochastic processes with independent increments.

Theorem 1. *Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ be a double sequence of random variables. Suppose that the random variables in each row are independent, they are infinitesimal, i. e. for every $\varepsilon>0$*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqq k\leqq k_n}\mathbf{P}(|\xi_{nk}|>\varepsilon)=0,$$

finally, there exists a finite-valued, non-negative random variable η such that

$$\sum_{k=1}^{k_n}|\xi_{nk}|\leqq\eta \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

with probability 1. (This last condition means that the sums of the absolute values of the sample summands are uniformly bounded.) Suppose, moreover, that the sequence of probability distributions of the variables

$$\zeta_n=\xi_{n1}+\xi_{n2}+\cdots+\xi_{nk_n}$$

converges to a limiting distribution. Then this is a compound Poisson distribution.

Proof. Let us define the functions $f^+(x), f^-(x)$ as follows:

$$f^+(x)=\begin{cases} x & \text{if } x \geqq 0, \\ 0 & \text{if } x<0, \end{cases} \qquad f^-(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x \geqq 0, \\ x & \text{if } x<0. \end{cases}$$

Clearly $f^+(x)f^-(x)\equiv 0$ and

$$\zeta_n^+=\sum_{k=1}^{k_n} f^+(\xi_{nk}) \leqq \eta \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$-\zeta_n^-=-\sum_{k=1}^{k_n} f^-(\xi_{nk}) \leqq \eta \qquad (n=1,2,\ldots),$$

with probability 1. Hence it follows that for every $K>0$ the relations

$$\mathbf{P}(\zeta_n^+ \geqq K) \leqq \mathbf{P}(\eta \geqq K) \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$\mathbf{P}(\zeta_n^- \leqq -K) \leqq \mathbf{P}(\eta \geqq K) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

hold. This imply that the distributions of the sequences ζ_n^+ and ζ_n^- are compact sets. Let $F_n^+(x)$ and $F_n^-(x)$ denote the distribution functions of the variables ζ_n^+ and ζ_n^-, respectively. Let us choose a sequence of integers $n_1, n_2, \ldots$ for which

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} F_{n_i}^+(x)=F^+(x), \\ &\lim_{i\to\infty} F_{n_i}^-(x)=F^-(x) \end{aligned}$$

(where $F^+(x)$ and $F^-(x)$ are distribution functions) at every point of continuity of the latters. Let τ be a positive number such that the functions $F^+(x)$ and $F^-(x)$ are continuous at τ and $-\tau$, respectively. Since the random variables in the double sequences

$$f^+(\xi_{n1}), f^+(\xi_{n2}), \ldots, f^+(\xi_{nk_n}),$$

$$f^-(\xi_{n1}), f^-(\xi_{n2}), \ldots, f^-(\xi_{nk_n})$$

are infinitesimal and independent in each row, moreover the relations (2) hold, we conclude that if $F_{nk}^+(x)=\mathbf{P}(f^+(\xi_{nk})<x)$, $F_{nk}^-(x)=\mathbf{P}(f^-(\xi_{nk})<x)$, then the sequences

$$\sum_{k=1}^{k_{n_i}} \int_{0<x<\tau} x\, dF_{n_ik}^+(x), \qquad \sum_{k=1}^{k_{n_i}} \int_{-\tau<x<0} x\, dF_{n_ik}^-(x)$$

are convergent (see [1] § 25, Theorem 4, Remark). This implies that

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} \left(\int_{0<x<\tau} x\, dF_{n_ik}^+(x) \right)^2 = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} \left(\int_{-\tau<x<0} x\, dF_{n_ik}^-(x) \right)^2 = 0.$$

Thus if

$$\varphi_{nk}^{+}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{nk}^{+}(x), \qquad \varphi_{nk}^{-}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{nk}^{-}(x),$$

then from the inequality

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dG(x) \right| \leqq |t| \int_{|x| < \tau} |x|\, dG(x) + 2 \int_{|x| \geqq \tau} dG(x),$$

valid for every distribution function $G(x)$ and every $\tau > 0$, it follows (using Theorem 4 of [1] § 25) that

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} |\varphi_{n_i k}^{+}(t) - 1|^2 = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} |\varphi_{n_i k}^{-}(t) - 1|^2 = 0.$$

Hence the conditions of Theorem 2 of [2] are fulfilled and thus the variables $\zeta_{n_i}^{+}$ and $\zeta_{n_i}^{-}$ are asymptotically independent, i. e.

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_{n_i}^{+} < x,\ \zeta_{n_i}^{-} < y) = F^{+}(x)\, F^{-}(y). \tag{3}$$

Let $F(x)$ denote the limiting distribution of the random variables ζ_n. Since $\zeta_n = \zeta_n^{+} + \zeta_n^{-}$, we get from (3)

$$F(x) = F^{+}(x) * F^{-}(x). \tag{4}$$

The laws $F(x), F^{+}(x), F^{-}(x)$ are infinitely divisible. In LÉVY's formula

$$i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) dM(x) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2} \right) dN(x)$$

there correspond to $F(x), F^{+}(x)$ and $F^{-}(x)$ constants and functions, which we denote by $\gamma', \gamma_1, \gamma_2;\ \sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2;\ M(x), M_1(x), M_2(x);\ N(x), N_1(x), N_2(x)$, respectively. According to (4)

$$\gamma' = \gamma_1 + \gamma_2,\ \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$
$$M(x) = M_1(x) + M_2(x), \qquad N(x) = N_1(x) + N_2(x).$$

If $\sigma^2 > 0$, then at least one of σ_1^2 and σ_2^2 is positive too. This is, however, impossible, since $F^{+}(x) = 0$ if $x \leqq 0$ and $F^{-}(x) = 1$ if $x > 0$.

We have therefore only to prove that the integrals

$$\int_{-1}^{0} x\, dM(x), \quad \int_{0}^{1} x\, dN(x)$$

exist. We prove the existence of the second integral, the existence of the first one can be proved similarly. We know that if τ_1 is a point of continuity of $N(x)$, then

$$\int_0^{\tau_1} x\, d \sum_{k=1}^{k_{n_i}} F_{n_i k}(x) \tag{5}$$

converges ([1], § 25, Theorem 4) hence it is bounded. If

$$\int_0^1 x\, dN(x) = \infty$$

then we can choose such a number τ $(0 < \tau < \tau_1)$ that

$$\int_\tau^{\tau_1} x\, dN(x) > L, \tag{6}$$

where L is the upper bound of the terms in the sequence (5) and $N(x)$ is continuous at the point τ. But we know from the limiting distribution theorems (cf. [1] § 25, Theorem 4) that

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} (F_{n_i k}(x) - 1) = N(x) \qquad (x > 0)$$

at every point of continuity of $N(x)$, whence

$$\lim_{i\to\infty} \int_\tau^{\tau_1} x\, d \sum_{k=1}^{k_{n_i}} F_{n_i k}(x) = \int_\tau^{\tau_1} x\, dN(x). \tag{7}$$

Obviously (6) and (7) contain a contradiction.

Let us separate in LÉVY's formula the terms

$$iu \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dM(x), \quad iu \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dN(x)$$

and unite them with $i\gamma' u$, then we obtain the required form of the limiting distribution. Thus our theorem is completely proved.

In the sequel we apply our result to the theory of stochastic processes with independent increments. We say that a stochastic process with independent increments ξ_t is weakly continuous if for every $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\xi_{t+h} - \xi_t| > \varepsilon) \to 0$$

when $h \to 0$, uniformly in t. We suppose that $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) = 1$.

Theorem 2. *Let us suppose that the stochastic process with independent increments ξ_t is weakly continuous and its sample functions are of bounded variation with probability* 1 *in every finite time interval. If $\varphi(u, t)$ is the* *characteristic function of the random variable ξ_t then it has the form*

$$(8)\qquad \varphi(u,t)=\exp\left\{i\gamma(t)u+\int_{-\infty}^{0}(e^{iux}-1)\,dM(x,t)+\int_{0}^{\infty}(e^{iux}-1)\,dN(x,t)\right\}$$

where $\gamma(t)$ is a continuous function of bounded variation in every finite time interval, $M(x,t)$ and $N(x,t)$ are continuous functions of the variable t and the integrals

$$\int_{-1}^{0}x\,dM(x,t),\qquad \int_{0}^{1}x\,dN(x,t)$$

exist for every t.

Proof. According to our suppositions the double sequence of independent random variables

$$\xi_{\frac{t}{n}},\ \xi_{\frac{2t}{n}}-\xi_{\frac{t}{n}},\ \ldots,\ \xi_t-\xi_{\frac{n-1}{n}t}$$

satisfies all the conditions of Theorem 1. Moreover, for every n

$$\xi_t=\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{\frac{k}{n}t}-\xi_{\frac{k-1}{n}t}\right),$$

hence we have only to prove the assertion regarding the functions $\gamma(t)$, $M(x,t)$, $N(x,t)$. The continuity in t of these functions follows at once from the weak continuity of the process ξ_t and the convergence theorems of infinitely divisible distributions (see e. g. [1] Chapter 3).

Now we show that for every $T>0$ $\gamma(t)$ is of bounded variation in the interval $0\leqq t\leqq T$. Let us consider the sequence of subdivisions

$$I_k^{(n)}=\left[\frac{k-1}{2^n}T,\ \frac{k}{2^n}T\right]\qquad (k=1,2,\ldots,2^n;\ n=1,2,\ldots)$$

of the interval $[0,T]$ and let us denote the distribution function of the random variable $\xi_{\frac{k}{2^n}T}-\xi_{\frac{k-1}{2^n}T}$ by $F(x,I_k^{(n)})$. We know from the limiting distribution theorems that

$$\gamma\left(\frac{k}{2^n}T\right)-\gamma\left(\frac{k-1}{2^n}T\right)+\int_{-\varepsilon}^{0}x\,d\left(M\left(x,\frac{k}{2^n}T\right)-M\left(x,\frac{k-1}{2^n}T\right)\right)+$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon}x\,d\left(N\left(x,\frac{k}{2^n}T\right)-N\left(x,\frac{k-1}{2^n}T\right)\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{I_j^{(N)}\subseteq I_k^{(n)}}\ \int_{|x|<\varepsilon}x\,dF(x,I_j^{(N)})$$

(cf. [1] § 25, Theorem 4), hence

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{2^n}\left|\gamma\left(\frac{k}{2^n}T\right)-\gamma\left(\frac{k-1}{2^n}T\right)\right|\leqq\int_0^{\varepsilon}x\,dN(x,T)-\int_{-\varepsilon}^{0}x\,dM(x,T)+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{2^N}\int_{|x|<\varepsilon}|x|\,dF(x,I_k^{(N)}).$$

The boundedness of the sequence on the right-hand side of (9) is a consequence of the fact that the non-decreasing sequence

$$\sum_{k=1}^{2^N}\left|\xi_{\frac{k}{2^N}T}-\xi_{\frac{k-1}{2^N}T}\right|$$

converges with probability 1, and of Theorem 4 of [1] § 25. Since $\gamma(t)$ is continuous, this implies that it is of bounded variation. Thus Theorem 2 is proved.

Bibliography.

[1] Б. В. Гнеденко—А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Москва—Ленинград, 1949).

[2] A. Prékopa—A. Rényi, On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 319—326.

(Received March 1, 1957.)

Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen.

Von L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Es seien G und H zwei Gruppen, deren Komposition (ohne daß man die Kommutativität voraussetzt) als Addition geschrieben wird. Der Begriff des Tensorproduktes $G \otimes H$ von G und H wurde in 1938 von H. WHITNEY [5] eingeführt; $G \otimes H$ ist die Gruppe, bestehend aus allen endlichen Summen

$$\sum_i (g_i \otimes h_i) \qquad (\text{mit } g_i \in G, h_i \in H),$$

die als formale Ausdrücke anzusehen sind, die nur den Distributivgesetzen

$$(g+g') \otimes h = g \otimes h + g' \otimes h, \qquad g \otimes (h+h') = g \otimes h + g \otimes h'$$

unterworfen sind. [Sind G und H mit demselben Operatorbereich Ω versehen, so soll für jedes $\lambda \in \Omega, g \in G, h \in H$ noch $(\lambda g) \otimes h = g \otimes (\lambda h) = \lambda (g \otimes h)$ vorausgesetzt sein.] [1]) WHITNEY bewies, daß $G \otimes H$ stets eine abelsche Gruppe ist. Nun erhebt sich die Frage, welche abelsche Gruppen sich als Tensorprodukt zweier Gruppen darstellen lassen. Dieses Problem scheint nicht uninteressant zu sein; wenn nämlich eine ziemlich große Klasse von abelschen Gruppen als Tensorprodukt von Gruppen bekannter, einfacherer Struktur darstellbar wäre, so würde der Begriff des Tensorproduktes in der Theorie der abelschen Gruppen eine Methode bieten, mittels deren die Struktur einer weiteren Klasse abelscher Gruppen beschrieben werden könnte. Wir konnten dieses recht allgemeine Problem nicht vollständig lösen; es ist uns nur im Falle von Torsionsgruppen G und H gelungen,[2]) zu zeigen, daß das Heranziehen von Tensorprodukten nichts Neues bietet. Es wird sich nämlich die ziemlich überraschende Tatsache herausstellen, daß *das Tensorprodukt zweier (und somit auch endlich vieler) beliebiger Torsionsgruppen die direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen ist.* Somit gibt uns das Tensorprodukt von Torsions-

[1]) Für eine systematische Behandlung von Tensorprodukten verweisen wir auf BOURBAKI [1].

[2]) Unter einer Torsionsgruppe versteht man eine Gruppe, deren Elemente von endlichen Ordnungen sind.

gruppen keine neue Methode zur Beschreibung der Struktur von abelschen Gruppen an die Hand.

§ 2. Um unser Hauptergebnis beweisen zu können, benötigen wir die folgenden bekannten Hilfssätze, für deren Beweis auf die Literatur verwiesen sei.

Hilfssatz 1 (WHITNEY). *Sind G und H beliebige Gruppen und bezeichnet G' bzw. H' deren Kommutatoruntergruppen, so besteht ein (natürlicher) Isomorphismus:*

$$G \otimes H \cong G/G' \otimes H/H'.$$

Hilfssatz 2 (DIEUDONNÉ). *Bestehen die direkten Zerlegungen $G = \sum_\lambda G_\lambda$ und $H = \sum_\mu H_\mu$, so gilt:*

$$G \otimes H = \sum_\lambda \sum_\mu (G_\lambda \otimes H_\mu).$$

Hilfssatz 3 (DIEUDONNÉ). *Es sei $g \in G$ von der Ordnung p^n und $h \in H$ von der Ordnung q^m, wo p und q Primzahlen bezeichnen. Dann ist das Element $g \otimes h$ von $G \otimes H$ gleich 0, falls $p \neq q$, und ist von der Ordnung $\leqq$ Min (p^n, q^m), falls $p = q$.*

Zugleich bemerken wir, daß sich aus Hilfssatz 1 unmittelbar ergibt, daß man sich auf Tensorprodukte mit abelschen Faktoren beschränken kann. Da abelsche Torsionsgruppen stets als direkte Summen von p-Gruppen (ihren p-Komponenten) darstellbar sind, folgt aus Hilfssatz 2, daß es genügt, das Tensorprodukt von p-Gruppen zu betrachten. Nach Hilfssatz 3 verschwindet aber das Tensorprodukt einer p-Gruppe und einer q-Gruppe, falls p und q verschiedene Primzahlen sind. Somit reduziert sich das Problem bezüglich der Struktur von beliebigen Torsionsgruppen auf das von abelschen p-Gruppen (mit derselben Primzahl p). –

§ 3. Nach einem wohlbekannten Satz von L. KULIKOV [4] enthält jede abelsche p-Gruppe G eine Basisuntergruppe B, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und durch die folgenden Bedingungen definiert ist: (i) B ist die direkte Summe von zyklischen p-Gruppen; (ii) B ist eine Servanzuntergruppe von G; (iii) G/B ist eine vollständige Gruppe[3]). Es gilt nun für unsere Zwecke der wichtigste

[3]) Eine Untergruppe H der abelschen Gruppe G heißt eine Servanzuntergruppe, wenn folgendes gilt: für ein $a \in H$ und für eine natürliche Zahl n ist die Gleichung $nx = a$ genau dann lösbar in G, falls sie auch eine Lösung in H besitzt. Die Vollständigkeit einer abelschen Gruppe G bedeutet die Lösbarkeit aller Gleichungen der Form $nx = a$ $(a \in G)$.

Hilfssatz 4. *Ist B bzw. C eine Basisuntergruppe der abelschen p-Gruppe G bzw. H, so gilt*

$$G \otimes H \cong B \otimes C.$$

Dieser Isomorphismus wird durch den Beweis bestätigt, daß jedes Element $g \otimes h \in G \otimes H$ einem $b \otimes c \in B \otimes C \subseteq G \otimes H$ gleich ist. Nach der Definition der Basisuntergruppe gibt es Elemente $x \in G, y \in H$ mit $p^k x + b = g$ bzw. $p^r y + c = h$ für passende $b \in B, c \in C$, wobei wir die Exponenten k, r gemäß[4]) $p^k \geqq O(h), p^r \geqq O(b)$ wählen. Dann ergibt sich unter Berücksichtigung von $n(u \otimes v) = nu \otimes v = u \otimes nv$ für jede ganze Zahl n, daß

$$g \otimes h = (p^k x + b) \otimes h = (p^k x) \otimes h + b \otimes h = x \otimes (p^k h) + b \otimes (p^r y + c) =$$
$$= (p^r b) \otimes y + b \otimes c = b \otimes c,$$

es gibt also keine Elemente in $G \otimes H$, die nicht einem Element von $B \otimes C$ gleich wären, w. z. b. w.[5])

§ 4. Nun sind wir imstande, unser Ergebnis leicht nachzuprüfen.

Satz. *Sind G und H beliebige Torsionsgruppen, so ist ihr Tensorprodukt $G \otimes H$ eine direkte Summe von zyklischen p-Gruppen.*

Nach § 2 ist $G \otimes H$ der Gruppe $\sum_p (G_p \otimes H_p)$ isomorph, wo G_p bzw. H_p die p-Komponente von G/G' bzw. H/H' bedeutet und die direkte Summe über alle Primzahlen p zu erstrecken ist. Aus Hilfssatz 4 erhält man, daß $G_p \otimes H_p \cong B_p \otimes C_p$ ist, wo B_p und C_p Basisuntergruppen von G_p bzw. H_p sind. Zieht man noch Hilfssatz 2 in Betracht und beachtet, daß gemäß Definition B_p und C_p direkte Summen von zyklischen p-Gruppen sind, so folgt sofort aus Hilfssatz 3,[6]) daß $G_p \otimes H_p$, und somit auch $G \otimes H$ direkte Summen von zyklischen p-Gruppen sind, w. z. b. w.

Falls man eine explizite Darstellung der Basisuntergruppen B_p und C_p kennt:[7])

$$B_p = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i(p)} \mathfrak{C}(p^i), \qquad C_p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{n}_k(p)} \mathfrak{C}(p^k),$$

wo $\mathfrak{m}_i(p)$ und $\mathfrak{n}_k(p)$ irgendwelche Kardinalzahlen sind, so läßt sich auch $G \otimes H$ explizit bestimmen. Es folgt nämlich:

$$(*) \qquad B_p \otimes C_p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{r}_j(p)} \mathfrak{C}(p^j),$$

---

4) $O(x)$ bezeichnet die Ordnung des Elementes x.

5) Für eine ähnliche Schlußweise s. die Arbeit [3], Satz 1.

6) Das Tensorprodukt von zyklischen Gruppen der Ordnung p^n und p^m ist ebenfalls zyklisch und besitzt die Ordnung $\mathrm{Min}(p^n, p^m)$.

7) $\mathfrak{C}(p^n)$ bezeichnet eine zyklische Gruppe der Ordnung p^n, und $\sum_{\mathfrak{m}} A$ bedeutet die direkte Summe von $\mathfrak{m}$ isomorphen Exemplaren der Gruppe A.

wo

$$\mathfrak{r}_j(p) = \mathfrak{m}_j(p)\mathfrak{n}_j(p) + \mathfrak{m}_j(p) \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathfrak{n}_k(p) + \mathfrak{n}_j(p) \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathfrak{m}_i(p).$$

Somit ist $G \otimes H$ die direkte Summe der Gruppen (∗) für alle p.

Literatur.

[1] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre III (Paris, 1948).

[2] J. Dieudonné, Sur les produits tensoriels, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **64** (1948), 101—117.

[3] L. Fuchs, Ringe und ihre additive Gruppe, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 488—508.

[4] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. Сборник, **16** (1945), 129—162.

[5] H. Whitney, Tensor products of abelian groups, *Duke Math. Journ.*, **4** (1938), 495—520.

(Received April 2, 1957.)

On quasi nil groups.

By L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Introduction.

In his paper [6][1]) T. SZELE has called an additive abelian[2]) group G a nil group, if there exists up to isomorphism only one ring R whose additive group is isomorphic to G, namely the zero ring in which any two elements have 0 as product. He has shown that the torsion nil groups coincide with the torsion divisible[3]) groups and that there do not exist mixed nil groups, while the problem of characterizing by group invariants the torsion free nil groups remained open. In an other paper [7] he investigated those groups G over which exactly two non-isomorphic rings may be defined[4]) (he called them quasi nil groups of species 2); these results are almost complete in the sense that the problem is reduced to that of torsion free nil groups.

Our present aim is to characterize the *quasi nil groups* (of finite species)[5]), i.e. those abelian groups G over which but a finite number of non-isomorphic rings can be defined. We shall discuss the case of torsion, torsion free and mixed groups separately. It will turn out that the main difficulty lies again in the torsion free case where our results are again far from giving an explicit description of the structure of the groups in question.

Our main results are contained in Theorems 1—3.

---

1) The numbers in square brackets refer to the Bibliography given at the end of this note.

2) We shall throughout consider abelian groups, therefore henceforth „group" is used for the longer phrase „abelian group" (with additive notation).

3) For the terminology and basic facts on abelian groups we refer to KUROSH [5] or KAPLANSKY [3].

4) We say the ring R is defined over the group G if the additive group of R is isomorphic to G.

5) There is a simple difference between the terminology used by SZELE and that used here: he meant by a quasi nil group a quasi nil group of species 2, while we mean thereby one of finite species.

§ 2. The torsion case.

We begin with the following two lemmas which are essential in the proof.

Lemma 1. *If G is a torsion group which is not divisible, or is a mixed group whose torsion subgroup is not divisible, then G has a cyclic direct summand $\mathfrak{C}(p^k)$ of order p^k, k a natural integer*[6]*.*

For the proof we refer to Kulikov [4] or Szele [8].

Lemma 2. *In a p-ring R the elements of infinite height annihilate every element of the ring.*

See e. g. Szele [6] or Fuchs [2].

Now let G be a torsion quasi nil group. G can have but a finite number of p-components G_p which are not divisible. In fact, in the contrary case, in view of Lemma 1, an infinity of G_p would be decomposable as $G_p = \mathfrak{C}(p^k) + G_p'$ and we may define over $\mathfrak{C}(p^k)$ a ring $I(p^k)$ [the residue class ring of the rational integers modulo p^k], while over G_p' and over all other G_q $(q \neq p)$ zero rings, and then form their direct sum in order to obtain pairwise non-isomorphic rings over G. By Lemma 2, the divisible p-components of G are zero rings and it is clear that the non-divisible ones must again be quasi nil groups.

Next suppose G_p is a quasi nil p-group and let B_p be a basic subgroup of G_p. We shall show that B_p is finite. For, in the contrary case let $a_1, a_2, \ldots$ be a countable set of basis elements of cyclic subgroups in a direct decomposition of B_p. Each

$$B_p^{(n)} = \{a_1\} + \cdots + \{a_n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

is a direct summand of G_p, $G_p = B_p^{(n)} + G_p^{(n)}$, and if we define over $G_p^{(n)}$ the zero ring, over each $\{a_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ a ring $I(p^{n_i})$ where p^{n_i} is the order of a_i, then we obtain a ring R_n for each n. It is obvious that these rings R_n are not isomorphic for different integers n, because the orders of $B_p^{(n)}$ — $B_p^{(n)}$ may be defined as a complementary direct summand of the annihilator $G_p^{(n)}$ of G_p — are different.

Considering that B_p is thus finite, it follows that it is a direct summand of G_p,

$$G_p = B_p + D_p$$

where D_p is a divisible group. Consequently, a torsion quasi nil group G has the form

$$G = B + D \qquad (B \text{ finite, } D \text{ divisible}). \tag{1}$$

---

[6]) We denote by $\mathfrak{C}(n)$ the cyclic group of order n, by $\mathfrak{C}(p^\infty)$ the group of type p^∞ and by $\mathfrak{R}$ the additive group of the rationals.

Conversely, assume that G is a torsion group of the form (1) and R is a ring with G as additive group. In R, the p-components belonging to different primes annihilate one another, hence Lemma 2 implies that the elements of D are annihilators of the whole ring R. B as a finite group has the form $B=\{a_1\}+\cdots+\{a_t\}$ where a_i are of prime power orders. Consider the group A generated by B and by all products $a_i a_j$ $(i, j=1, \ldots, t)$. If $a_i a_j$ lies outside B, then its D-component in (1) is an annihilator, so that the *subring* generated by B must coincide with A. Since A is again finite, we conclude that there is a divisible subgroup D_1 of finite rank r in D such that $A \subseteq B+D_1$. Each $a_i a_j$ increases the rank at most one, thus we have $r \leqq t^2$. Further, $mB=0$ implies $mA=0$, i. e. A belongs to[7] $B+D_1[m]=A_1$. It results that all the products of the elements of R belong to a finite subgroup of G which may be chosen — up to automorphism — independently of the product definition of R. Since there is but a finite number of possibilities for defining a ring over a finite group, we arrive at

Theorem 1. *A torsion group G is a quasi nil group if and only if it is a direct sum of a finite group and a divisible group.*

§ 3. The torsion free case.

Let G be a torsion free quasi nil group and R a ring, different from the zero ring, over G. We may alter the multiplication ab of the elements a, b of R by setting $a \times_n b = nab$ for some fixed natural integer n. We then get rings R_n $(n=1, 2, \ldots)$ with the same additive group G. No R_n is a zero ring and by hypothesis among the R_n there exists but a finite number of non-isomorphic rings; let these be $R_{m_1}, R_{m_2}, \ldots, R_{m_t}$. Thus, for each n, R_n is isomorphic to some R_{m_j} $(j=1, \ldots, t)$.

Next take into account that, by definition, all the products in R_n belong to nG, i. e. $R_n^2 \subseteq nG$. If $R_{r_1}, R_{r_2}, \ldots$ are isomorphic to R_{m_1}, then in R_{m_1} all the products $a \times_{m_1} b = m_1 ab$ belong to $\bigcap_i r_i G$. Thus if $m=m_1 \ldots m_t$, then for every pair of elements a, b we have $mab \in \bigcap_n nG$ where n ranges over all natural integers. (Note that R_n is isomorphic to a certain R_{m_j}!) Therefore mab, and hence ab is divisible by every integer n, i. e., in R every product belongs to the maximal divisible subgroup D of G. $D \neq 0$, for G is not a nil group.

By a known result, D is a direct summand of G, $G=D+H$ where H contains no nonzero divisible subgroup (i. e. it is reduced), further D is the

---

[7]) For a group G, $G[m]$ denotes the set of all $x \in G$ with $mx=0$.

direct sum of groups $\mathfrak{R}$ isomorphic to the additive group of the rationals, $D = \Sigma\mathfrak{R}$. Here the number of direct summands cannot exceed 1, for every algebraic number field of degree 2 over the rationals has an additive group of type $\mathfrak{R}+\mathfrak{R}$, and there is an infinity of non-isomorphic such fields. Thus G is of the form $G=\mathfrak{R}+H$ where the reduced group H must be a nil group, for otherwise we could define over G a ring in which not all the products belong to $\mathfrak{R}$.

The group H must be of finite rank. For, assume H is of infinite rank and let $[b_1, \ldots, b_\alpha, \ldots]$ be a maximal independent system in H and $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ a countable (proper or improper) subsequence of it. For each n we define a ring R_n by putting 1. $b_\alpha b_\beta = 0$ if α and β are different, 2. $b_\alpha^2 = 0$ or $= b_0$ according as $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ or α is different from these indices. Here b_0 denotes an arbitrary nonzero element of $\mathfrak{R}$. Knowing the products of the b_α, the distributive law enables us to extend the multiplication to the whole of G (all the products belong to $\mathfrak{R}$!). Since any product of more than two factors vanishes, the associative law holds, and we conclude that R_n is indeed a ring. In R_n, any element of the form $\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-1}$ (λ_i rational) is an annihilator of R_n, while any element containing a summand $\lambda_\alpha b_\alpha$ with $\lambda_\alpha \neq 0$ and $\alpha \neq 0, 1, \ldots, n-1$, is no annihilator, for it does not vanish multiplying it by b_α. Thus, the rank of the annihilator ideal of R_n is just n, consequently, $n \neq m$ implies that R_n and R_m are not isomorphic and thus H is necessarily of finite rank.

If $H=0$, then $G=\mathfrak{R}$ and there are two non-isomorphic rings over $\mathfrak{R}$, namely the rational number field and a zero ring.

If $H \neq 0$, let the rank of H be the natural integer r. We denote by b_0 a nonzero element of $\mathfrak{R}$, and by $[b_1, \ldots, b_r]$ a maximal independent system of H. Our aim is to get information on all rings over $\mathfrak{R}+H$. For this purpose it is sufficient to know all products $b_i b_j$. Since they belong to $\mathfrak{R}$, we set

(2) $$b_i b_j = \lambda_{ij} b_0 \qquad (\lambda_{ij} \text{ rational})$$

for $i, j = 0, \ldots, r$. The λ_{ij} may arbitrarily be chosen, only the associative law $(b_i b_j) b_k = b_i (b_j b_k)$ must be fulfilled. This is equivalent to

(3) $$\lambda_{ij} \lambda_{0k} = \lambda_{jk} \lambda_{i0} \qquad (i, j, k \text{ arbitrary}),$$

and therefore we assume (3) to hold. Now we distinguish two cases according as $\lambda_{00} \neq 0$ or $=0$.

Case 1. $\lambda_{00} \neq 0$. There is no loss of generality in assuming $\lambda_{00} = 1$, since this can be achieved by an eventual alteration of the choice of b_0 in $\mathfrak{R}$.[8])

[8]) It suffices to replace b_0 by $\lambda_{00}^{-1} b_0$.

Under this assumption, (3) implies for the case $k=0$

$$\lambda_{ij}=\lambda_{j0}\lambda_{i0} \tag{4}$$

whence it follows that $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$, i. e. the ring is necessarily commutative. Write $\lambda_{i0}=\lambda_{0i}=\lambda_i$, then (2) becomes $b_i b_j=\lambda_i\lambda_j b_0$ ($\lambda_0=1$) and (3) is automatically satisfied. — Let another ring be defined over G with the rule $b_i\times b_j=\mu_i\mu_j b_0$ ($\mu_0=1$) where the μ_i are arbitrary rationals. Define a (group) automorphism α of G by putting

$$b_i^\alpha=b_i+(\mu_i-\lambda_i)\,b_0 \qquad (i=0,1,\dots,r).$$

It is obvious that α induces in fact an automorphism of G. Take into account that

$$b_i^\alpha b_j^\alpha=[b_i+(\mu_i-\lambda_i)\,b_0]\,[b_j+(\mu_j-\lambda_j)\,b_0]=(\mu_i b_0)(\mu_j b_0)=\mu_i\mu_j\,b_0=b_i\times b_j$$

(note that b_i behaves like $\lambda_i b_0$ under multiplication), and then conclude that under α, the rings defined by the λ_i and the μ_i, respectively, are isomorphic. Thus all rings defined over G with $\lambda_{00}\neq 0$ are isomorphic.

Case 2. $\lambda_{00}=0$. Then from (3) in case $k=0$, $i=j$ we obtain $\lambda_{i0}^2=0, \lambda_{i0}=0$, and similarly, $\lambda_{0i}=0$, that is, $\mathfrak{R}$ is an annihilator of the ring. (3) shows that $\lambda_{ij}\,(i,j=1,\dots,r)$ are not subject to any condition. Each ring R over G thus defines, in view of (2), a square matrix

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}\,\lambda_{12}\dots\lambda_{1r}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \lambda_{r1}\,\lambda_{r2}\dots\lambda_{rr}\end{pmatrix}$$

with arbitrary rational elements. Another ring S over G gives rise to a matrix

$$M=\begin{pmatrix}\mu_{11}\,\mu_{12}\dots\mu_{1r}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \mu_{r1}\,\mu_{r2}\dots\mu_{rr}\end{pmatrix}$$

relative to the same independent set $b_0, b_1, \dots, b_r$. Let α be a (group) automorphism of G with

$$b_0^\alpha=\varrho_0 b_0, \qquad b_i^\alpha=\sum_{k=0}^{r}\varrho_{ik}b_k \qquad (i=1,\dots,r)$$

where ϱ_0, ϱ_{ik} are certain rational numbers. Before passing on we remark that α induces an automorphism α^* of H by setting $b_i^{\alpha^*}=\sum_{k=1}^{r}\varrho_{ik}b_k \quad (i=1,\dots,r)$, the matrix of α^* is

$$P=\begin{pmatrix}\varrho_{11}\,\varrho_{12}\dots\varrho_{1r}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \varrho_{r1}\,\varrho_{r2}\dots\varrho_{rr}\end{pmatrix}$$

and any automorphism α^* of H may be extended (in several ways) to automorphisms α of G, by choosing arbitrary rationals $\varrho_0, \varrho_{10}, \dots, \varrho_{r0}$. The two rings R and S defined over G are isomorphic if and only if there is an automorphism α of G such that the elements b_i^α may be multiplied in R in the same way as the elements b_i in S, i. e.

$$b_i^\alpha b_j^\alpha = \left[\sum_{k=0}^{r} \varrho_{ik} b_k\right]\left[\sum_{l=0}^{r} \varrho_{jl} b_l\right] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \varrho_{ik}\varrho_{jl}\lambda_{kl} b_0$$

is equal to $\mu_{ij}(\varrho_0 b_0)$ for $i, j = 1, \dots, r$. The condition obtained may be written in the matrix form

$$\begin{pmatrix} \varrho_{11} \dots \varrho_{1r} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \varrho_{r1} \dots \varrho_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \dots \lambda_{1r} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \lambda_{r1} \dots \lambda_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho_{11} \dots \varrho_{r1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \varrho_{1r} \dots \varrho_{rr} \end{pmatrix} = \varrho_0 \begin{pmatrix} \mu_{11} \dots \mu_{1r} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \mu_{r1} \dots \mu_{rr} \end{pmatrix},$$

that is,

$$P \Lambda P' = \varrho_0 M \tag{5}$$

where P' denotes the transpose of P. Calling two matrices Λ and M *H-equivalent* if there is an automorphism α^* of H with the matrix P and there is a rational number ϱ_0 such that (5) holds, we get an equivalence relation among the $r \times r$ square matrices with rational elements. Our arguments above show that two rings over G are isomorphic if and only if the corresponding matrices Λ and M are H-equivalent. (The system $b_0, b_1, \dots, b_r$ may be taken fixed.) Thus the number of equivalence classes under this H-equivalence equals the number of non-isomorphic rings over G with $\mathfrak{R}$ as an annihilator, and we conclude:

Theorem 2. *A torsion free group G is a quasi nil group if and only if it is either a nil group or has the form*

$$G = \mathfrak{R} + H$$

where H is a nil group of finite rank r such that the number of classes of H-equivalence in the set of $r \times r$ square matrices[9]) *with rational elements is finite.*

In particular, let us consider the case $r = 1$. Then both Λ and M are rational numbers and we may take $P = 1$ (corresponding to the identity automorphism of H) and then conclude that there are two H-equivalence classes, namely $\Lambda = 0$ alone forms one class and the nonzero rationals form the other class. Thus the group $G = \mathfrak{R} + H$ with a nil group H of rank 1 is a quasi nil group. Over this G the following non-isomorphic rings may be defined:

---

[9]) Of course, relative to a fixed maximal independent system.

1. the zero ring;

2. over $\mathfrak{R}$ define the rational number field F, and over H a zeroring $\bar{H}$, and take[10] $F \oplus \bar{H}$ (see Case 1);

3. define $\mathfrak{R}$ to be the annihilator of the ring and the products of the elements of H to lie in $\mathfrak{R}$.

This example disproves a conjecture of SZELE [7] which stated that besides $\mathfrak{R}$ and the nil groups there exist no torsion free quasi nil groups.

§ 4. The case of mixed groups.

Assume G is a mixed quasi nil group. Since Lemma 1 is valid for mixed groups too, by the same argument as in § 2 we may conclude that almost all p-components T_p of the torsion subgroup T of G are divisible groups and those T_p which are not divisible have a finite basic subgroup B_p. Then $T_p = B_p + D_p$ with a divisible group D_p and T is of the type $T = B + D$, B a finite, D a divisible group. By a well-known result, if in a mixed group the (maximal) torsion subgroup is of this type, then it is a direct summand, that is,

$$G = B + D + J \tag{6}$$

where $J \neq 0$ is torsion free. Evidently, J must again be a quasi nil group, hence is of a structure described by Theorem 2.

Next suppose that $D \neq 0$, i. e. in G there exists a direct summand of the type $\mathfrak{C}(p^\infty)$ for some prime p. Then for this prime p necessarily $pJ = J$ holds. In fact, if pJ is a proper subgroup of J, then $p^n J$ is a proper subgroup of $p^{n-1}J$ $(n = 2, 3, \ldots)$, and thus there is a homomorphism $J/p^n J \sim \mathfrak{C}(p^n)$ and hence a homomorphism $J \sim \mathfrak{C}(p^n)$. Let $\mathfrak{C}(p^\infty) = \{c_1, c_2, \ldots\}$ with $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1, \ldots$. According to (6), each element g of G has a unique representation $g = b + d + a$ $(b \in B, d \in D, a \in J)$. Define a ring R_n over G by the multiplication rule

$$g_1 g_2 = (b_1 + d_1 + a_1)(b_2 + d_2 + a_2) = k_1 k_2 c_n \tag{7}$$

where $k_1 c_n, k_2 c_n$ are the images of a_1, a_2 under $J \sim \mathfrak{C}(p^n)$. Since in R_n any product of three elements vanishes, (7) actually implies a ring R_n over G. Clearly, by $R_n^2 = \{c_n\}$, the R_n are not isomorphic for different n's, thus the hypothesis $pJ \subset J$ contradicts the quasi nil character of G. We have thus proved that the presence of $\mathfrak{C}(p^\infty)$ in G implies $pJ = J$. — Moreover, it follows that the rank of J is 1. In order to verify this assertion, take any two independent elements u, v in J; then each element a of J has the form

---

[10]) The sign $\oplus$ will be used to denote direct sum in the ring-theoretic sense.

$a = \varrho u + \sigma v + x$ for some x (which identically vanishes if the rank of J is 2) and rational numbers ϱ, σ. If we agree in putting $\frac{1}{p^k} c_l = c_{k+l}$ in $\mathfrak{C}(p^\infty)$, then $\mathfrak{C}(p^\infty)$ may be regarded as a group with rational operators (for $\varrho c, \varrho$ a rational number, c in $\mathfrak{C}(p^\infty)$, is a well-defined element in $\mathfrak{C}(p^\infty)$). We define, for each p-adic integer π, a ring $R(\pi)$ over G by the rule

$$g_1 g_2 = (b_1 + d_1 + \varrho_1 u + \sigma_1 v + x_1)(b_2 + d_2 + \varrho_2 u + \sigma_2 v + x_2) = (\varrho_1 \varrho_2 + \sigma_1 \sigma_2 \pi) c_1.$$

$R(\pi)$ is plainly a ring. Consider the elements g which are divisible by every power of p. If $\frac{g}{p^\nu}$ denotes any element y with $p^\nu y = g$, then[11])

$$\left(\frac{g}{p^\nu}\right)^2 = \left(\frac{b}{p^\nu} + \frac{d}{p^\nu} + \frac{\varrho}{p^\nu} u + \frac{\sigma}{p^\nu} v + \frac{x}{p^\nu}\right)^2 = \frac{\varrho^2 + \sigma^2 \pi}{p^{2\nu}} c_1 = (\varrho^2 + \sigma^2 \pi) c_{2\nu+1}.$$

Thus every g, divisible by all powers of p, defines an endomorphism of $\mathfrak{C}(p^\infty)$ which may be represented by the p-adic integer $\varrho^2 + \sigma^2 \pi$. The set of these p-adic integers, taken for all g, contains 1 and is countable. If two rings are isomorphic, then the corresponding sets of p-adic integers may differ merely by a p-adic unit factor (inducing an automorphism on $\mathfrak{C}(p^\infty)$). Since 1 was supposed to belong to this set, there is but a countable set of p-adic integers belonging to a class of isomorphic rings. The uncountability of the p-adic integers implies that there is an infinity of non-isomorphic rings $R(\pi)$ over G. Consequently, J must be of rank 1.

Next we show that there is but a finite number of primes p for which $\mathfrak{C}(p^\infty)$ exists in D. For, in the contrary case there would exist a homomorphism η_p of J into each of these $\mathfrak{C}(p^\infty)$, and by the same methods as used in the preceding paragraph we could show that each η_p gives rise to a ring $R(p)$ over G such that all products lie in $\mathfrak{C}(p^\infty)$, but not all of them vanish. Since G is a quasi nil group, this is impossible.

Assume that $G = B + J$ where B is finite and J is a nil group, and let p be a prime dividing the order m of B. Then J/pJ is finite, for in the contrary case there would exist in J an infinite set of independent elements $a_1, a_2, \ldots$ belonging to pairwise different cosets mod pJ. Let $b \in B$ be of order p and put $a_i^2 = b$ if $i > n$ and $a_i a_j = 0$ in all other cases, furthermore, for the elements independent of the a_i define the multiplication to be identically 0. Then this definition gives rise to a ring R_n over G and for different n's the rings R_n are not isomorphic, for the annihilator of R_n mod $\{B, pJ\}$ is

[11]) For simplicity assume (this can always be done without restricting generality) that in the denominator of ϱ and σ the prime p does not occur.

of rank n (note that B is the torsion subring and pJ is also an invariant for all rings over G). It follows that J/pJ and hence J/mJ is finite.

What we have proved shows that a mixed quasi nil group G has one of the forms

I. $G=B+J$ where B is finite of order m, J a torsion free quasi nil group such that J/mJ is finite whenever J is a nil group.

II. $G=B+D+J$ where B is finite, D a torsion divisible group with a finite number of p-components, J a torsion free quasi nil group of rank 1 such that $pJ=J$ for the primes p occurring in D.

Conversely, assume the group G has the form I. We intend to show that but a finite number of non-isomorphic rings exists over G.

It is evident that mJ annihilates B and among the elements of J only those outside mJ may have a product not belonging to J. In order to know a ring R over G, it suffices to know the following products: 1. the elements of J by the elements of J; 2. the elements of B by the elements of B; 3. the elements of B by some representatives of J mod mJ. The products 2. and 3. lie in B, thus there is but a finite number of possibilities for defining them. The products 1. are of the form $a_1a_2=a_3+b$ $(a_i\in J, b\in B)$; here b does not alter if we replace a_1 and a_2 by other elements of the cosets of a_1 and a_2 mod mJ. Thus to each ring S over $J\cong G/B$ there is but a finite number of rings R over G with $S\cong R/B$. If the rings S_1 and S_2 over J are isomorphic, and R_1 is a ring over G which corresponds to S_1, then we may extend S_2 such that the B-components of the products in 2. and 3. be the same in R_2 as those of the corresponding elements in R_1 (we let B fixed). To be more explicit, if e. g. $a_1a_2=a_3+b$ $(a_i\in J, b\in B)$ in R_1, then $a_1a_2=a_3$ holds in S_1, and if φ is an isomorphism of S_1 onto S_2, then we set $a_1^\varphi a_2^\varphi=a_3^\varphi+b$. It is easily seen that, since mJ is carried onto itself by every automorphism, the rings R_1 and R_2 will be isomorphic, and this establishes what we intended to verify in this paragraph.

Let now G have the form II and consider those rings R over G in which all the products lie in the torsion subgroup $B+D$ of G. First of all observe that D is an annihilator of G, for besides it annihilates $B+D$, it so does J, considering that $pJ=J$ holds for all p with $\mathcal{C}(p^\infty)\subseteq D$.

For a fixed $u\in J$, the mapping $v\to uv$ is a homomorphism of J onto a subgroup T_u of $B+D$, and from $r(J)=1$ we conclude that T_u has the form[12])

$$(7)\qquad T_u=\mathcal{C}(p_1^\infty)+\cdots+\mathcal{C}(p_s^\infty)+\mathcal{C}(q_1^{k_1})+\cdots+\mathcal{C}(q_t^{k_t})$$

with different primes $p_1,\ldots,p_s,q_1,\ldots,q_t$. If $pJ=J$, then also $pT_u=T_u$

[12]) See e. g. BEAUMONT and ZUCKERMAN [1].

so that $q_j J \neq J$ and therefore $\mathfrak{C}(q_j^\infty)$ does not exist in D, i. e. the "finite part" $\mathfrak{C}(q_1^{k_1}) + \cdots + \mathfrak{C}(q_t^{k_t})$ of T_u belongs to B. Choose a $u \in J$ such that u is not divisible by those primes q of the order of B for which $qJ \neq J$, and no p_i-component of u^2 in T_u is zero $(i = 1, \ldots, s)$. Then the squares u^2/p_i^{2n} already determine all products vw $(v, w \in J)$, since $v = \varrho u$, $w = \sigma u$ with rational ϱ, σ and thus $vw = \varrho\sigma u^2$ is a well-defined element of T_u whenever in T_u the multiplication by rationals is appropriately defined. Next take into account that the multiplications of J by $p_1, \ldots, p_r$, respectively define automorphisms of J, so that only the fact is essential that the components of the squares $v^2 (v \in J)$ in $\mathfrak{C}(p_1^\infty), \ldots, \mathfrak{C}(p_s^\infty)$, respectively, are of odd or even exponents. Consequently, there is but a finite number of possibilities for defining the multiplication of the elements of J in order to obtain non-isomorphic rings. The same holds for the products $b_1 b_2 (b_i \in B)$ and the products of the elements of B by representatives of J mod mJ, since it is irrelevant which subgroup of type $\mathfrak{C}(p^\infty)$ in D will contain components of products. It results that over a group of type II there exists but a finite number of non-isomorphic rings with products in the torsion subgroup.

Let G be again of type II and consider the case when not all the products lie in the torsion subgroup $B + D$. Then the factor ring with respect to the ideal $B + D$ is not a zero ring, consequently, J must be isomorphic to $\mathfrak{R}$. Now in any ring R over G the products $a_1 a_2 (a_i \in J)$ are divisible by every integer, thus they belong to $D + J$ (the maximal divisible subgroup of G). It is not hard to verify that $(\varrho a)a = \varrho a^2$ varies over a subgroup K of G, $K \cong \mathfrak{R}$, when a is fixed in J and ϱ runs over all rationals. Then any product $g_1 g_2$ with $g_i \in K$ lies in K and $B + D$ must belong to the annihilator of K, consequently, K is a direct summand of R in the ring-theoretic sense: $R = (B + D) \oplus K$. Since $B + D$ is a quasi nil torsion group and the ring over K is isomorphic to the rational number field, we arrive at the following result.

Theorem 3. *A mixed group G is a quasi nil group if and only if it is either of the form I or of the form II.*

Bibliography.

[1] R. A. Beaumont and H. S. Zuckerman, A characterization of the subgroups of the additive rationals, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 169—177.
[2] L. Fuchs, Ringe und ihre additive Gruppe, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 488—508.
[3] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups* (Ann Arbor, 1954).
[4] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. Сборник, **9** (1941), 165—181.
[5] А. Г. Курош, Теория групп (Москва, 1953).
[6] T. Szele, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Ann.*, **121** (1949), 242—246.
[7] T. Szele, Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen, *Math. Zschrift*, **54** (1951), 168—180.
[8] T. Szele, On direct decomposition of abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 247—250.

(Received April 2, 1957.)

Über die Translationen der Halbverbände.

Von G. SZÁSZ und J. SZENDREI in Szeged.

1. Unter einem *Halbverband H* versteht man eine kommutative Halbgruppe mit lauter idempotenten Elementen. Eine eindeutige Abbildung λ $(x \to \lambda(x); x \in H)$ eines Halbverbands H in sich heißt eine *Translation* von H, wenn für sie

$$\lambda(xy) = \lambda(x)y$$

besteht. Ist c ein festgewähltes Element von H, so ist insbesondere die Abbildung $x \to cx$ nach $c(xy) = (cx)y$ eine Translation von H. Eine solche Translation wird *speziell* genannt und mit c_S bezeichnet (d. h. $c_S(x) = cx$).

Der erstgenannte Verfasser hat neulich einige Ergebnisse über die Translationen von Halbverbänden gewonnen[1]). In dieser Arbeit werden wir weitere Eigenschaften dieser Abbildungen untersuchen. In § 2 geben wir zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine eindeutige Abbildung eines Halbverbands in sich eine Translation ist (Satz 1 und 2). Satz 3 beschäftigt sich mit der Struktur der Translationen von H und mit der Einbettung von H in diese Struktur. Satz 4 in § 3 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Hüllenoperation[2]) von H eine Translation ist.

2. Eine Charakterisierung der Translationen von H liefert der folgende

Satz 1. *Eine eindeutige Abbildung λ eines Halbverbands H in sich ist dann und nur dann eine Translation von H, wenn*

$$\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(y) \tag{1}$$

identisch gilt.

---

[1]) G. Szász, Die Translationen der Halbverbände, *Acta Sci. Math.*, 17 (1956), 165—169.

[2]) Für die Definition der Hüllenoperationen s. § 3.

Beweis. Es sei λ eine Translation. Durch wiederholte Anwendung der Definition und der Halbverbandsaxiome bekommt man

$$\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(yx) =$$
$$= \lambda(x)\lambda(y)x = \lambda(x)x\lambda(y) = \lambda(xx)\lambda(y) = \lambda(x)\lambda(y),$$

womit die Notwendigkeit der Bedingung (1) bewiesen ist.

Umgekehrt folgt aus (1), daß

$$\lambda(xy) = \lambda(xy)\lambda(xy) = \lambda(xy)xy = \lambda(xy)x\cdot y = \lambda(xy)\lambda(x)\cdot y =$$
$$= \lambda(x)\lambda(xy)\cdot y = \lambda(x)xy\cdot y = \lambda(x)x\cdot y = \lambda(x)\lambda(x)\cdot y = \lambda(x)y,$$

d. h. daß λ eine Translation von H ist. Damit haben wir den Satz 1 bewiesen.

Eine andere Charakterisierung der Translationen gewinnt man durch den

Satz 2. *Die Translationen eines Halbverbands H sind genau diejenigen eindeutigen Abbildungen von H in sich, die mit sämtlichen speziellen Translationen vertauschbar sind.*

Beweis. Ist λ eine beliebige und c_S eine spezielle Translation von H, so gilt

$$\lambda c_S(x) = \lambda(c_S(x)) = \lambda(cx) = \lambda(xc) = \lambda(x)c = c\lambda(x) = c_S(\lambda(x)) = c_S\lambda(x)$$

für jedes Element x von H, d. h.

$$\lambda c_S = c_S\lambda. \tag{2}$$

Ist umgekehrt λ eine eindeutige Abbildung von H in sich, so daß (2) für jede spezielle Translation gilt, dann ergibt sich

$$\lambda(xy) = \lambda(yx) = \lambda(y_S(x)) = \lambda y_S(x) = y_S\lambda(x) = y\lambda(x) = \lambda(x)y.$$

Das bedeutet, daß λ eine Translation von H ist. Der Satz 2 ist bewiesen.

Ferner beweisen wir den folgenden

Satz 3. *Die Menge T_H aller Translationen eines Halbverbands H ist ein Halbverband, und die Menge S_H der speziellen Translationen von H bildet in T_H ein Ideal, das mit H isomorph ist.*

Beweis. Zuerst haben wir zu zeigen, daß das Produkt von zwei beliebigen Translationen wieder eine Translation ist. Das folgt einfach aus der Definition der Translation, nämlich

$$\lambda\mu(xy) = \lambda(\mu(xy)) = \lambda(\mu(x)y) = \lambda(\mu(x))y = \lambda\mu(x)y.$$

Zum Beweis der übrigen Behauptungen von Satz 3 brauchen wir die in sich selbst interessante Gleichung

$$\lambda\mu(x) = \lambda(x)\mu(x), \tag{3}$$

die sich sofort aus der Definition der Translation ergibt:

$$\lambda\mu(x)=\lambda(\mu(xx))=\lambda(\mu(x)x)=\lambda(x\mu(x))=\lambda(x)\mu(x).$$

Durch Einsetzung $\mu=\lambda$ in (3) bekommt man $\lambda^2(x)=\lambda(x)$, d. h. die Idempotenz der Translation λ. Ferner folgt nach (3)

$$\lambda\mu(x)=\lambda(x)\mu(x)=\mu(x)\lambda(x)=\mu\lambda(x),$$

was die Kommutativität der Multiplikation in T_H bedeutet. Da die Multiplikation von Abbildungen immer assoziativ ist, haben wir bewiesen, daß T_H in der Tat ein Halbverband ist.

Da das Produkt von zwei speziellen Translationen nach

$$c_S d_S(x)=c_S(d_S(x))=c(dx)=(cd)x=(cd)_S(x) \tag{4}$$

wieder speziell ist, folgt nach dem obigen, daß die Menge S_H aller speziellen Translationen ein Teilhalbverband von T_H ist. Wir wollen zeigen, daß S_H mit H isomorph ist, und zwar wird ein geeigneter Isomorphismus durch

$$c\to c_S \qquad (c\in H,\ c_S\in S_H) \tag{5}$$

vermittelt. Die Eindeutigkeit der Abbildung (5) ist trivial. Um die Ein-eindeutigkeit der Abbildung (5) zu beweisen, nehmen wir an, daß $c_S=d_S$, d. h.

$$cx=dx \qquad (x\in H)$$

gilt. Wird in diese Gleichung erstens $x=c$, zweitens $x=d$ eingesetzt, so entsteht wegen der Idempotenz und Kommutativität

$$c=dc=cd=d.$$

Das beweist die Ein-eindeutigkeit der Abbildung (5). Endlich folgt die Homomorphie der Abbildung (5) einfach aus (4), womit die Isomorphie

$$H\approx S_H \qquad (c\to c_S)$$

bewiesen ist.

Wir haben noch zu beweisen, daß S_H ein Ideal in T_H ist. Wegen (2) genügt es zu zeigen, daß $\lambda c_S\in S_H$ $(\lambda\in T,\ c_S\in S_H)$ gilt. Man kann aber diese Behauptung von

$$\lambda c_S(x)=\lambda(c_S(x))=\lambda(cx)=\lambda(c)x=(\lambda(c))_S(x)$$

ablesen. Damit haben wir den Beweis des Satzes 3 beendet.

Auf Grund des Satzes 3 nennen wir T_H den *Translationshalbverband* von H. Aus Satz 3 folgt das

Korollar 1. *Jeder Halbverband läßt sich in seinen Translationshalbverband als Ideal einbetten.*

Sätze 1 und 3 geben das folgende

Korollar 2. *Jede Translation eines Halbverbands ist ein idempotenter Endomorphismus.*

Mit Hilfe der Sätze 2 und 3 bekommt man das

Korollar 3. *In der Halbgruppe sämtlicher eindeutiger Abbildungen von H in sich ist* T_H *der maximale Halbverband, der* S_H *umfaßt.*

3. Wie üblich, definieren wir im Halbverband H eine Halbordnung dadurch, daß $x \leqq y$ $(x, y \in H)$ dann und nur dann ist, wenn $xy = y$ gilt. Nach dieser Definition ist offenbar $x, y \leqq xy$ $(x, y \in H)$.

Eine eindeutige Abbildung λ eines Halbverbands H in sich heißt eine *Hüllenoperation*, wenn sich die Bedingungen

(6) $$x \leqq \lambda(x),$$

(7) $$\lambda^2(x) = \lambda(x),$$

(8) $$\text{aus } x \leqq y \text{ folgt } \lambda(x) \leqq \lambda(y)$$

für beliebige Elemente x, y von H erfüllen. Nach der Definition der Halbordnung von H darf man (6) auch in der Form

(9) $$\lambda(x)x = \lambda(x)$$

schreiben.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 4. *Eine Hüllenoperation* λ *eines Halbverbands* H *ist dann und nur dann eine Translation von* H, *wenn die Gleichung* (1) *für jedes Paar* $x < y$ $(x, y \in H)$ *gilt.*

Beweis. Aus Satz 1 folgt sofort, daß die Bedingung notwendig ist.

Umgekehrt, sei λ eine Hüllenoperation von H, für die die Bedingung des Satzes 4 besteht, und seien x, y beliebige Elemente von H. Wegen $x \leqq xy$ gilt dann

(10) $$\lambda(x)xy = \lambda(x)\lambda(xy);$$

und zwar, im Fall $x < xy$ ergibt sich (10) nach der Voraussetzung bezüglich λ und im Fall $x = xy$ einfach aus (9). Da auch $y \leqq xy$ ist, so folgt nach (9), (6) und (8)

(11) $$\lambda(x)xy = \lambda(x)y \leqq \lambda(x)\lambda(y) \leqq \lambda(x)\lambda(xy).$$

Vergleicht man nun (10) und (11), so gewinnt man, daß im letzteren überall das Gleichheitszeichen stehen muß; insbesondere ist $\lambda(x)y = \lambda(x)\lambda(y)$. Nach Satz 1 ist damit bewiesen, daß die Bedingung auch hinreichend ist.

(Eingegangen am 19. März 1957.)

On relatively complemented lattices.

By G. SZÁSZ in Szeged.

1. Throughout this paper let L denote a relatively complemented lattice with greatest and least elements i, o, respectively[1]). Let further a, b, r be any elements of L such that

$$a \leqq r \leqq b. \tag{1}$$

As usual, by a *relative complement of r in $[a, b]$* we mean an element s which satisfies the equations

$$r \cap s = a, \quad r \cup s = b. \tag{2}$$

Clearly, s then also belongs to the interval $[a, b]$.

J. v. NEUMANN has proved[2]) that if L is modular, then, for any complement t of r, the element

$$s = (a \cup t) \cap b = a \cup (t \cap b) \tag{3}$$

is a relative complement of r in $[a, b]$. It is known that this theorem plays a very important role in the theory of modular lattices.

In this paper we shall establish further connections between the complements and relative complements of an element r of L.

2. First we state, without assuming the modularity, the following converse of NEUMANN's Theorem:

Theorem 1. *Let L be any relatively complemented lattice with greatest and least elements, and let a, b, r be any elements of L such that* (1) *holds. Let further s be any relative complement of r in $[a, b]$. Then there exists at least one complement t of r which satisfies* (3).

---

1) For the concepts of lattice theory which will not be defined and for the results which will be used without proof in this paper, see G. BIRKHOFF, *Lattice theory* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25), revised edition, New York, 1948.

2) See, for example, G. BIRKHOFF, op. cit., p. 114. References to this theorem will be made below briefly by the term "NEUMANN's Theorem".

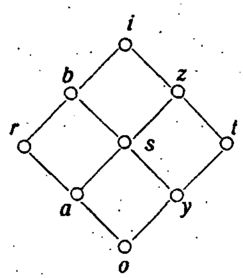
This theorem is an immediate corollary of the second part of the more general

Theorem 2. *Let L, a, b, r, s be as in Theorem 1 and let t $(\in L)$ be any solution of the equation system*

$$\left\{\begin{aligned} r\cap t&=o,\\ r\cup t&=i,\\ (a\cup t)\cap b&=s,\\ a\cup(t\cap b)&=s.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Then there exists a relative complement y of a in $[o, s]$ and a relative complement z of b in $[s, i]$ such that t is a relative complement of s in $[y, z]$.

Conversely, if y is any relative complement of a in $[o, s]$ and z is any relative complement of b in $[s, i]$, then any relative complement t of s in $[y, z]$ satisfies the equation system (4). (See the figure.)



Proof. In order to prove the first part of Theorem 2, let us consider any solution t of (4) and let us define two elements y, z by

$$y=s\cap t,\quad z=s\cup t. \tag{5}$$

Then, by the choice of these elements, t is a relative complement of s in $[y, z]$. Furthermore, by the last two equations of (4), we have

$$y=s\cap t=(a\cup t)\cap b\cap t=b\cap t, \tag{6}$$

$$z=s\cup t=a\cup(t\cap b)\cup t=a\cup t. \tag{7}$$

We show that

$$a\cap y=o,\quad a\cup y=s \tag{8}$$

and

$$b\cap z=s,\quad b\cup z=i. \tag{9}$$

Indeed, (6), (1) and the first equation of (4) imply

$$a\cap y=a\cap(b\cap t)=(a\cap b)\cap t=a\cap t\leqq r\cap t=o,$$

and (6) and the last equation of (4) imply

$$a \cup y = a \cup (b \cap t) = s.$$

Similarly, by (7), (1) and (4), we obtain (9). Clearly, by (5), (8) and (9), the first statement of our theorem is proved.

Conversely, let y, z, t be any elements satisfying the equations (5), (8) and (9). Then, firstly, t is a complement of r. Indeed, by (1), (5), (9), (2), (5) and (8),

$$r \cap t = (r \cap b) \cap (z \cap t) = r \cap (b \cap z) \cap t =$$
$$= r \cap s \cap t = (r \cap s) \cap (s \cap t) = a \cap y = o,$$

and dually,

$$r \cup t = i.$$

Moreover, t satisfies the last two equations of (4). For by (5), (8), (5) and (9)

$$(a \cup t) \cap b = (a \cup (y \cup t)) \cap b = ((a \cup y) \cup t) \cup b = (s \cup t) \cap b = z \cap b = s,$$

and by (5), (9), (5) and (8)

$$a \cup (t \cap b) = a \cup ((t \cap z) \cap b) = a \cup (t \cap (z \cap b)) = a \cup (t \cap s) = a \cup y = s,$$

thus completing the proof.

By Theorems 1 and 2 we have the following

Corollary. *Let L, a, b, r, s be as in Theorem* 1. *Then, by suitable choice of the complements a', b', s' of a, b, s, respectively, each solution t of* (4) *may be represented in the form*

$$t = ((a' \cap s) \cup s') \cap (s \cup b') = (a' \cap s) \cup (s' \cap (s \cup b')). \tag{10}$$

Proof. Let t be any solution of (4) and let y, z be defined as in the proof of the first part of Theorem 2. Then, with regard to the equations (5), (8) and (9), Theorem 1 implies that for some complements a', b', s' of a, b, s, respectively,

$$y = o \cup (a' \cap s) = a' \cap s,$$
$$z = (s \cup b') \cap i = s \cup b',$$
$$t = (y \cup s') \cap z = y \cup (s' \cap z).$$

These representations obviously yield the corollary.

3. This section will be concerned with the special case when L is modular. We recall the reader that, by NEUMANN's Theorem, complemented modular lattices are also relatively complemented; consequently, Theorem 1 and 2 may be applied for them.

Using the results of the preceding section, we prove

Theorem 3. *Let L be any complemented modular lattice and let a, b, r be any elements of L satisfying* (1). *Then, s being any relative complement* *of r in $[a, b]$ and a', b', s' being arbitrary complements of a, b, s, respectively, the element t of the form* (10) *is a complement of r.*

Conversely, to each complement t of r there exists at least one relative complement s of r in $[a, b]$ such that, by suitable choice of the complements a', b', s' of a, b, s, respectively, the equation (10) *is satisfied*[3]).

Proof. Let s denote any relative complement of r in $[a, b]$. Consider the elements

$$\begin{aligned} y &= o \cup (a' \cap s) = a' \cap s, \\ z &= (s \cup b') \cap i = s \cup b', \\ t &= (y \cup s') \cap z = ((a' \cap s) \cup s') \cap (s \cup b') = \\ &= y \cup (s' \cap z) = (a' \cap s) \cup (s' \cap (s \cup b')), \end{aligned}$$

where a', b', s' denote arbitrary complements of a, b, s, respectively. Then, by NEUMANN's Theorem,

1. y is a relative complement of a in $[o, s]$;
2. z is a relative complement of b in $[s, i]$;
3. t is a relative complement of s in $[y, z] (= [a' \cap s, s \cup b'])$.

Hence, by the second part of Theorem 2, t is a complement of r, as asserted.

Conversely, if t is a complement of r, then, again by NEUMANN's Theorem, the element s of the form (3) is a relative complement of r in $[a, b]$. It follows that, for this s, the element t is a solution of (4). Hence, by the Corollary obtained in the preceding section, we conclude that, with some complements a', b', s' of a, b, s, respectively, the element t may be represented in the form (10). This completes the proof of Theorem 3.

(Received April 8, 1957.)

[3]) The first part of this theorem may be proved also by a direct, but very tedious calculation.

On the Jordan—Dedekind Chain Condition.

By G. GRÄTZER and E. T. SCHMIDT in Budapest.

1. Introduction. The well known Jordan—Dedekind theorem of lattice theory was firstly generalised by G. BIRKHOFF ([1][1]) p. 66) who proved the following assertion.

Let L be a lattice satisfying the following two conditions[2]):

(α) $x \cap y \prec y$ implies $x \prec x \cup y$ $(x, y \in L)$;

(β) all bounded chains in L are finite.

Then

(JD) in L all maximal chains between fixed end points have the same length.

Some attempts have been made to get a more general form of this result. R. CROISOT [2] and G. SZÁSZ [3] proved that if we replace condition (β) by the weaker

(γ) there exists at least one finite maximal chain between a and b $(a < b;\ a, b \in L)$,

then it results that (JD) holds in the interval $[a, b]$. Although under weaker conditions, the Croisot—Szász theorem asserts the validity of (JD) only for the same family of lattices as the Birkhoff theorem. Therefore we have tried to generalise these theorems so that the general theorem be applicable to lattices with continuous as well as discrete chains.

We have also tried to obtain a statement analogous to condition (JD) in the case of infinite chains of arbitary power. We have shown that with a suitable definition of the length and the maximality of an infinite chain, in distributive lattices (JD) holds.

2. The case of finite chains. First we give a simplified proof[3]) for the

---

[1]) Numbers in brackets refer to the Bibliography given at the end of this paper.

[2]) $a \prec b$ denotes that b covers a.

[3]) The idea of the proof is the same as of G. SZÁSZ [3].

Theorem 1 (The Croisot—Szász theorem). *Let L be a lattice satisfying (α), and C_1, C_2 two finite chains of L with the same end points. If C_1 is a (finite) maximal chain of length r, then*

(a) *C_2 is a finite chain;*

(b) *the length of C_2 is at most r;*

(c) *C_2 is maximal if and only if its length is r.*

Proof. Let

$$C_1: a = a_0 < a_1 < \cdots < a_r = b.$$

We use an induction on r. The case $r = 1$ is trivial in any lattice. We assume the validity of the statement of the Theorem for $r-1$. Suppose it is possible to choose a subchain of C_2 of length $r+1$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{r+1} = b.$$

Consider the chain

$$(*) \qquad a_1 \leqq a_1 \cup x_1 \leqq \cdots \leqq a_1 \cup x_{r+1} = b$$

and denote by t the least integer with $x_t \geqq a_1$ $(t \geqq 1)$. If i and $i+1 \geqq t$, then trivially $a_1 \cup x_i < a_1 \cup x_{i+1}$. If i and $i+1 < t$, from $a \prec a_1$ it follows $a = x_i \cap a_1 = x_{i+1} \cap a_1$, hence in view of (α) $x_i \prec x_i \cup a_1$ and $x_{i+1} \prec x_{i+1} \cup a_1$, excluding the possibility $x_i \cup a_1 = x_{i+1} \cup a_1$. Consequently, $x_j \cup a_1 = x_{j+1} \cup a_1$ is impossible unless $j = t-1$. Thus the length of $(*)$ is r and the proof is completed.

We prove also the following, somewhat generalised form of the Croisot—Szász theorem.

Theorem 2. *Let L be a lattice satisfying (α), C_1 and C_2 two finite chains of L with the same end points. Then C_1 and C_2 can be refined so that the refined chains have the same length.*

Theorem 1 follows at once from Theorem 2. On the other hand, we show that Theorem 1 implies Theorem 2.

In the proof of the Theorem 2 we may assume, without loss of the generality, that the length m of C_2 is less than or equal to the length n of C_1. There exists a maximal chain[4]) M (with the same end points as C_1 and C_2) which is a refinement of C_2. If M has more than n elements, then C_2 has a refinement of length n and thus the statement of Theorem 2 is obvious. So we may suppose that M has at most n elements, but this contradicts Theorem 1.

[4]) The existence of M is equivalent to the Axiom of Choice of ZERMELO ([1], pp. 42—43).

3. Counter-examples. G. Szász [4] proved that if we define the length of an infinite chain as the power of the set of its elements, and call an infinite chain maximal, if it is no proper subchain of any other one, then even in distributive lattices condition (JD) does not hold. This possibility is illustrated also by the following

Example 1. Let R be the chain of the rational numbers of the interval $[0, 1]$ and V the chain of all real numbers of $[0, 1]$. In the lattice $R \cdot V$ (i. e. in the cardinal product of R and V, in the sense of [1] p. 7) all the elements (x, x) (x rational) form a maximal chain between $(0, 0)$ and $(1, 1)$. This follows at once from the fact that in the case $y \neq z$, (y, z) and (x, x) are incomparable, where x is an arbitary rational number between y and z. Hence in $R \cdot V$ there exists a countable maximal chain between $(0, 0)$ and $(1, 1)$. On the other hand, the elements $(x, 0)$ and $(1, y)$ form a maximal chain of the power of continuum.

The following problem arises. Let C_1 and C_2 be maximal chains (with the same end points). Is then C_1 a homomorphic image of C_2 or C_2 a homomorphic image of C_1, at least in distributive lattices? In general, this assertion fails to hold as it is shown by the following

Example 2. Let A be a well-ordered and B a dually well-ordered infinite bounded chain with the bounds O_1, I_1 and O_2, I_2 ($O_1, I_1 \in A$; $O_2, I_2 \in B$). In the lattice $A \cdot B$, all the elements (x, O_2) and (I_1, y) form a maximal chain C_1, and the elements (O_1, y) and (x, I_2) form a maximal chain C_2. Let us suppose e. g. that C_2 is a homomorphic image of C_1. Using the Duality Principle we may assume without loss of generality that the homomorphic image of (I_1, O_2) is greater than or equal to (O_1, I_2). In this case all the elements (O_1, y) of C_2 form a chain isomorphic with B, which is a convex subchain of the homomorphic image of A. Since a homomorphic image of a well-ordered chain is a well-ordered chain and a convex subchain of a well-ordered chain is again well-ordered, we get that B is a well-ordered and at the same time dually well-ordered chain, i. e. B is finite, in contradiction to the hypotheses.

4. The case of infinite chains. Our aim is to establish an analogon of the condition (JD) for infinite chains in distributive lattices. By a *cut* of a chain we mean a subdivision of the chain into two non-void convex subchains and define the length of a chain as the power of the set of its different cuts. Thus the length of a finite chain consisting of $n+1$ elements is n as usual, while e. g. the length of the chain of all rational numbers is equal to the power of the continuum.

A chain C well be called *strongly maximal*, if

(a) C is no proper subchain of any other one with the same end points;

(b) for every homomorphic image of C, (a) is valid.

With the aid of these notions we prove:

Theorem 3. *If L is a distributive lattice*[5]*, then all strongly maximal chains between fixed end points have the same length; i. e. an analogon of the condition (JD) holds in L.*

Proof. Let C be a strongly maximal chain in L with the end points a and b $(a < b)$. We cut C into two convex subchains, I and J $(a \in I, b \in J)$. We consider the congruence relation Θ of L induced by $I \equiv a$ and $J \equiv b$. In [5] we have shown the following assertion: If $z \notin [x, y]$, then $z \equiv x(\Theta_{x,y})$ is false ($\Theta_{x,y}$ denotes the congruence relation induced by $x \equiv y$). This result implies at once $a \not\equiv b(\Theta)$. Clearly from (b) $[a, b]/\Theta \cong \mathbf{2}$[6]), hence Θ produces a cut on all chains between a and b. Θ is the minimal congruence relation with $a \equiv I$ and $J \equiv b$, but from $[a, b]/\Theta \cong \mathbf{2}$ it is clear that Θ is the maximal one with the same property. It implies that in $[a, b]$ exists one and only one congruence relation with $I \equiv a$, $J \equiv b$ and $a \not\equiv b$, hence different congruence relations (which are induced by a cut of C) define different cuts on strongly maximal chains between a and b. Thus the length of a strongly maximal chain between a and b is equal to the power of the set of all congruence relations on $[a, b]$ which are induced by a cut of C. Thus the proof is completed[7]).

Remark. If, following A. G. Kuroš [6], we consider only complete chains, i. e. chains for which every cut goes through an element (i. e. either I has a l. u. b. or J has a g. l. b.), then the above notion of length coincides with the usual one. Since in a complete lattice every maximal chain is complete, we obtain that in complete distributive lattices Theorem 3 holds with the usual notion of length (but in general not with the usual notion of maximality).

---

[5]) We conjecture that Theorem 3 holds in semi-modular lattices too.

[6]) $\mathbf{2}$ denotes the lattice with two elements.

[7]) We remark that it is possible that two chains have the same length, one of them is strongly maximal, the other has not this property. This may be shown by the two chains considered in Example 1.

Bibliography.

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Revised Edition, New York, 1948.
[2] R. Croisot, Contribution à l'étude des treillis semi-modulaires de longueur infinie, *Annales Sci. Ecole Normale Sup.*, **68** (1951), 203—265.
[3] G. Szász, On the structure of semi-modular lattices of infinite length, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951, 1952), 239—245
[4] G. Szász, Generalization of a theorem of Birkhoff, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 89—91. (Correction, p. 270.)
[5] G. Grätzer and E. Schmidt, Hálók ideáljai és kongruenciarelációi. I (Ideals and congruence relations in lattices. I), *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), 93—109.
[6] А. Г. Курош, Композиционные системы в бесконечных группах, Матем. Сворник, **16** (1945), 59—72.

(Received April 2, 1957.)

Über die orthogonalen Funktionen. I.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.[1])

D. MENCHOFF [1] und H. RADEMACHER [1] haben den folgenden Satz bewiesen:

Wenn die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ *die sogenannte Menchoff—Rademachersche Bedingung*

$$(1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

erfüllt, ist die orthogonale Reihe

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall konvergent*[2]).

D. MENCHOFF [1] hat auch gezeigt, daß die Bedingung (1) im allgemeinen nicht geschwächt werden kann, in dem Sinne, daß die Faktorenfolge $\{\log n\}$ durch keine langsamer ins Unendliche konvergierende Folge $\{W(n)\}$ ersetzbar ist. Nämlich gilt der folgende

Menchoffsche Satz. *Wenn die positive Zahlenfolge* $\{W(n)\}$ *die Bedingung*

$$W(n) = o(\log n)$$

erfüllt, dann kann ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *und eine Koef-*

---

1) Diese Arbeit enthält u. a. den ausführlichen Beweis der in den vorläufigen Mitteilungen [1], [2], [3] veröffentlichten Resultate, jedoch werden einige Resultate in einer allgemeineren Form bewiesen.

2) In dieser Arbeit wird der Logarithmus mit der Basis 2 verwendet, man beschränkt sich nur auf reelle orthogonale Reihen und es wird angenommen, daß das Grundintervall endlich ist.

fizientenfolge $\{a_n\}$ *angegeben werden, für die*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n) < \infty$$

ist und die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{3}$$

im Grundintervall überall divergiert.

Später hat D. MENCHOFF [2] gezeigt, daß in seinem Satz *das Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *im Grundintervall gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.*

In dieser Arbeit wird mit Benützung der Grundideen von D. MENCHOFF zuerst die folgende Verschärfung des Menchoffschen Satzes bewiesen (Satz I):

Es sei $\{a_n\}$ *eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty \tag{4}$$

erfüllt. Dann kann ein (von der Folge $\{a_n\}$ *abhängiges) orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, für welches die Reihe* (3) *im Grundintervall überall divergiert.*

Es wird gezeigt, daß dieser Satz den Menchoffschen Satz enthält.

Man kann leicht einsehen, daß in Satz I die Monotonität wesentlich ist; sonst ist die Behauptung im allgemeinen nicht gültig. Es kann nämlich eine positive, lakunäre Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ angegeben werden, für die (4) erfüllt ist, dagegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \tag{5}$$

ist (es sei z. B. $a_{2^{2^m}} = \frac{1}{m^2}$ für $m = 1, 2, \ldots$ und $a_n = 0$ sonst). Dann ist aber die orthogonale Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall fast überall absolut konvergent [3]).

[3]) Es sei nämlich $\{\varphi_n(x)\}$ ein in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Auf Grund von (5) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b |\varphi_n(x)|\, dx \leqq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx \right)^{1/2} = (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n |\varphi_n(x)|$$

im Grundintervall fast überall konvergiert.

Aus Satz I ergibt sich, daß *für eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *die Menchoff-Rademachersche Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür ist, daß die orthogonale Reihe* (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall konvergiert.*

In § 2 wird gezeigt, daß *in Satz* I *das Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *im Grundintervall gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.*

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Ist $\{a_n\} \in l^2$, d. h. ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

so erfüllt sich für die Folge $\left\{\frac{a_n}{\log n}\right\}$ die Bedingung (1) und so konvergiert die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n} \varphi_n(x)$$

nach dem Menchoff-Rademacherschen Satz im Grundintervall fast überall. Mit Anwendung eines bekannten Kroneckerschen Hilfssatzes [4]) ergibt sich für die Partialsummen der quadratisch integrierbaren Entwicklungen die folgende von H. Rademacher stammende Abschätzung:

Ist $\{a_n\} \in l^2$, *so gilt im Grundintervall fast überall*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x) = o(\log N). \tag{6}$$

(Siehe H. Rademacher [1], S. 122.)

Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} < \infty \tag{7}$$

erfüllt. Dann erfüllt sich die Bedingung (1) für die Folge $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$ und so konvergiert die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{l_n}$$

---

[4]) Der Kroneckersche Hilfssatz lautet folgenderweise. *Es sei* $\{t_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche konvergierende Zahlenfolge. Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{t_n}$$

konvergent ist, dann gilt $u_0 + \ldots + u_N = o(t_N)$ (siehe z. B. A. Zygmund [1], S. 255).

nach dem Menchoff-Rademacherschen Satz im Grundintervall fast überall. Daraus ergibt sich mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes die sogenannte

Rademachersche Abschätzung. *Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge* $\{l_n\}$ *die Bedingung* (7) *erfüllt, dann gilt im Grundintervall fast überall*

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) = o(l_N). \tag{8}$$

(Siehe in weniger scharfer Form, nämlich mit der Abschätzung $o\left(\sqrt{N}\log^{3+\varepsilon} N\right)$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(l_N)$, bei H. RADEMACHER [1], S. 122.)

In §§ 3—4 wird mit Hilfe des Menchoffschen Satzes bzw. mit der von uns gegebenen Verallgemeinerung bewiesen, daß die Abschätzungen (6) und (8) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty \tag{9}$$

erfüllt. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}$$

im Grundintervall fast überall konvergiert. Daraus erhalten wir mit Anwendung des Kroneckerschen Hilfssatzes die folgende Abschätzung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

$$\sum_{n=0}^{N} \varphi_n^2(x) = o(\lambda_N^2). \tag{10}$$

(Siehe in weniger scharfer Form, mit der Abschätzung $o(N\log^{1+\varepsilon} N)$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(\lambda_N^2)$, bei S. KACZMARZ [1], S. 99.)

Von der Abschätzung (10) ergibt sich die folgende Behauptung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ *die Bedingung* (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

$$\varphi_N(x) = o(\lambda_N). \tag{11}$$

In § 5 wird gezeigt, daß die Abschätzungen (10) und (11) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Betrachten wir nun die Lebesgueschen Funktionen

$$L_N(x) = \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \qquad (N=0,1,\ldots),$$

die zu den Partialsummen der Entwicklungen nach dem in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormierten Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ gehören. Nach der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right| dt \leqq (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t) \right)^2 dt \right)^{1/2}$$

und so gilt im Grundintervall überall

(12) $$L_N(x) \leqq (b-a)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} \varphi_n^2(x) \right)^{1/2} \qquad (N=0,1,\ldots).$$

Daraus ergibt sich auf Grund von (10) die folgende Abschätzung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (9) *erfüllt, dann ist im Grundintervall fast überall*

(13) $$L_N(x) = o(\lambda_N).$$

(Siehe in weniger scharfer Form, mit der Abschätzung $o(\sqrt{N}\log^{1+\varepsilon} N)$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(\lambda_N)$, bei S. Kaczmarz [1], S. 99.)

In speziellen Fällen kann die Abschätzung (13) verschärft verden:

Ist das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall gleichmäßig beschränkt; oder sind die Lebesgueschen Funktionen des Systems im Grundintervall fast überall konstant, so gilt im Grundintervall überall, bzw. fast überall

(14) $$L_N(x) = O(N^{1/2}).$$

(Siehe S. Kaczmarz [1], S. 99. und H. Rademacher [1], S. 130.)

Der erste Teil der Behauptung ist aus der Ungleichung (12) evident, der zweite Teil kann mit einer einfachen Rechnung bewiesen werden. In § 6 wird mit Anwendung der Ergebnisse von H. Rademacher gezeigt, daß die Abschätzung (13) im allgemeinen nicht verbessert werden kann. Daß die Abschätzung (14) im allgemeinen nicht verbessert werden kann, wurde von H. Rademacher bewiesen. Das Rademachersche System $\{r_n(x)\}$ ist nämlich im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig beschränkt, die Lebesgueschen Funktionen sind im Grundintervall fast überall je einer Konstante gleich und es gilt im

Grundintervall fast überall

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{N} r_n(x) r_n(t) \right| dt \leqq \delta N^{1/2} \qquad (N = 0, 1, \ldots),$$

wo δ eine von N unabhängige positive Zahl ist (H. RADEMACHER [1], S. 130-134).

In den folgenden Paragraphen dieser Arbeit werden ähnliche, mit der Cesàroschen Summation zusammenhängende Fragen besprochen.

In § 7 wird mit Anwendung eines Summationssatzes von D. MENCHOFF folgendes bewiesen:

Für die $(C, \alpha > 0)$-Mittel $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ der quadratisch integrierbaren Entwicklungen gilt die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\log \log N) \tag{15}$$

im Grundintervall fast überall.

Dieser Satz ist eine Verschärfung eines Satzes von G. ALEXITS [1]. Wir werden zeigen, daß die Abschätzung (15) im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

In § 8 wird die Verallgemeinerung eines Satzes von I. S. GÁL bewiesen, der sich auf die $(C, \alpha > 0)$-Mittel der orthonormierten Funktionen bezieht und folgenderweise lautet:

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung (9) erfüllt. Ist $\alpha > 0$, so gilt im Grundintervall fast überall

$$\frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n(x) = o(\lambda_N) \qquad \left(A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m} \right). \tag{16}$$

Dieser Satz wurde für $\alpha = 1$ von I. S. GÁL [1] mit der Abschätzung $o(\sqrt{N \log^{1+\varepsilon} N})$ $(\varepsilon > 0)$ statt $o(\lambda_N)$ bewiesen. Später wurde dieser Satz von G. ALEXITS [1] in einer etwas allgemeineren Form bewiesen. Es wird auch gezeigt, daß die Abschätzung (16) im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

In § 9 werden die zu der $(C, \alpha > 0)$-Summation gehörigen Lebesgueschen Funktionen

$$L_N^{(\alpha)}(x) = \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varphi_n(x) \varphi_n(t) \right| dt \qquad (N = 0, 1, \ldots)$$

untersucht. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Faktoren $A_m^{(\alpha)}$ ist evident, daß für $\alpha > 0$ im Grundintervall überall

$$L_N^{(\alpha)}(x) \leqq \max_{0 \leqq k \leqq N} L_k(x) \qquad (N = 0, 1, \ldots)$$

ist. Daraus ergibt sich auf Grund der Abschätzungen (13) und (14) die folgende Behauptung:

Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung (9) erfüllt, dann ist für $\alpha > 0$ im Grundintervall fast überall

$$L_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N). \tag{17}$$

Ist das Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ im Grundintervall $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt, so ist für $\alpha > 0$ im Grundintervall überall

$$L_N^{(\alpha)}(x) = O(N^{1/2}). \tag{18}$$

Durch eine Modifikation des Grundgedankens von § 6 kann man zeigen, daß im allgemeinen die Abschätzungen (17) und (18) nicht verbessert werden können. Auf Grund dieser Ergebnisse ist ersichtlich, daß *von der gewöhnlichen Summation zu den Cesàroschen Mitteln übergehend, die Größenordnung der Lebesgueschen Funktionen im allgemeinen nicht abnimmt.*

Wir werden sehen, daß die Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ gleichzeitig behandelt werden können. Trotzdem werden die zwei Fälle gesondert untersucht, weil der Fall $\alpha > 0$ im Vergleich zum Fall $\alpha = 0$ wesentlich komplizierter ist.

Ich möchte den Herren Professoren G. ALEXITS und B. SZ.-NAGY meinen aufrichtigen Dank aussprechen für ihre wertvollen Ratschläge bei der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit.

§ 1. Die Verallgemeinerung des Menchoffschen Satzes.

In diesem Paragraphen wird zuerst die folgende, schon in der Einleitung erwähnte Verschärfung des Menchoffschen Satzes bewiesen.

Satz I. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty \tag{1.1}$$

erfüllt ist. Dann kann ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, für welches die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{1.2}$$

im Grundintervall $[a, b]$ überall divergiert.

Mit anderen Worten, ist für eine positive, monoton nichtwachsende Folge $\{a_n\}$ die Menchoff-Rademachersche Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall konvergiert.*

Zuerst sei gezeigt, daß aus Satz I der Menchoffsche Satz folgt. Zum Beweis dieser Behauptung benötigen wir den folgenden

Hilfssatz I. *Es sei* $\{W(n)\}$ *eine positive Zahlenfolge, für die*

$$W(n) = o(\log n)$$

gilt. Es kann eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{v(n)\}$ *angegeben werden, die die Bedingungen*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{W^2(n)}{(n \log^3 n) v^2(n)} < \infty \tag{1.3}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) v^2(n)} = \infty \tag{1.4}$$

erfüllt.

Beweis von Hilfssatz I. Nach unserer Annahme ist

$$\frac{W(n)}{\log n} = o(1).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $W(n)(\log n)^{-1} \leqq 1$ für jedes $n \geqq 2$ gilt. Da

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty$$

ist, kann eine Indexfolge $\{N_k\}$ $(N_0 = 2)$ bestimmt werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$\left(\frac{W(n)}{\log n}\right)^2 \leqq \frac{1}{k^2} \text{ für } n \geqq N_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

und

$$\sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{1}{m \log m} \leqq \sum_{m=N_k}^{N_{k+1}-1} \frac{1}{m \log m} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.6}$$

Es sei

$$v(n) = \left\{ \sum_{m=N_{k-1}}^{N_k - 1} \frac{1}{m \log m} \right\}^{1/2} \text{ für } N_{k-1} \leqq n < N_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.7}$$

Die so definierte Zahlenfolge $\{\nu(n)\}$ ist positiv und nach (1.6) monoton nichtabnehmend. Nach (1.5) und (1.7) ist

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{W^2(n)}{(n\log^3 n)\nu^2(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1}\frac{W^2(n)}{(n\log^3 n)\nu^2(n)}\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty,$$

also wird die Bedingung (1.3) erfüllt. Nach (1.7) gilt für jedes s

$$\sum_{n=2}^{N_s-1}\frac{1}{(n\log n)\nu^2(n)}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1}\frac{1}{(n\log n)\nu^2(n)}=\sum_{k=1}^{s}1=s,$$

woraus (1.4) folgt.

Damit haben wir den Hilfssatz I bewiesen.

Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingung $W(n)= = o(\log n)$ erfüllt ist. Mit Anwendung von Hilfssatz I ergibt sich eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\nu(n)\}$, die die Bedingungen (1.3) und (1.4) erfüllt. Es sei nun $a_0=a_1=\frac{1}{\nu(2)}$ und $a_n=\frac{1}{\sqrt{n\log^3 n}\,\nu(n)}$ für $n\geqq 3$. Es ist klar, daß diese Folge positiv, monoton nichtwachsend ist und da nach (1.4)

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\log^2 n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log n)\nu^2(n)}=\infty$$

gilt, wird die Bedingung (1.1) erfüllt. So gibt es nach dem Satz I ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die orthogonale Reihe (1.2) im Grundintervall $[a,b]$ überall divergiert. Nach (1.3) gilt aber:

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\,W^2(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{W^2(n)}{(n\log^3 n)\nu^2(n)}=\infty.$$

Daher erfüllt die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und das mit Anwendung von Satz I gewonnene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ die in dem Menchoffschen Satz vorkommenden Bedingungen.

Damit haben wir bewiesen, daß aus Satz I der Menchoffsche Satz folgt.

Zum Beweis des Satzes I benötigen wir die folgenden zwei Hilfssätze.

Hilfssatz II. *Es seien $c(\geqq 1)$ und $p(\geqq 2)$ positive ganze Zahlen. Es kann ein im Intervall $[0,5]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[5]) *$\{f_l(c;p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ mit den folgenden Eigenschaften angegeben werden: zu jedem Punkt $x\in\left[\frac{2}{c},\frac{3}{c}\right)$ gibt es eine von x abhängige natürliche*

[5]) Eine Funktion in (a,b) heißt eine *Treppenfunktion*, wenn (a,b) in endlichviele Teilintervalle zerlegt werden kann, so daß die Funktion in jedem Teilintervall kostant ist.

Zahl $m(x)\,(<p)$, *so daß die Funktionswerte* $f_1(c,p;x),\ldots,f_{p+m(x)}(c,p;x)$ *positiv sind und*

$$(1.8)\qquad f_1(c,p;x)+\cdots+f_{p+m(x)}(c,p;x)\geqq A\sqrt{cp}\,\log p$$

gilt, wo A eine positive, von x, c und p unabhängige Zahl ist.

Für $c=1$ wurde dieser Hilfssatz von S. KACZMARZ [2] bewiesen; der folgende Beweis für beliebiges c ist ähnlich dem Beweis von S. KACZMARZ für den Fall $c=1$.

Beweis von Hilfssatz II. Es sei

$$\bar f_l(c,p;x)=\frac{1}{k-p-l-\frac{1}{2}}\quad \text{für } x\in\left[\frac{k-1}{cp},\frac{k}{cp}\right)\quad (k=1,\ldots,4cp;\ l=1,\ldots,2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar f_l^2(c,p;x)\,dx=\sum_{k=1}^{4cp}\frac{1}{\left(k-p-l-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{1}{cp}\quad (l=1,\ldots,2p),$$

woraus folgt

$$(1.9)\qquad \int_0^4 \bar f_l^2(c,p;x)\,dx\leqq\frac{A'}{cp}\qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A' eine von c und p unabhängige Zahl ist.

Ferner haben wir für $i>j$:

$$\int_0^4 \bar f_i(c,p;x)\bar f_j(c,p;x)\,dx=\frac{1}{cp}\sum_{k=1}^{4cp}\frac{1}{\left(k-p-i-\frac{1}{2}\right)\left(k-p-j-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{cp}\,\frac{1}{i-j}\sum_{k=1}^{4cp}\left\{\frac{1}{k-p-i-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k-p-j-\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{cp}\,\frac{1}{i-j}\left\{\sum_{k=1-p-i}^{(4c-1)p-i}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1-p-j}^{(4c-1)p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^4 \bar f_i(c,p;x)\bar f_j(c,p;x)\,dx=\frac{1}{cp}\,\frac{1}{i-j}\left\{\sum_{k=1-p-i}^{-p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\sum_{k=(4c-1)p-i+1}^{(4c-1)p-j}\frac{1}{k-\frac{1}{2}}\right\}$$

und so ist

$$(1.10)\qquad \left|\int_0^4 \bar{f}_i(c,p;x)\bar{f}_j(c,p;x)dx\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{cp}\frac{1}{i-j}\left\{\frac{i-j}{p+j+\frac{1}{2}}+\frac{i-j}{(4c-1)p-i-\frac{1}{2}}\right\} \leqq \frac{1}{cp}\frac{2}{p}.$$

Um von den im Intervall $[0,4]$ so definierten Funktionen $\bar{f}_l(c,p;x)$ $(l=1,\ldots,2p)$ ein im Intervall $[0,5]$ orthogonales Funktionensystem zu erhalten, sollen diese Funktionen im Intervall $[4,5]$ wie folgt definiert werden. Wir teilen das Intervall $[4,5]$ in $N=2p(2p-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{i,j}$ $(1\leqq i\leqq 2p,\ 1\leqq j\leqq 2p,\ i\neq j)$. Es sei, für $l=1,\ldots,2p$,

$$\bar{f}_l(c,p;x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|} & x\in I_{l,j},\\ -\sqrt{\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|}\operatorname{sign}\alpha_{l,j} & x\in I_{j,l},\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

wo

$$\alpha_{i,j}=\int_0^4 \bar{f}_i(c,p;x)\bar{f}_j(c,p;x)\,dx$$

gesetzt wird. Die so definierten Treppenfunktionen $\{\bar{f}_l(c,p;x)\}$ $(l=1,\ldots,2p)$ bilden im Intervall $[0,5]$ offenbar ein orthogonales System, ferner ist

$$\int_0^5 \bar{f}_l^2(c,p;x)dx=\int_0^4 \bar{f}_l^2(c,p;x)dx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l-1}|\alpha_{l,n}|+\frac{1}{2}\sum_{n=l+1}^{2p}|\alpha_{l,n}|.$$

Hieraus folgt auf Grund von (1.9) und (1.10)

$$(1.11)\qquad \int_0^5 \bar{f}_l^2(c,p;x)dx\leqq\frac{A''}{cp}\qquad (l=1,\ldots,2p),$$

wo A'' eine von c und p unabhängige positive Zahl ist.

Ist $x\in\left[\frac{2}{c},\frac{3}{c}\right)$, so gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(<p)$ derart, daß

$$x\in\left[\frac{2p+m(x)}{cp},\frac{2p+m(x)+1}{cp}\right)$$

gilt. Nach der Definition von $\bar{f}_l(c,p;x)$ sind die Funktionswerte $\bar{f}_1(c,p;x),\ldots,$ $\bar{f}_{p+m(x)}(c,p;x)$ positiv und es gilt

$$\sum_{l=1}^{p+m(x)} \bar{f}_l(c,p;x) = \sum_{l=1}^{p+m(x)} \frac{1}{2p+m(x)+1-p-l-\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{p+m(x)} \frac{1}{l-\frac{1}{2}}.$$

Für die normierten Funktionen

$$f_l(c,p;x) = \left\{ \int_0^5 \bar{f}_l^2(c,p;x)\,dx \right\}^{-1/2} \bar{f}_l(c,p;x) \qquad (l=1,\ldots,2p)$$

ergibt sich dann auf Grund von (1.11) die Ungleichung (1.8).

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

Ist $I=[u,v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so definieren wir:

$$f_l(c,p,I;x) = \begin{cases} \sqrt{5}\, f_l\left(c,p;5\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l=1,\ldots,2p)$ und

$$F(c,I) = \left[\frac{v-u}{5}\,\frac{2}{c}+u,\ \frac{v-u}{5}\,\frac{3}{c}+u\right).$$

Dann ist

$$\int_I f_i(c,p,I;x) f_j(c,p,I;x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i\neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i=j, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\mu\Big(F(c,I)\Big) = \frac{\mu(I)}{5}\,\frac{1}{c}, \text{[6]} \tag{1.13}$$

und für $x\in F(c,I)$ gibt es nach (1.8) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)\,(<p)$ derart, daß die Funktionswerte $f_1(c,p,I;x),\ldots,f_{p+m(x)}(c,p,I;x)$ positiv sind und die Ungleichung

$$f_1(c,p,I;x)+\cdots+f_{p+m(x)}(c,p,I;x) \geqq \sqrt{5}\,A\sqrt{cp}\,\log p \tag{1.14}$$

besteht.

Hilfssatz III. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge, die die Bedingung* (1.1) *erfüllt. Dazu kann man ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft angeben:*

Für fast alle Punkte x des Grundintervalls und für unendlich viele von x abhängige natürliche Zahlen m kann eine natürliche Zahl $n_m(x)\,(<2^{m+2}-1)$

[6]) Mit $\mu(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

angegeben werden, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ *gleiches Vorzeichen haben und*

$$|\Phi_{N_m}(x)+\cdots+\Phi_{N_m+n_m(x)}|>B\frac{1}{a_{N_{m+1}}} \tag{1.15}$$

gilt; dabei ist $N_0=0$, $N_m=2(2+\cdots+2^m)$ $(m\geqq 1)$ *und* B *ist eine von* x *und* m *unabhängige positive Zahl.*

Beweis von Hilfssatz III. Wir konstruieren in $[a,b]$ zuerst ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und meßbare Mengen F_m $(m=0,1,\ldots)$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes $x\in F_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)\,(<2^{m+2}-1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x),\ldots,\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben, und (1.15) mit einer von x und m unabhängigen Konstanten B gültig ist;

b) die Mengen F_m $(m=0,1,\ldots)$ sind stochastisch unabhängig[7]) und es gilt

$$\mu(F_m)\geqq\frac{b-a}{10}\min\{1, N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}\}. \tag{1.16}$$

Der Grundgedanke der folgenden Konstruktion wird von den Arbeiten von S. Kaczmarz [2] und D. Menchoff [1] entnommen.

Zuerst soll erwähnt werden, daß

$$N_{m+1}<4N_m \qquad (m=1,2,\ldots) \tag{1.17}$$

ist. Da die Folge $\{a_n\}$ positiv, monoton nichtwachsend ist, gilt für jedes s

$$\sum_{n=N_1}^{N_s-1}a_n^2\log^2 n=\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1}a_n^2\log^2 n<\sum_{k=1}^{s-1}(N_{k+1}-N_k)a^2_{N_k}\log^2 N_{k+1},$$

also folgt auf Grund von (1.17)

$$\sum_{n=N_1}^{N_s-1}a_n^2\log^2 n<16\sum_{k=1}^{s-1}N_k a^2_{N_k}\log^2 N_k$$

und so ist nach (1.1)

$$\sum_{m=0}^{\infty}N_{m+1}a^2_{N_{m+1}}\log^2 N_{m+1}=\infty.$$

---

7) D. h. für jede endliche Indexfolge $k_1<k_2<\cdots<k_n$ gilt

$$\frac{\mu(F_{k_1}\cap F_{k_2}\cap\cdots\cap F_{k_n})}{b-a}=\frac{\mu(F_{k_1})}{b-a}\,\frac{\mu(F_{k_2})}{b-a}\cdots\frac{\mu(F_{k_n})}{b-a}.$$

Daraus entnehmen wir, daß aus (1.16) die Beziehung

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(F_m) = \infty \tag{1.18}$$

folgt.

Hieraus und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen F_m ergibt sich auf Grund des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas[8]):

$$\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} F_m) = b-a.$$

Für $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} F_m$ gilt aber (1.15) für unendlich viele m.

Damit wird also der Hilfssatz III bewiesen werden.

Nun gehen wir zur Konstruktion der Funktionen $\Phi_n(x)$ und der Mengen F_m über.

Wir beginnen mit der Bemerkung, daß aus der Definition der Indexfolge $\{N_k\}$ folgt:

$$\sqrt{2^{m+1}} > \frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}}, \quad m+1 \geqq \frac{1}{3}\log N_{m+1} \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{1.19}$$

---

[8]) Dieses Lemma (siehe z. B. W. Feller [1], S. 155) lautet folgenderweise: *Sind die meßbaren Mengen $E_m (\subseteqq [a, b])$ $(m=0, \ldots)$ stochastisch unabhängig und ist*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(E_m) = \infty, \tag{*}$$

so gilt

$$\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m) = b-a.$$

Diese Form des Borel-Cantellischen Lemmas kann z. B. auf folgender Weise bewiesen werden. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit gilt für alle l und s $(s \geqq l)$

$$\mu(\bigcup_{k=l}^{s} E_k) = (b-a) - \mu(C\bigcup_{k=l}^{s} E_k) = (b-a) - \mu(\bigcap_{k=l}^{s} CE_k) =$$

$$= (b-a)\left\{1 - \prod_{k=l}^{s} \frac{\mu(CE_k)}{b-a}\right\} = (b-a)\left\{1 - \prod_{k=l}^{s}\left(1 - \frac{\mu(E_k)}{b-a}\right)\right\},$$

wo CH die Menge $[a, b]-H$ bezeichnet. Auf Grund der Annahme (*) gilt

$$\prod_{k=l}^{\infty}\left(1 - \frac{\mu(E_k)}{b-a}\right) = 0,$$

also ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=l}^{\infty} E_k\right) = b-a.$$

Daraus ergibt sich auf Grund der Relation

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m = \bigcap_{l=0}^{\infty}(\bigcup_{k=l}^{\infty} E_k)$$

unsere Behauptung.

Nun wenden wir den Hilfssatz II an, undzwar mit der folgenden Wahl der Zahlen c, p:

$$c_1 = \left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right],^{9)} \qquad p_1 = 2.$$

Es sei

$$\Phi_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} f_l(c_1, p_1, [a, b]; x) \qquad (l = 1, \ldots, N_1)$$

und $F_0 = F(c_1, [a, b])$. Nach dem Hilfssatz II sind $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_1 - 1)$ Treppenfunktionen und bilden nach (1. 12) ein in $[a, b]$ orthonormiertes System. Auf Grund von (1. 13) ist

$$\mu(F_0) = \frac{b-a}{5}\left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right]^{-1} \geqq \frac{b-a}{5} \frac{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1 + 1},$$

woraus folgt, daß (1. 16) für $m = 0$ erfüllt wird. Ist $x \in F_0$, so gibt es nach (1. 14) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_0(x)$ $(< 2^2 - 1)$, für die die Funktionswerte $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{n_0(x)}(x)$ positiv sind und

$$\Phi_0(x) + \cdots + \Phi_{n_0(x)}(x) \geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A \left\{\left[\frac{1}{N_1 a_{N_1}^2 \log^2 N_1} + 1\right] 2\right\}^{1/2} \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_1} a_{N_1} \log N_1}$$

ist. Daraus ergibt sich auf Grund von (1. 19), daß (1. 15) für $m = 0$ erfüllt ist, wenn $B = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A$ gewählt wird.

Es sei $m (\geqq 1)$ ein beliebiger Index. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_m - 1)$ und die Mengen F_k $(k = 0, \ldots, m-1)$ bereits definiert sind, so daß die $\Phi_n(x)$ Treppenfunktionen sind, in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen a), b) für die Mengen $F_0, \ldots, F_{m-1}$ erfüllt sind (insbesondere sind also $F_0, \ldots, F_{m-1}$ stochastisch unabhängig).

Dann kann eine Einteilung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ angegeben werden, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_m - 1)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ werden mit I'_ϱ bzw. I''_ϱ bezeichnet $(\varrho = 1, \ldots, r)$.

Wir wenden nun den Hilfssatz II mit den Zahlen

$$c_{m+1} = \left[\frac{1}{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}} + 1\right], \quad p_{m+1} = 2^{m+1}$$

---

9) Im allgemeinen bezeichnen wir mit $[\alpha]$ den ganzen Teil von α.

an. Es sei

$$\Phi_{N_m+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} f_l\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x\right)-\sum_{\varrho=1}^{r} f_l\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x\right)\right\}$$

$(l=1,\ldots,2\cdot 2^{m+1})$ und

$$F_m=\bigcup_{\varrho=1}^{r}\left(F(c_{m+1}, I'_\varrho)\cup F(c_{m+1}, I''_\varrho)\right).$$

Auf Grund des Hilfssatzes II ist es klar, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(N_m\leqq n<N_{m+1})$ Treppenfunktionen sind.

Es sei $1\leqq i\leqq 2^{m+2}$, $1\leqq j\leqq 2^{m+2}$. Dann ist nach (1.12)

$$\int_a^b \Phi_{N_m+i-1}(x)\,\Phi_{N_m+j-1}(x)\,dx=$$

$$(1.20)\qquad =\frac{1}{b-a}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I'_\varrho} f_i\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x\right) f_j\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x\right)dx+\right.$$
$$\left.+\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I''_\varrho} f_i\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x\right) f_j\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x\right)dx\right\}=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{für } i\neq j,\\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\sum_{\varrho=1}^{r}(\mu(I'_\varrho)+\mu(I''_\varrho))=1 & \text{für } i=j.\end{cases}$$

Es sei ferner $0\leqq n<N_m$, $1\leqq l\leqq 2^{m+2}$. Wir bezeichnen mit $c_\varrho(n)$ den im Intervall I_ϱ angenommenen Wert der Funktion $\Phi_n(x)$ $(\varrho=1,\ldots,r)$. Dann ist

$$\int_a^b \Phi_n(x)\,\Phi_{N_m+l-1}(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n)\int_{I'_\varrho} f_l\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I'_\varrho; x\right)dx-\right.$$

$$(1.21)\qquad \left.-\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n)\int_{I''_\varrho} f_l\left(c_{m+1}, p_{m+1}, I''_\varrho; x\right)dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5(b-a)}}\sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho(n)\left(\mu(I'_\varrho)-\mu(I''_\varrho)\right)\int_0^5 f_l\left(c_{m+1}, p_{m+1}; x\right)dx=0.$$

Nach (1.20) und (1.21) bilden die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{m+1}-1)$ in $[a, b]$ ein orthonormiertes System.

Auf Grund von (1. 13) ist

$$\mu(F_m) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}} + 1\right]^{-1} \sum_{\varrho=1}^{r} (\mu(I_\varrho') + \mu(I_\varrho'')) \geqq$$

$$\geqq \frac{b-a}{5} \; \frac{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}}{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1} + 1},$$

woraus folgt, daß (1. 16) auch für den Index m gilt. Ist $x \in F_m$, so gibt es nach (1. 14) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x) (< 2^{m+2} - 1)$, für die die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben (positives bzw. negatives jenachdem $x \in I_\varrho'$ bzw. $x \in I_\varrho''$ ist) und

$$|\Phi_{N_m}(x) + \cdots + \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)| \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} A \left\{\left[\frac{1}{N_{m+1} a_{N_{m+1}}^2 \log^2 N_{m+1}} + 1\right] 2^{m+1}\right\}^{1/2} (m+1) \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{b-a}} \; \frac{\sqrt{2^{m+1}}}{\sqrt{N_{m+1}}\, a_{N_{m+1}} \log N_{m+1}} (m+1)$$

ist; daraus folgt auf Grund von (1. 19), daß (1. 15) auch für den Index m gilt, wenn B wie oben gewählt wird.

Es ist klar, daß die Mengen $F_0, \ldots, F_m$ stochastisch unabhängig sind.

Durch vollständige Induktion erhalten wir also ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und Mengen F_k $(k = 0, 1, \ldots)$, so daß die Bedingungen a) und b) erfüllt sind.

Damit ist der Hilfssatz III bewiesen.

B e w e i s v o n S a t z I. Wir nehmen an, daß die positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die Bedingung (1. 1) erfüllt. Nach Hilfssatz III existiert ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß (1. 15) in fast allen Punkten $x \in [a, b]$ für unendlich viele Indizes m erfüllt ist; dabei ist $n_m(x) < 2^{m+2} - 1$ und die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ haben gleiches Vorzeichen.

Auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und wegen der Ungleichung $N_m + n_m(x) < N_m + 2^{m+2} = N_{m+1}$ ergibt sich, daß in fast allen Punkten $x \in [a, b]$ für unendlich viele m

$$(1.22) \qquad |a_{N_m} \Phi_{N_m}(x) + \cdots + a_{N_m + n_m(x)} \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)| > B$$

gilt. So divergiert für das erhaltene Funktionensystem die orthogonale Reihe (1.2) fast überall in $[a, b]$. Wenn man die Werte der Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null auf geeigneter Weise verändert (es sei z. B. $\Phi_n(x) = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in jedem Punkt $x \in [a, b]$, wo die

Reihe (1.2) konvergiert), kann man erreichen, daß die orthogonale Reihe (1.2) in $[a, b]$ überall divergiert.

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Wir beweisen jetzt die folgende Verallgemeinerung des Satzes I:

Satz II. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1.1) *erfüllt wird. Es kann im Grundintervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n(x) \tag{1.23}$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ mit

$$a_n^* \geqq \eta a_n \qquad (n=0, 1, \ldots; \eta > 0) \tag{1.24}$$

in $[a, b]$ überall divergiert.

Beweis von Satz II. Wir wenden für die Folge $\{a_n\}$ den Hilfssatz III an; es sei $\{\Phi_n(x)\}$ das so erhaltene, in $[a, b]$ orthonormierte Funktionensystem. Aus (1.22) folgt, da die dort vorkommenden Funktionswerte gleiches Vorzeichen haben, die Ungleichung

$$|a_{N_m}^* \Phi_{N_m}(x) + \cdots + a_{N_m+n_m(x)}^* \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| > \eta B. \tag{1.25}$$

Da also (1.25) in fast allen Punkten $x \in [a, b]$ für unendlich viele Indizes m gilt, ist die Reihe (1.23) in $[a, b]$ fast überall divergent. Mit einer geeigneten Veränderung der Werte von $\Phi_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null kann erreicht werden, daß die Reihe (1.23) überall divergiert.

Damit haben wir den Satz II bewiesen.

Es soll noch bemerkt werden, daß in Satz I die Monotonität der Koeffizientenfolge bzw. in Satz II die Bedingung (1.24) nur dann notwendig ist, wenn die genannte Folge zur Klasse l^2 gehört. Ist nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty,$$

so divergiert die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$$

bekanntlich in $[0, 1]$ fast überall (siehe J. Khintchine—A. N. Kolmogorov [1]).

§ 2. Gleichmäßig beschränkte orthonormierte Funktionensysteme.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß *in den Sätzen* I *und* II *gefordert werden kann, daß das orthonormierte Funktionensystem gleichmäßig beschränkt ist.*

Der Beweis dieser Behauptung erfolgt mit Benützung der Grundideen von D. Menchoff. Der Beweis wird nicht ausführlich ausgearbeitet, sondern es wird manchmal auf die betreffenden Stellen der Arbeit [2] von D. Menchoff hingewiesen werden. Er ist dem Beweis von Satz I ähnlich, aber doch davon ganz unabhängig, so daß wir also den Satz I in einer verschärften Form nochmals beweisen. Der Beweis der verschärften Behauptung ist aber viel komplizierter als der frühere.

Wir werden das folgende Lemma benützen.

Lemma von Menchoff (D. Menchoff [2], S. 104.) *Es seien d und q positive ganze Zahlen, $0<d<q$. Zu jedem Indexpaar (i,j) mit $1\leqq i\leqq q, 1\leqq j\leqq q$ und $|i-j|=d$ soll eine von Null verschiedene Zahl $\alpha_{i,j}$ zugeordnet werden; wir bezeichnen mit β_d das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen $\alpha_{i,j}$. In jedem Intervall (u,v) mit*

$$v-u>2\beta_d \tag{2.1}$$

können dann Funktionen $\varphi_l(x)$ $(l=1,\dots,q)$ derart definiert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden: $\varphi_l(x)$ ist eine Treppenfunktion und es gilt:

$$|\varphi_l(x)|=1 \qquad (u<x\leqq v;\ l=1,\dots,q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=-\alpha_{i,j} \qquad (|i-j|=d,\ 1\leqq i\leqq q,\ 1\leqq j\leqq q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=0 \qquad (i\neq j,\ |i-j|\neq d,\ 1\leqq i\leqq q,\ 1\leqq j\leqq q).$$

Mit der Hilfe dieses Lemmas kann der dem Hilfssatz II entsprechende folgende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz II'. *Es sei $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und es sei*

$$1\leqq c\leqq \frac{1}{4}p. \tag{2.2}$$

Es existiert eine von c und p unabhängige Zahl β, so daß im Intervall $[-1,\beta]$ ein (von c und p abhängiges) orthonormiertes System von den Treppenfunktionen $\{g_l(c,p;x)\}$ $(l=1,\dots,p^2)$ angegeben werden kann, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

es gibt eine von c und p unabhängige positive Zahl M, so daß

$$(2.3) \qquad |g_l(c,p;x)| < M \quad (-1 \leqq x \leqq 2;\ l = 1,\dots,p^2)$$

ist, es existiert ferner für jeden Punkt $x \in \left[\frac{1}{2c}, \frac{1}{c}\right)$ *eine von x abhängige natürliche Zahl* $m(x)\ (<p^2)$, *so daß die Funktionswerte* $g_1(c,p;x),\dots,g_{m(x)}(c,p;x)$ *positiv sind und*

$$(2.4) \qquad \sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c,p;x) > C\sqrt{c}\,p\log p$$

gilt, wo C eine von c, p und x unabhängige positive Zahl ist.

Für $c=1$ wurde dieser Hilfssatz im wesentlichen von D. Menchoff ([2], S. 110) bewiesen.

B e w e i s v o n H i l f s s a t z II'. Es sei für $l=1,\dots,p^2$

$$\omega_l(c,p;x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{c}p}{cp^2x - l - \sqrt{c}p} & \text{für} \quad -\infty < x < \dfrac{l}{cp^2}, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{c}p}{cp^2x - l + \sqrt{c}p} & \text{für} \quad \dfrac{l}{cp^2} \leqq x < \infty. \end{cases}$$

Offenbar ist

$$\omega_l(c,p;x) > 0 \quad \text{für} \quad \frac{l}{cp^2} \leqq x$$

und

$$(2.5) \qquad |\omega_l(c,p;x)| \leqq 1 \qquad (-\infty < x < \infty),$$

ferner kann gezeigt werden, daß

$$(2.6) \qquad \left|\int_{-1}^{2} \omega_i(c,p;x)\,\omega_j(c,p;x)\,dx\right| < \frac{1}{\log e}\,\frac{4\sqrt{c}p}{d(d+2\sqrt{c}p)}\log\frac{d+\sqrt{c}p}{\sqrt{c}p} + \frac{2}{p^2}$$

ist. (Siehe D. Menchoff [2], S. 111.)

Es sei $x \in \left[\frac{1}{2c}, \frac{1}{c}\right)$. Dann gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$, $\frac{p^2}{2} \leqq m(x) < p^2$, so daß

$$x \in \left[\frac{m(x)}{cp^2}, \frac{m(x)+1}{cp^2}\right)$$

ist, und nach (2.2)

$$\sum_{l=1}^{m(x)} \omega_l(c,p;x) = \sqrt{cp}\sum_{l=1}^{m(x)} \frac{1}{cp^2x-l+\sqrt{cp}} \leqq \sqrt{cp}\sum_{l=1}^{m(x)} \frac{1}{m(x)-l+\sqrt{cp}+1} =$$

(2.7)

$$= \sqrt{cp}\sum_{k=1}^{m(x)} \frac{1}{k+\sqrt{cp}} > \sqrt{cp}\int_0^{p^2/2} \frac{dx}{x+\sqrt{cp}} > \frac{1}{2}\sqrt{cp}\log p$$

besteht.

Da jede Funktion $\omega_l(c,p;x)$ mit der Ausnahme eines einzigen Punktes, wo sie eine Unstetigkeit von erster Art hat, im Intervall $[-1,2]$ überall stetig ist, so gibt es in $[-1,2]$ Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ $(l=1,\dots,p^2)$, die die folgenden Bedingungen erfüllen: $\bar{g}_l(c,p;x)$ ist eine Treppenfunktion, für $\frac{l}{cp^2} \leqq x \leqq 2$ ist

$$\bar{g}_l(c,p;x) > 0,$$

und es gilt im Intervall $[-1,2]$ überall

$$|\bar{g}_l(c,p;x) - \omega_l(c,p;x)| < \frac{1}{p^2}\min\left(1, \frac{1}{4}\sqrt{cp}\log p\right).$$

Auf Grund von (2.5) ist

(2.8) $$|\bar{g}_l(c,p;x)| < 2 \qquad (-1 \leqq x \leqq 2;\ l=1,\dots,p^2)$$

und nach (2.7) kann zu jedem Punkt $x \in \left[\frac{1}{2c}, \frac{1}{c}\right)$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(<p^2)$ derart angegeben werden, daß die Funktionswerte $\bar{g}_1(c,p;x),\dots,\bar{g}_{m(x)}(c,p;x)$ positiv sind und

(2.9) $$\sum_{l=1}^{m(x)} \bar{g}_l(c,p;x) > \frac{1}{4}\sqrt{cp}\log p$$

gilt. Endlich erhalten wir auf Grund von (2.6)

(2.10) $$|\alpha_{i,j}(c,p)| < \gamma_d(c,p) \qquad (|i-j|=d;\ 1 \leqq i \leqq p^2;\ 1 \leqq j \leqq p^2;\ d=1,\dots,p^2-1),$$

wo

$$\alpha_{i,j}(c,p) = \int_{-1}^{2} \bar{g}_i(c,p;x)\bar{g}_j(c,p;x)dx,$$

$$\gamma_d(c,p) = \frac{1}{\log e}\,\frac{4\sqrt{cp}}{d(d+2\sqrt{cp})}\log\frac{d+\sqrt{cp}}{\sqrt{cp}} + \frac{9}{p^2}$$

sind.

Es sei

$$u_0(c,p) = 2, \quad u_d(c,p) = 2\left(1+\sum_{n=1}^{d}\gamma_n(c,p)\right) \qquad (d=1,\dots,p^2-1).$$

Dann ist

$$u_d(c,p)-u_{d-1}(c,p)>2\gamma_d(c,p) \qquad (d=1,\dots,p^2-1), \tag{2.11}$$

ferner kann nach den obigen gezeigt werden, daß

$$u_{p^2-1}(c,p)<20+8\sqrt{c}\,p\int_0^\infty \frac{1}{y(y+2\sqrt{c}\,p)}\log\frac{y+\sqrt{c}\,p}{\sqrt{c}\,p}\,dy=$$

$$=20+8\int_0^\infty \frac{\log(1+t)}{t(t+2)}\,dt=\beta$$

gilt, wo β offenbar eine von c und p unabhängige Zahl ist, $\beta>2$. (Siehe D. MENCHOFF [2], S. 113.)

Der übrige Teil des Beweises ist identisch mit dem Beweis des entsprechenden Menchoffschen Hilfssatzes (siehe D. MENCHOFF [2], S. 114—115). Der Vollständigkeit halber sei aber auch dieser Schluß in Einzelheiten ausgeführt.

Es sei $1\leqq d\leqq p^2-1$. Nach (2.10) und (2.11) wird die Bedingung (2.1) für die Zahlen $a_{i,j}(c,p)$ ($|i-j|=d$, $1\leqq i\leqq p^2$, $1\leqq j\leqq p^2$) und für das Intervall $(u_{d-1}(c,p), (u_d(c,p)]$ erfüllt. So kann man mit Anwendung des Lemmas von D. MENCHOFF die Definition der Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ ($l=1,\dots,p^2$) auf das Intervall $(2, u_{p^2-1}(c,p)]$ erweitern, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\bar{g}_l(c,p;x)$ ist eine Treppenfunktion, ferner ist

$$|\bar{g}_l(c,p;x)|=1, \tag{2.12}$$

$$\int_{u_{d-1}(c,p)}^{u_d(c,p)} \bar{g}_i(c,p;x)\bar{g}_j(c,p;x)\,dx=-a_{i,j}(c,p)$$

$$(|i-j|=d;\ 1\leqq i\leqq p^2;\ 1\leqq j\leqq p^2;\ d=1,\dots,p^2-1)$$

und

$$\int_{u_{d-1}(c,p)}^{u_d(c,p)} \bar{g}_i(c,p;x)\,\bar{g}_j(c,p;x)\,dx=0$$

$$(i\neq j;\ |i-j|\neq d;\ 1\leqq i\leqq p^2;\ 1\leqq j\leqq p^2;\ d=1,\dots,p^2-1).$$

Schließlich im Intervall $(u_{p^2-1}(c,p), \beta]$ werden die Funktionen $\bar{g}_l(c,p;x)$ ($l=1,\dots,p^2$) wie folgt definiert. Es sei

$$\bar{g}_l(c,p;x)=(-1)^s \tag{2.13}$$

$$(z_{s-1}(c,p;l)<x\leqq z_s(c,p;l);\ s=1,\dots,2^l;\ l=1,\dots,p^2),$$

wo

$$z_s(c,p;l)=u_{p^2-1}(c,p)+\frac{s}{2^l}(\beta-u_{p^2-1}(c,p))$$

ist.

Nach dem obigen ist es klar, daß die so im Intervall $[-1, \beta]$ definierten Funktionen $\bar{g}_l(c, p; x)$ Treppenfunktionen sind, zueinander orthogonal sind und für sie (2.9) erfüllt wird. Ferner gilt nach (2.8), (2.12) und (2.13)

(2.14) $$|\bar{g}_l(c, p; x)| < 2 \qquad (-1 \leqq x \leqq \beta;\ 1 \leqq l \leqq p^2).$$

Es sei gesetzt

$$g_l(c, p; x) = \left\{ \int_{-1}^{\beta} \bar{g}_l^2(c, p; x)\, dx \right\}^{-1/2} \bar{g}_l(c, p; x) \qquad (l = 1, \ldots, p^2).$$

Da nach (2.8), (2.12) und (2.13)

$$0 < \beta - 2 < \int_{-1}^{\beta} \bar{g}_l^2(c, p; x)\, dx < 4(\beta + 1)$$

ist, so folgt für die Funktionen $g_l(c, p; x)$ die Ungleichung (2.3) aus (2.14) und die Ungleichung (2.4) aus (2.9).

Damit ist der Hilfssatz II′ bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$g_l(c, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{\beta + 1}\, g_l\left(c, p; -1 + (\beta + 1)\dfrac{x - u}{v - u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, p^2)$, und sei

$$G(c, I) = \left[\frac{v - u}{\beta + 1}\left(\frac{1}{2c} + 1\right) + u,\ \frac{v - u}{\beta + 1}\left(\frac{1}{c} + 1\right) + u\right).$$

Es ist klar, daß

(2.15) $$\int_I g_i(c, p, I; x) g_j(c, p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Aus (2.3) folgt ferner die Ungleichung

(2.16) $$|g_l(c, p, I; x)| < \sqrt{\beta + 1}\, M \qquad (u \leqq x \leqq v).$$

Endlich ist

(2.17) $$\mu(G(c, I)) = \frac{\mu(I)}{2(\beta + 1)} \frac{1}{c}$$

und für $x \in G(c, I)$ gibt es nach (2.4) eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)\ (< p^2)$, derart, daß die Funktionswerte $g_1(c, p, I; x), \ldots, g_{m(x)}(c, p, I; x)$ alle positiv sind und

(2.18) $$\sum_{l=1}^{m(x)} g_l(c, p, I; x) > \sqrt{\beta + 1}\, C \sqrt{c}\, p \log p$$

gilt.

Mit Anwendung des Hilfssatzes II′ kann das Entsprechende des Hilfssatzes III bewiesen werden.

Hilfssatz III'. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtzunehmende Zahlenfolge, die die Bedingung* (1. 1) *erfüllt. Es kann dann eine Indexfolge* $(3 \leqq)\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$ *und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: die Funktionen $\Phi_n(x)$ sind gleichmäßig beschränkt:*

(2. 19) $$|\Phi_n(x)| < M' \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad n = 0, 1, \ldots);$$

zu fast allen Punkten x des Intervalls $[a, b]$ gibt es für unendlich viele Indizes m eine von x und m abhängige natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 4^{\mu_{m+1}} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

(2. 20) $$|\Phi_{N_m}(x) + \cdots + \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)| > D \frac{1}{a_{N_{m+1}}}$$

ist, wobei $N_0 = 0$, $N_m = 4^{\mu_1} + \cdots + 4^{\mu_m}$ $(m \geqq 1)$ bedeutet und D eine von m und x unabhängige positive Zahl ist.

Beweis von Hilfssatz III'. Da die Folge $\{a_n\}$ positiv und monoton nichtzunehmend ist und die Bedingung (1. 1) erfüllt, kann mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode gezeigt werden, daß

(2. 21) $$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{n+1} a^2_{4^{n+1}} \log^2 4^{n+1} = \infty$$

ist. Es seien $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \cdots$ diejenigen Indizes $n (\geqq 3)$, für die

(2. 22) $$4^{n+1} a^2_{4^{n+1}} \log^2 4^{n+1} \geqq 2^{3-n}$$

ist. Da die auf die übrigen Indizes erstreckte Teilsumme der Reihe (2. 21) offenbar endlich ist, so folgt aus (2. 21):

(2. 23) $$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1} = \infty.$$

Es sei

$$c_m = \left(4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1}\right)^{-1} + 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Da $\mu_m \geqq 3$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gilt, so ist auf Grund von (2. 22)

(2. 24) $$1 \leqq c_m \leqq 2^{\mu_m - 2} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{c_m} \geqq \frac{1}{2} \min \{1, 4^{\mu_m+1} a^2_{4^{\mu_m+1}} \log^2 4^{\mu_m+1}\} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

und so ergibt sich nach (2. 23), daß

(2. 25) $$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c_m} = \infty$$

gilt. Es soll noch bemerkt werden, daß

(2. 26) $N_m = 4^{\mu_1} + \cdots + 4^{\mu_m} < 4^{\mu_m} + 4^{\mu_m - 1} + \cdots + 4^{\mu_m - m} < 4^{\mu_m + 1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$

ist.

Mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode werden wir nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes und gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $G_m \subseteqq [a, b]$ konstruieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a′) zu jedem $x \in G_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 4^{\mu_m + 1} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_m}(x), \ldots, \Phi_{N_m + n_m(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und (2. 20) erfüllt wird;

b′) die Mengen G_m $(m = 0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(G_m) = \frac{b-a}{2(\beta+1)} \frac{1}{c_{m+1}}. \tag{2. 27}$$

Die Konstruktion werden wir mit vollständiger Induktion folgenderweise durchführen.

Nach (2. 24) wird die Bedingung (2. 2) für die Zahlen $c_1, p_1 = 2^{\mu_1}$ erfüllt und daher kann der Hilfssatz II′ angewendet werden. Es sei

$$\Phi_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} g_l(c_1, p_1, [a, b]; x) \qquad (l = 1, \ldots, 4^{\mu_1})$$

und $G_0 = G(c_1, [a, b])$. Nach dem Hilfssatz II′ sind diese Funktionen Treppenfunktionen, die nach (2. 15) ein in $[a, b]$ orthonormiertes System bilden und für die infolge (2. 16) die Ungleichung (2. 19) mit $M' = \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} M$ besteht. Nach (2. 17) besteht (2. 27) für $m = 0$ und für $x \in G_0$ existiert es nach (2. 18) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_0(x)$ $(< 4^{\mu_1} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{n_0(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

$$|\Phi_0(x) + \cdots + \Phi_{n_0(x)}(x)| > \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C \{(4^{\mu_1+1} a^2_{4^{\mu_1+1}} \log^2 4^{\mu_1+1})^{-1} + 1\}^{1/2} 2^{\mu_1} \mu_1 >$$

$$> \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C (2^{\mu_1+1} a_{4^{\mu_1+1}} \log 4^{\mu_1+1})^{-1} 2^{\mu_1} \mu_1$$

gilt, woraus sich auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (2. 26) ergibt, daß (2. 20) für $m = 0$ mit $D = \frac{1}{8} \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{-1} C$ besteht. Also wird die Bedingung a′) für $m = 0$ erfüllt.

Es sei nun k $(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_k - 1)$ und die Mengen G_m $(m = 0, \ldots, k-1)$

schon definiert wurden: die $\Phi_n(x)$ sind Treppenfunktionen, bilden im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System und die Bedingung (2. 19) ist erfüllt, ferner sind die Bedingungen a′), b′) erfüllt, insbesondere sind die Mengen $G_0, \ldots, G_{k-1}$ stochastisch unabhängig.

Man kann das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ zerlegen, so daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_k - 1)$ konstant sind. Bezeichnen wir mit I_ϱ' bzw. mit I_ϱ'' die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Auf Grund von (2. 24) wird die Bedingung (2. 2) für die Zahlen c_{k+1}, $p_{k+1} = 2^{\mu_{k+1}}$ erfüllt und so kann der Hilfssatz II′ angewendet werden. Es sei gesetzt:

$$\Phi_{N_k+l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho'; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho''; x) \right\}$$

$(l = 1, \ldots, 4^{\mu_{k+1}})$ und

$$G_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \left(G(c_{k+1}, I_\varrho') \cup G(c_{k+1}, I_\varrho'') \right).$$

Nach dem Hilfssatz II′ sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Mit Anwendung von (2. 15) kann mit der bei dem Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode gezeigt werden, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_{k+1} - 1)$ ein orthonormiertes System bilden und nach (2. 16) besteht für die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = N_k, \ldots, N_{k+1} - 1)$ die Ungleichung (2. 19) mit dem gleichen M'. Nach (2. 17) kann leicht eingesehen werden, daß (2. 27) auch für $m = k$ besteht. Für $x \in G_k$ existiert nach (2. 18) eine von x abhängige natürliche Zahl $n_k(x)$ $(< 4^{\mu_{k+1}} - 1)$, so daß die Funktionswerte $\Phi_{N_k}(x), \ldots$ $\ldots, \Phi_{N_k + n_k(x)}(x)$ gleiches Vorzeichen haben und

$$|\Phi_{N_k}(x) + \cdots + \Phi_{N_k+n_k(x)}(x)| >$$
$$> \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C \left\{ \left(4^{\mu_{k+1}+1} a^2_{4^{\mu_{k+1}+1}} \log^2 4^{\mu_{k+1}+1}\right)^{-1} + 1 \right\}^{1/2} 2^{\mu_{k+1}} \mu_{k+1} >$$
$$> \left(\frac{\beta+1}{b-a}\right)^{1/2} C \left(2^{\mu_{k+1}+1} a_{4^{\mu_{k+1}+1}} \log 4^{\mu_{k+1}+1}\right)^{-1} 2^{\mu_{k+1}} \mu_{k+1}$$

ist, woraus sich auf Grund der Monotonität der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (2. 26) ergibt, daß (2. 20) auch für $m = k$ besteht, wenn D wie oben gewählt wird. Also wird auch für $m = k$ die Bedingung a′) erfüllt. Endlich ist es klar, daß auch die Mengen $G_0, \ldots, G_k$ stochastisch unabhängig sind.

Damit ist unsere Konstruktion mit vollständiger Induktion erbracht.

Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} G_m$, so besteht (2. 20) für unendlich viele Indizes m. Nach (2. 25) und (2. 27) ist

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu(G_m) = \infty,$$

hieraus und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen G_m mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas folgt, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} G_m) = b-a$ ist.

Damit ist der Hilfssatz III' bewiesen.

Mit der Anwendung des Hilfssatzes III' können dann die Sätze I, II ebenso wie in § 1 bewiesen werden, aber die erhaltenen Funktionensysteme sind jetzt gleichmäßig beschränkt.

§ 3. Partialsummen der quadratisch integrierbaren Entwicklungen.

Um zu zeigen, daß die Abschätzung (6) nicht verbessert werden kann, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz III. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$w(n) = o(\log n)$$

erfüllt. Es kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in $[a, b]$ überall gilt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty. \tag{3.1}$$

Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Beweis von Satz III. Es sei $\{\overline{w}(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$w(n) = o(\overline{w}(n)) \tag{3.2}$$

und

$$\overline{w}(n) = o(\log n) \tag{3.3}$$

erfüllt, z. B. sei

$$\overline{w}(n) = w(n)\left(\frac{\log n}{w(n)}\right)^{\alpha} \quad (n = 2, 3, \ldots, 0 < \alpha < 1).^{10)}$$

Auf Grund von (3.3), mit Anwendung von Hilfssatz I gibt es dann eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{v(n)\}$, für die

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{w}^2(n)}{(n \log^3 n)\, v^2(n)} < \infty$$

---

[10]) Für $n = 0, 1$ setze man z. B. $\overline{w}(0) = \overline{w}(1) = \overline{w}(2)$.

und

$$(3.4)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, v^2(n)} = \infty$$

gelten. Es sei $\bar{a}_n = \left(\sqrt{n \log^3 n}\, v(n)\right)^{-1}$ für $n \geqq 2$ und $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \bar{a}_2$. Dann ist

$$(3.5)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \bar{w}^2(n) < \infty$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Nach Satz I kann ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß die orthogonale Reihe

$$(3.6)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Phi_n(x)$$

in $[a, b]$ überall divergiert; das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Wird die Bezeichnung

$$s_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\nu} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x)$$

eingeführt, so erhalten wir mit einer Abelschen Transformation:

$$\sum_{n=0}^{N} \bar{a}_n \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\bar{w}(n)} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)}\right) s_\nu(x) + \frac{1}{\bar{w}(N)} s_N(x),$$

und so ist

$$(3.7)\qquad \frac{1}{\bar{w}(N)} \sum_{n=0}^{N} \bar{w}(n) \bar{a}_n \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \bar{a}_n \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)}\right) s_n(x).$$

Da die Folge $\{\bar{w}(n)\}$ monoton nichtabnehmend ist, so ergibt sich auf Grund von (3.5), daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)}\right) \int_a^b |s_n(x)|\, dx \leqq$$
$$\leqq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)}\right) \left(\int_a^b s_n^2(x)\, dx\right)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq (b-a)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n^2 \bar{w}^2(n)\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(n)} - \frac{1}{\bar{w}(n+1)}\right) < \infty$$

ist, und so nach dem B. Levischen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\overline{w}(n)}-\frac{1}{\overline{w}(n+1)}\right)s_n(x)$$

fast überall in $[a, b]$.

Da die Reihe (3.6) in $[a, b]$ überall divergiert, divergiert die rechte Seite von (3.7) fast überall und daher ist fast überall

$$\frac{1}{\overline{w}(N)}\sum_{n=0}^{N}\overline{w}(n)\bar{a}_n\,\Phi_n(x)\neq o(1).$$

Daraus ist nach (3.2) klar, daß für die Koeffizientenfolge $a_n=\overline{w}(n)\bar{a}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ und für das oben definierte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ die Relation (3.1) fast überall in $[a, b]$ besteht. Nach (3.5) ist $\{a_n\}\in l^2$.

Wir bezeichnen mit E die Menge der Punkte von $[a, b]$, wo (3.1) nicht besteht ($\mu(E)=0$). Es sei $\Phi_n(x)=1$ $(n=0, 1, \ldots)$ für $x\in E$. Das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ bleibt in $[a, b]$ orthonormiert und gleichmäßig beschränkt, wenn es auch früher gleichmäßig beschränkt war, und für dieses System bleibt (3.1) in den Punkten $x\notin E$ gültig. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\,\Phi_n(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n$$

für $x\in E$. Nach (3.4), auf Grund der Definition der Folge $\{a_n\}$ ergibt sich mit einer einfachen Rechnung, daß

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\log N}\sum_{n=0}^{N}a_n=\infty$$

ist. Hieraus folgt nach (3.2) und (3.3), daß für dieses Funktionensystem (3.1) auch in den Punkten von E erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz III vollständig bewiesen.

§ 4. Über die Rademachersche Abschätzung.

Daß die Rademachersche Abschätzung (8) im allgemeinen nicht verbessert werden kann, wird durch den folgenden Satz gezeigt.

Satz IV. *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

(4.1) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^2 n}{l_n^2}=\infty$$

erfüllt. Es kann im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$

angegeben werden, so daß in $[a, b]$ *überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{l_N} \left| \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x) \right| = \infty \tag{4.2}$$

ist. Dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *kann sogar gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Beweis von Satz IV. Wir zeigen zuerst, daß es eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{l}_n\}$ gibt, für die die Bedingungen

$$l_n = o(\bar{l}_n), \tag{4.3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} \log^2 n = \infty \tag{4.4}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} \log^{1+\varepsilon} n < \infty \qquad (0 < \varepsilon < 1) \tag{4.5}$$

erfüllt sind.

Es sei $l_n^* = \max\{l_n, \log n\}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Offenbar ist

$$l_n \leqq l_n^* \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{4.6}$$

und

$$l_n^* \leqq l_{n+1}^* \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{4.7}$$

Wird die Bezeichnung

$$s_m = \sum_{n=2}^{m} (l_n^*)^{-2} \log^2 n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

eigeführt, so folgt aus (4.1) und aus der Definition der Folge $\{l_n^*\}$, daß

$$s_m < m \qquad (m = 2, 3, \ldots) \tag{4.8}$$

und

$$s_m < s_{m+1} \quad (m = 2, 3, \ldots), \qquad \lim_{m\to\infty} s_m = \infty \tag{4.9}$$

ist.

Es sei $n_0 (\geqq 2)$ die kleinste natürliche Zahl, für die $s_{n_0} > 2$ ist. Es ist klar, daß

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log s_{n-1}} = \infty \tag{4.10}$$

gilt. Diese Summe ist nämlich eine obere Summe des divergenten Integrals

$$\int_{s_{n_0}}^{\infty} \frac{dx}{x \log x},$$

die zu der mit den Teilpunkten $s_{n_0}, s_{n_0+1}, \ldots$ angegebenen Einteilung der Halbgerade $[s_{n_0}, \infty)$ gehört.

Für $0<\varepsilon<1$ ist

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_n \log^{2-\varepsilon} s_n} < \infty, \tag{4.11}$$

da diese Summe die untere Summe des konvergenten Integrals

$$\int_{s_{n_0}}^{\infty} \frac{dx}{x \log^{2-\varepsilon} x}$$

ist, die zu der mit den Teilpunkten $s_{n_0}, s_{n_0+1}, \ldots$ angegebenen Einteilung der Halbgerade $[s_{n_0}, \infty)$ gehört. Auf Grund der Definition der Folge $\{l_n^*\}$ und der Zahl n_0 ist es klar, daß für $n>n_0$ $s_{n-1} > \frac{1}{2} s_n$ ist und so folgt nach (4.11):

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log^{2-\varepsilon} s_{n-1}} < \infty \qquad (0<\varepsilon<1).$$

So erhalten wir auf Grund von (4.8):

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^{1+\varepsilon} n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log s_{n-1}} < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{(l_n^*)^2 s_{n-1} \log^{2-\varepsilon} s_{n-1}} < \infty \qquad (0<\varepsilon<1). \tag{4.12}$$

Es sei nun $\bar{l}_n = l_n^* \sqrt{s_{n-1} \log s_{n-1}}$ für $n>n_0$ und $\bar{l}_n = l_{n_0+1}$ für $0 \leqq n \leqq n_0$. Nach (4.6), (4.7), (4.9) und nach der Definition der Zahl n_0 ist es evident, daß die Zahlenfolge $\{l_n\}$ positiv, monoton nichtabnehmend ist und die Bedingung (4.3) erfüllt; wegen (4.10) und (4.12) werden auch die Bedingungen (4.4) und (4.5) erfüllt. Nach (4.5) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{l}_n^{-2} < \infty$$

und so folgt aus der Monotonität der Folge $\{\bar{l}_n\}$, daß

$$\sqrt{n}\ \bar{l}_n^{-1} = o(1) \tag{4.13}$$

ist.

Da $\{\bar{l}_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist und die Bedingung (4.4) erfüllt, existiert nach Satz I ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{l}_n^{-1} \Phi_n(x) \tag{4.14}$$

in $[a, b]$ überall divergiert.

Wird die Bezeichnung

$$s_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\nu} \Phi_n(x)$$

eingeführt, so ergibt sich mit einer Abelschen Transformation:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{l_n} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) s_n(x) + \frac{1}{l_N} s_N(x)$$

und so gilt

$$\frac{1}{l_N} \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{l_n} \Phi_n(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) s_n(x). \tag{4.15}$$

Mit einer einfachen Rechnung bekommen wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) \int_a^b |s_n(x)|\,dx &\leqq (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) \left(\int_a^b s_n^2(x)\,dx \right)^{1/2} = \\ &= (b-a)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Für jedes s ist

$$\sum_{n=0}^{s} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) = \frac{1}{l_0} + \sum_{n=1}^{s} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \sqrt{s+1}\, \frac{1}{l_{s+1}},$$

woraus sich nach (4.13) ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) = \frac{1}{l_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \tag{4.17}$$

Mit Anwendung der Cauchyschen Ungleichung erhalten wir auf Grund von (4.5):

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{l_n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= O(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log^{1+\varepsilon} n)^{1/2}}{l_n} \frac{1}{(n \log^{1+\varepsilon} n)^{1/2}} \leqq \\ &\leqq O(1) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{1+\varepsilon} n}{l_n^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} \right\}^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, daß die Reihe (4.17) konvergent ist. Auf Grund von (4.16) und dem B. Levischen Satz konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right) s_n(x)$$

fast überall in $[a, b]$. Da die Reihe (4.14) in $[a, b]$ überall divergiert, so divergiert auch die rechte Seite von (4.15) fast überall, und folglich ist fast überall

$$\frac{1}{l_N} \sum_{n=0}^{N} \Phi_n(x) \neq o(1).$$

Daraus folgt nach (4.3), daß (4.2) fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Wir bezeichnen mit E die Menge der Punkte von $[a, b]$, wo (4.2) nicht besteht ($\mu(E)=0$). Es sei $\Phi_n(x)=1$ ($n=0, 1, \ldots$) für $x \in E$. Nach (4.4) ist $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\, N/\bar{l}_N=\infty$ und so besteht (4.2) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ überall in $[a, b]$.

Damit wurde der Satz IV vollständig bewiesen.

§ 5. Über die Größenordnung der orthonormierten Funktionen.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß auch die Abschätzungen (10) und (11) im allgemeinen nicht verbessert werden können. Nämlich gilt der folgende

Satz V. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}=\infty \tag{5.1}$$

erfüllt wird. Dazu kann ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in $[a, b]$ überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{\lambda_N}\,|\Phi_N(x)|=\infty \tag{5.2}$$

ist.

Aus (5.2) folgt, daß auch die Relation

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{\lambda_N^2} \sum_{n=0}^{N} \Phi_n^2(x)=\infty$$

überall in $[a, b]$ besteht.

Der Satz V kann mit einer einfachen Konstruktion leicht bewiesen werden.

Beweis von Satz V. Nach einem bekannten Satz[11]) kann auf Grund von (5.1) eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\lambda_n=o(\bar{\lambda}_n) \tag{5.3}$$

---

[11]) Dieser Satz lautet folgenderweise: *Divergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ($u_n>0$; $n=0,1,\ldots$), *so existiert eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge* $\{t_n\}$, *so daß* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n/t_n=\infty$ *ist.* (Siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya [1], S. 120—121.)

und

(5.4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}_n^{-2} = \infty$$

erfüllt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\bar{\lambda}_0 \geqq \sqrt{b-a}$ ist.

Es sei

$$\alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_m = \sum_{n=1}^{m} \bar{\lambda}_n^{-2} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

und bezeichnen wir mit I_m das Intervall $[\alpha_{m-1}, \alpha_m)$. Dann ist

$$\mu(I_m) = \bar{\lambda}_m^{-2} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Im folgenden werden wir ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ von Treppenfunktionen der Periode $(b-a)$ konstruieren derart, daß die Bedingung

(5.5) $$\Phi_n(x) = \bar{\lambda}_n \quad \text{für} \quad x \in I_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

erfüllt wird.

Es sei

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_0 & \text{für} \quad x \in I_0 + l(b-a)\,^{12)} \qquad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\Phi_0(x)$ eine Treppenfunktion der Periode $(b-a)$, gilt

$$\int_a^b \Phi_0^2(x)\,dx = \bar{\lambda}_0^2 \int_{I_0} dx = 1$$

und für $n = 0$ wird (5.5) erfüllt.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_n(x)$ bereits definiert wurden derart, daß sie Treppenfunktionen der Periode $(b-a)$ sind, in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, und für die Indizes $0, \ldots, n$ (5.5) erfüllt wird. Dann kann eine Einteilung des Intervalls I_{n+1} in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ angegeben werden derart, daß in den einzelnen Teilintervallen die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_n(x)$ konstant sind. Bezeichnen wir mit I'_ϱ, I''_ϱ die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Wir setzen

$$\Phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{n+1} & \text{für} \quad x \in I'_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ -\bar{\lambda}_{n+1} & \text{für} \quad x \in I''_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

[12]) Für $I = [u, v]$ bezeichnet $I + l(b-a)$ das Intervall $[u + l(b-a), v + l(b-a)]$.

Offensichtlich ist $\Phi_{n+1}(x)$ eine Treppenfunktion der Periode $(b-a)$, gilt

$$\int_a^b \Phi_{n+1}^2(x)dx = \bar{\lambda}_{n+1}^2 \int_{I_{n+1}} dx = 1$$

und für $0 \leqq m \leqq n$ ist

$$\int_a^b \Phi_m(x)\,\Phi_{n+1}(x)dx = \int_{I_{n+1}} \Phi_m(x)\,\Phi_{n+1}(x)dx =$$

$$= \bar{\lambda}_{n+1}\left\{\sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I'_\varrho} \Phi_m(x)dx - \sum_{\varrho=1}^{r}\int_{I''_\varrho} \Phi_m(x)dx\right\} = 0.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir also ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches (5.5) erfüllt wird. Für jeden Punkt $x \in [a, b]$ ist wegen der Periodizität und nach der Bedingung (5.4) für unendlich viele Indizes

$$|\Phi_n(x)| = \bar{\lambda}_n,$$

woraus sich auf Grund von (5.3) ergibt, daß (5.2) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz V vollständig bewiesen.

§ 6. Über die Lebesgueschen Funktionen.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß die Abschätzung (13) in der Einleitung nicht wesentlich verbessert werden kann. Es gilt nämlich der

Satz V. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, w^2(n)} = \infty \tag{6.1}$$

erfüllt wird. Es kann ein in dem Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in $[a, b]$ überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = \infty \quad , \qquad \left(\lambda_n = \sqrt{N \log N}\, w(N)\right)$$

gilt.

Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz IV. *Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen. Ist*

$$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq 1,$$

so gilt für jede natürliche Zahl p die Abschätzung

$$\int\limits_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt > \frac{1}{4} p \tag{6.2}$$

die diadisch rationalen Punkte ausgenommen überall, dabei ist $r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi x$ die k-te Rademachersche Funktion ($k = 0, 1, \ldots$).

Beweis von Hifssatz IV. Ist x keine diadisch rationale Zahl, so ist $r_\varkappa(x) r_\varkappa(t)$ als Funktion von t betrachtet im Intervall $\left[\frac{2r}{2^\varkappa}, 2\right]$ streckenweise konstant, undzwar ist sein Wert in Intervallen von der Gesamtlänge $\frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+1}}$ gleich $+1$, und in Intervallen von der gleichen Gesamtlänge gleich -1. Der Wert der Funktion $r_\varkappa(x) r_\varkappa(t) + r_{\varkappa+1}(x) r_{\varkappa+1}(t)$ ergibt sich aus demjenigen der Funktion $r_\varkappa(x) r_\varkappa(t)$ indem man in der ersten Hälfte der einzelnen Konstanzintervalle zu dieser Funktion $+1$ addiert und in der zweiten Hälfte $+1$ subtrahiert. Also nimmt die Funktion $r_\varkappa(x) r_\varkappa(t) + r_{\varkappa+1}(x) r_{\varkappa+1}(t)$ die Werte $+2$, 0, bzw. -2 der Reihe nach in Intervallsystemen von den Gesamtlängen

$$\frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+2}}, \; 2\frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+2}}, \; \frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+2}}$$

an. Mit vollständiger Induktion erhalten wir, daß falls x keine diadisch rationale Zahl ist, die Funktion

$$\sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t)$$

als Funktion von t betrachtet die Werte $p, p-2, \ldots, p-2l, \ldots, -p+2, -p$ in Intervallsystemen von den Gesamtlängen

$$\binom{p}{0} \frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+p}}, \ldots, \binom{p}{l} \frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+p}}, \ldots, \binom{p}{p} \frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^{\varkappa+p}}$$

annimmt. Also ist

$$\int\limits_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt = \frac{2^{\varkappa+1} - 2r}{2^\varkappa} \lambda_p \tag{6.3}$$

mit

$$\lambda_p = \frac{1}{2^{p-1}}\left\{p\binom{p}{0} + (p-2)\binom{p}{1} + \cdots + \left(p-2\left[\frac{p}{2}\right]\right)\binom{p}{\left[\frac{p}{2}\right]}\right\}.$$

Für $p=1, 2$ ist $\lambda_p = 1$ und so ergibt sich (6. 2) aus (6. 3). H. RADEMACHER hat gezeigt, daß

$$\lambda_{2\sigma+1} = \lambda_{2\sigma+2} \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots)$$

und

$$\lambda_{2\sigma+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\sigma+1}{\sqrt{\sigma}} e^{\frac{\vartheta}{24\sigma} - \frac{\vartheta'}{6\sigma}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

gilt, wo ϑ und ϑ' von σ abhängigen Zahlen sind $(0 \leqq \vartheta, \vartheta' \leqq 1)$ (siehe H. RADEMACHER [1], S. 134). Auf Grund von diesen Formeln und (6. 3) erhalten wir, daß (6. 2) auch im Falle $p \geqq 3$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Hilfssatz IV bewiesen.

Hilfssatz V. *Es seien eine beliebige, natürliche Zahl p und eine reelle Zahl c mit*

$$0 < \frac{1}{c} \leqq 1 \tag{6.4}$$

vorgegeben. Dann kann ein im Intervall $[0, 2]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{h_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, p)$ derart angegeben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\int_0^2 h_l(c, p; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p), \tag{6.5}$$

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt < \sqrt{2cp} \qquad (0 \leqq x \leqq 2), \tag{6.6}$$

ferner existiert eine meßbare Teilmenge $H(c)$ von $[0, 2]$ mit

$$\mu(H(c)) > \frac{1}{2c}, \tag{6.7}$$

für deren Punkte x gilt:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2cp}. \tag{6.8}$$

B e w e i s v o n H i l f s s a t z V. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

$$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa} \tag{6.9}$$

erfüllt wird. Es sei für $l = 1, \ldots, p$

$$h_l(c, p; x) = \begin{cases} \theta_1 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für } x \in \left[0, \dfrac{2r}{2^\varkappa}\right], \\ \theta_2 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für } x \in \left(\dfrac{2r}{2^\varkappa}, 2\right], \end{cases}$$

wo

$$\theta_1 = \left(\frac{2^{\varkappa-2}}{r}\right)^{1/2} \tag{6.10}$$

und

$$\theta_2 = \left(4 - \frac{r}{2^{\varkappa-2}}\right)^{-1/2} \tag{6.11}$$

ist.

Aus der Definition ist es klar, daß die Funktionen $h_l(c, p; x)$ Treppenfunktionen sind und ein orthonormiertes System in $[0, 2]$ bilden, ferner (6.5) erfüllt wird.

Nach (6.9) ist

$$\frac{2r}{2^\varkappa} > \frac{1}{2c} \tag{6.12}$$

und nach (6.9) und (6.10)

$$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \sqrt{\frac{c}{2}}. \tag{6.13}$$

Ferner ist nach (6.4), (6.9) und (6.11)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}. \tag{6.14}$$

Da die Funktionen $g_l(c, p; x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ in $[0, 2]$ ein orthonormiertes System bilden, so ergibt sich mit Anwendung der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^p h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right| dt \leqq \sqrt{2} \left\{ \int_0^2 \left(\sum_{l=1}^p h_l(c, p; x) h_l(c, p; t) \right)^2 dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=1}^p h_l^2(c, p; x) \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{2} \max\{\theta_1, \theta_2\} \sqrt{p},$$

und so auf Grund von (6.4), (6.13) und (6.14) erhalten wir (6.6).

Es sei $H(c)$ die Menge, die so entsteht, daß wir aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^\varkappa}\right]$ die diadisch rationalen Punkte weglassen. Dann wird (6. 7) nach (6. 12) erfüllt und für $x \in H(c)$ gilt nach (6. 13) und (6. 14)

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x) h_l(c,p;t) \right| dt \geqq \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x) h_l(c,p;t) \right| dt =$$

$$= \theta_1 \theta_2 \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+l-1}(x) r_{\varkappa+l-1}(t) \right| dt > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^\varkappa}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x) r_k(t) \right| dt.$$

Nach (6. 4) und (6. 9) wird die in dem Hilfssatz IV vorkommende Bedingung erfüllt, und so ergibt sich mit Anwendung des Hilfssatzes IV die Abschätzung (6. 8).

Also erfüllen die Funktionen $h_l(c,p;x)$ $(l=1,\ldots,p)$ alle im Hilfssatz V gestellten Bedingungen. Damit haben wir den Hilfssatz V bewiesen.

Ist $I=[u,v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c,p,I;x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, h_l\left(c,p; 2\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (l=1,\ldots,p)$$

und bezeichnen wir mit $H(c,I)$ das Bild der Menge $H(c)$ bei der Transformation $y = \frac{v-u}{2} x + u$. Auf Grund von (6. 5), (6. 6), (6. 7) und (6. 8) ist es klar, daß

(6. 15) $$\int_I h_l(c,p,I;x)\,dx = 0,$$

(6. 16) $$\int_I h_i(c,p,I;x) h_j(c,p,I;x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für} \quad i = j, \end{cases}$$

(6. 17) $$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p,I;x) h_l(c,p,I;t) \right| dt < \mu(I) \sqrt{2cp} \qquad (u \leqq x \leqq v),$$

(6. 18) $$\mu(H(c,I)) > \frac{\mu(I)}{4c}$$

ist und für $x \in H(c,I)$

(6. 19) $$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p,I;x) h_l(c,p,I;t) \right| dt > \mu(I) \frac{1}{16} \sqrt{2cp}$$

gilt.

Beweis von Satz VI. Nach (6. 1) ergibt sich, mit Anwendung des in der Fußnote[11]) erwähnten Satzes daß eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\overline{w}(n)\}$ existiert, die die Bedingungen

$$w(n)=o(\overline{w}(n)), \tag{6.20}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}=\infty \tag{6.21}$$

erfüllt.

Es sei n_1 die kleinste natürliche Zahl, für die

$$(n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})\geqq 1$$

ist. Ferner sei d eine natürliche Zahl mit

$$2\log 64\leqq d \tag{6.22}$$

und man setze

$$n_m=n_1+d(m-1)\qquad (m=1,2,\ldots).$$

Offensichtlich ist wegen der Monotonität von $\overline{w}(n)$

$$(n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\geqq 1\qquad (m=1,2,\ldots), \tag{6.23}$$

ferner ist

$$N_m=2^{n_m}+2^{n_{m-1}}+\cdots+2^{n_1}=2^{n_m}+2^{n_m-d}+\cdots+2^{n_m-(m-1)d}<2^{n_m+1} \tag{6.24}$$

$(m=1,2,\ldots)$ und wegen $n_k=n_m-d(m-k)$

$$\sum_{k=1}^{m-1}2^{n_k/2}=2^{n_m/2}\sum_{k=1}^{m-1}2^{-d(m-k)/2}=2^{n_m/2}\sum_{l=1}^{m-1}(2^{-d/2})^l<$$

$$<2^{n_m/2}\,2^{-d/2}\sum_{l=0}^{\infty}(2^{-d/2})^l<2^{n_m/2}\cdot 2^{-d/2}\cdot 2;$$

hieraus ergibt sich nach (6.22) die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{m-1}2^{n_k/2}<\frac{1}{32}2^{n_m/2}\qquad (m=2,3,\ldots). \tag{6.25}$$

Da für jedes s

$$\sum_{n=2^{n_1}}^{2^{n_s}-1}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}=\sum_{m=1}^{s-1}\sum_{n=2^{n_m}}^{2^{n_{m+1}}-1}\frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)}\leqq\sum_{m=1}^{s-1}\frac{1}{n_m\overline{w}^2(2^{n_m})}\sum_{n=2^{n_m}}^{2^{n_{m+1}}-1}\frac{1}{n}$$

ist, so folgt aus (6.21);

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})}=\infty. \tag{6.26}$$

Im folgenden wird mit Anwendung des Hilfssatzes V ein von der Folge $\{\overline{w}(n)\}$ (und so auch von der Folge $\{w(n)\}$) abhängiges, im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes System der Treppenfunktionen $\{\varrho_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und eine

Folge $\{H_m\}$ $(m=1,2,\ldots)$ von meßbaren Teilmengen von $[a,b]$ definiert, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$\bar{a}$) für jeden Index $m(\geqq 1)$ gilt die Ungleichung

$$(6.27)\qquad \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt < \sqrt{2^{n_m+1}(n_m+1)\overline{w}(2^{n_m+1})} \qquad (a \leqq x \leqq b;\ N_0=0);$$

$\bar{b}$) für $x \in H_m$ besteht die Ungleichung

$$(6.28)\qquad \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2^{n_m+1}(n_m+1)\overline{w}(2^{n_m+1})};$$

$\bar{c}$) die Mengen H_m $(m=1,2,\ldots)$ sind stochastisch unabhängig und gilt

$$(6.29)\qquad \mu(H_m) > \frac{b-a}{4}\left((n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1}.$$

Nach (6.23) erfüllt die Zahl $c_1=(n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})$ die Bedingung (6.4), so daß für die Zahlen c_1 und $p_1=2^{n_1}$ der Hilfssatz V angewendet werden kann. Es sei

$$\varrho_{l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}h_l(c_1,p_1,[a,b];x) \qquad (l=1,\ldots,2^{n_1})$$

und $H_1=H(c_1,[a,b])$. Nach dem Hilfssatz V sind die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_1-1)$ Treppenfunktionen und bilden nach (6.16) ein orthonormiertes System im Intervall $[a,b]$, ferner nach (6.17), (6.18) und (6.19) werden die Ungleichungen (6.27), (6.28) und (6.29) für $m=1$ erfüllt.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl >1. Wir nehmen an, daß in $[a,b]$ die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{k-1}-1)$ und die meßbaren Mengen $H_1,\ldots,H_{k-1}$ bereits so definiert wurden, daß die $\varrho_n(x)$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen $\bar{a})$—$\bar{c})$ für die Indizes $m=1,\ldots,k-1$ erfüllt sind, insbesondere sind also die Mengen $H_1,\ldots,H_{k-1}$ stochastisch unabhängig.

Es gibt eine Einteilung des Grundintervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\ldots,r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(n=0,\ldots,N_{k-1}-1)$ konstant ist. Nach (6.23) wird für die Zahl $c_k=(n_k+1)\overline{w}^2(2^{n_k+1})$ die Bedingung (6.4) erfüllt und so kann für die Zahlen $c_k, p_k=2^{n_k}$ der Hilfssatz V angewendet werden. Es sei gesetzt:

$$\varrho_{N_{k-1}+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_k,p_k,I_\varrho;x) \qquad (l=1,\ldots,2^{n_k})$$

und

$$H_k=\bigcup_{\varrho=1}^{r} H(c_k,I_\varrho).$$

Nach dem Hilfssatz V sind auch die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(N_{k-1} \leqq n < N_k)$ Treppenfunktionen.

Es seien n und l beliebige Indizes, $0 \leqq n \leqq N_{k-1}-1$, $0 \leqq l \leqq 2^{n_k}$. Bezeichnen wir mit $c_\varrho(n)$ den im Intervall I_ϱ angenommenen Wert der Funktion $\varrho_n(x)$ $(\varrho=1,\dots,r)$. So ist nach (6. 15)

$$\int_a^b \varrho_n(x)\varrho_{N_{k-1}+l-1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^r c_\varrho(n)\int_{I_\varrho} h_l(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,dx = 0. \tag{6.30}$$

Es sei $1 \leqq i \leqq 2^{n_k}$, $1 \leqq j \leqq 2^{n_k}$. Nach (6. 16) ist

$$\int_a^b \varrho_{N_{k-1}+i-1}(x)\varrho_{N_{k-1}+j-1}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^r \int_{I_\varrho} h_i(c_k, p_k, I_\varrho; x)\, h_j(c_k, p_k, I_\varrho; x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\sum_{\varrho=1}^r \mu(I_\varrho) = 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Daraus folgt nach (6.30) daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\dots,N_k-1)$ in $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden.

Für $x \in [a,b]$ ist

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^r \int_{I_\varrho} \left| \sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l(c_k, p_k, I_\varrho; x)\, h_l(c_k, p_k, I_\varrho; t) \right| dt,$$

woraus sich nach (6. 17) ergibt, daß (6. 27) auch für $m=k$ erfüllt wird.

Es sei endlich $x \in H_k$. Dann existiert ein Index $\bar\varrho$ $(1 \leqq \bar\varrho \leqq r)$, so daß $x \in H(c_k, I_{\bar\varrho})$ gilt. Es sei $I_\varrho = [u_\varrho, v_\varrho]$ $(\varrho=1,\dots,r)$. Dann erhalten wir mittels der Integraltransformationen

$$y = \frac{2}{v_\varrho - u_\varrho}(t-u_\varrho) \qquad (\varrho=1,\dots,r),$$

daß

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^r \int_{I_\varrho} \left| \sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l(c_k, p_k, I_{\bar\varrho}; x)\, h_l(c_k, p_k, I_\varrho; t) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{\varrho=1}^r \mu(I_\varrho)\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{2^{n_k}} h_l\left(c_k, p_k; \frac{2}{v_{\bar\varrho}-u_{\bar\varrho}}(x-u_{\bar\varrho})\right) h_l(c_k, p_k; y) \right| dy$$

ist. Da

$$\frac{2}{v_{\bar\varrho}-u_{\bar\varrho}}(x-u_{\bar\varrho}) \in H(c_k)$$

ist, so folgt nach (6.8), daß die Ungleichung (6.28) auch für $m=k$ erfüllt wird. Aus der Konstruktion folgt, daß die Mengen $H_1, \dots, H_k$ stochastisch unabhängig sind.

Nach (6.18), ist es klar, daß auch die Ungleichung (6.29) für $m=k$ besteht.

Somit haben wir durch vollständige Induktion ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ und eine Folge von meßbaren Mengen $\{H_m\}$ konstruiert, so daß die Bedingungen $\bar{a})$—$\bar{c})$ erfüllt sind.

Aus den Bedingungen $\bar{a})$ und $\bar{b})$ und aus der Ungleichung (6.25) folgt für $x \in H_m$ $(m \geqq 2)$

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt - \sum_{k=0}^{m-2} \int_a^b \left| \sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt >$$

$$> \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{16} \sqrt{2^{n_m}(n_m+1)}\, \overline{w}(2^{n_m+1}) - \sum_{k=1}^{m-1} \sqrt{2^{n_k}(n_k+1)}\, \overline{w}(2^{n_k+1}) \right\} \geqq$$

$$\geqq \sqrt{2}\sqrt{n_m+1}\, \overline{w}(2^{n_m+1}) \left\{ \frac{1}{16} 2^{n_m/2} - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} \right\} > \frac{\sqrt{2}}{32} \sqrt{2^{n_m}(n_m+1)}\, \overline{w}(2^{n_m+1}).$$

Daraus erhalten wir auf Grund von (6.24), daß für $x \in H_m$ $(m \geqq 1)$

$$\int_a^b \left| \sum_{n=0}^{N_m-1} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{32} \sqrt{N_m \log N_m}\, \overline{w}(N_m) \tag{9.31}$$

ist.

Es sei nun $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} H_m$. Dann wird (6.31) für unendlich viele Indizes m erfüllt. Nach (6.26), (6.29) und der Bedingung $\bar{c})$ erhalten wir mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} H_m) = b-a$ ist. So ergibt sich auf Grund von (6.20), daß für das so definierte Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ die in der Behauptung des Satzes VI vorkommende Relation fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Wir bezeichnen mit H die Teilmenge vom Maße Null des Intervalls $[a, b]$, wo diese Relation nicht erfüllt wird. Wir verändern die Funktionen $\{\varrho_n(x)\}$ in der Menge H wie folgt: für $x \in H$ sei

$$\varrho_n(x) = \sqrt{\frac{2c_m}{b-a}} \qquad (N_{m-1} \leqq n < N_m \quad m = 1, 2, \dots).$$

Nach dem obigen ist es klar, daß das so abgeänderte Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ orthonormiert bleibt und die in der Behauptung des Satzes VI vorkommende Relation überall in $[a, b]$ erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz VI vollständig bewiesen.

Es bleibt offen, ob die im Satz VI vorkommende spezielle Folge $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ mit einer beliebigen, positiven, monoton, nichtabnehmenden Folge $\{\lambda_n\}$ ersetzt werden kann, für die die Bedingung (5.1) erfüllt wird.

§ 7. Cesàrosche Mittel der quadratisch integrierbaren Entwicklungen.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. In diesem Paragraphen wird die n-te Teilsumme, bzw. die n-te (C, α)-Mittel $(\alpha > 0)$ der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

mit $s_n(x)$, bzw. mit $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sigma_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \varphi_\nu(x) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

mit

$$A_m^{(\alpha)} = \binom{m+\alpha}{m} \qquad (\alpha \neq -1, -2, \ldots).$$

Offenbar ist $\sigma_n^{(0)}(x) = s_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die $(C, 1)$-Mittel mit $\sigma_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Es ist bekannt, daß

$$c_1(\alpha) \leqq \frac{A_m^{(\alpha)}}{m^\alpha} \leqq c_2(\alpha) \qquad (m > 0,\ \alpha > -1) \tag{7.1}$$

gilt, wo $c_1(\alpha)$ und $c_2(\alpha)$ nur von α abhängige positive Zahlen sind, ferner gelten die Relationen

$$A_m^{(\alpha)} > 0 \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > -1), \tag{7.2}$$

$$A_{m+1}^{(\alpha)} > A_m^{(\alpha)} \qquad (m \geqq 0,\ \alpha > 0), \tag{7.3}$$

$$A_m^{(\alpha+\beta+1)} = \sum_{\nu=0}^{m} A_{m-\nu}^{(\alpha)} A_\nu^{(\beta)}, \tag{7.4}$$

$$\sigma_n^{(\alpha+h)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha+h)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(h-1)} A_\nu^{(\alpha)} \sigma_\nu^{(\alpha)}(x) \tag{7.5}$$

(siehe z. B. A. Zygmund [1], S. 42).

Zuerst werden wir die in der Einleitung erwähnte Abschätzung für die $(C, \alpha > 0)$-Mittel der quadratisch integrierbaren Entwicklungen beweisen.

Satz VII. *Ist* $\{a_n\} \in l^2$, *so ist für jedes* $\alpha > 0$

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\log \log N) \tag{7.6}$$

fast überall in $[a, b]$.

Um den Satz VII zu beweisen werden einige Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz VI. *Es sei* $\{\mu(n)\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß die Abschätzung*

$$\sigma_N(x) = O(\mu(N))$$

für jede Folge $\{a_n\} \in l^2$ *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gültig ist. Dann ist auch die Abschätzung*

$$\sigma_N(x) = o(\mu(N))$$

für jede Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gültig.*

Beweis von Hilfssatz VI. Es sei $\{a_n\} \in l^2$ eine beliebig gegebene Koeffizientenfolge. Man kann eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ derart angeben, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^2 a_\nu^2 < \infty \tag{7.7}$$

ist, man setze z. B.

$$\lambda_\nu = \left\{ \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^2 \right\}^{-1/4} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist nämlich die Reihe (7. 7) die untere Summe des konvergenten Integrals

$$\int_0^S \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \left(S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right),$$

die zu der mit den Teilpunkten $0, \ldots, S-(a_0^2+a_1^2)$, $S-a_0^2$, S angegebenen Einteilung des Intervalls $[0, S]$ gehört.

Die n-te Teilsumme, bzw. die n-te $(C, 1)$-Mittel der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x)$$

werden wir mit $s_n^*(x)$, bzw. mit $\sigma_n^*(x)$ bezeichnen:

$$s_n^*(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x), \qquad \sigma_n^*(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \lambda_\nu a_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Mit einer doppelten Abelschen Transformation ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right) s_n^*(x) + \\ &+ \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_{n+2}}\right) (n+1)\, \sigma_n^*(x) + \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sigma_N^*(x). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Auf Grund von (7. 3) und (7. 7) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\int_a^b |s_n^*(x)|\,dx \leqq (b-a)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\int_a^b (s_n^*(x))^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu^2 a_\nu^2\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_0}<\infty$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)\int_a^b |\sigma_n^*(x)|\,dx \leqq (b-a)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)\left(\int_a^b (\sigma_n^*(x))^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu^2 a_\nu^2\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_1}<\infty.$$

Aus den obigen erhalten wir mit der Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)s_n^*(x),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)|\sigma_n^*(x)|$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergieren.

Da eine konvergente Reihe immer $(C, 1)$-summierbar ist, ist in $[a, b]$ fast überall

$$\sum_{n=0}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)s_n^*(x)=O(1). \tag{7.9}$$

Ferner ist

$$\left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)(n+1)\sigma_n^*(x)\right| \leqq \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)|\sigma_n^*(x)|$$

und so ist in $[a, b]$ fast überall

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}-\frac{1}{\lambda_{n+2}}\right)(n+1)\sigma_n^*(x)=O(1). \tag{7.10}$$

Nach (7. 7) folgt gemäß unserer Annahme, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^*(x)=O(\mu(N))$$

ist. Daraus ergibt sich die Behauptung auf Grund von (7. 8), (7. 9) und (7. 10).

Damit haben wir den Hilfssatz VI bewiesen.

Hilfssatz VII. *Ist* $\{a_n\}\in l^2$, *so besteht für jedes* $r>\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2=o(1)$$

fast überall in $[a, b]$.

Dieser Hilfssatz ist bekannt (siehe A. Zygmund [2], S. 359).

Hilfssatz VIII. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Wir nehmen an, daß $\{a_n\} \in l^2$ ist und*

$$\sigma_N(x) = o(\mu(N))$$

fast überall in $[a, b]$ gilt. Dann ist

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) = o(\mu^2(N))$$

fast überall in $[a, b]$.

Beweis von Hilfssatz VIII. Ist $\{a_n\} \in l^2$, so ist nach dem Hilfssatz VII

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(s_n(x)-\sigma_n(x))^2 = o(1)$$

fast überall in $[a, b]$. Mit Anwendung der Ungleichung

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) \leqq \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(s_n(x)-\sigma_n(x))^2 + \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sigma_n^2(x)$$

ergibt sich daraus die Behauptung.

Auf die Cesàroschen Mittel $\sigma_n^{(r)}$ beliebiger numerischer Reihen bezieht sich der

Hilfssatz IX. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Ist für ein $r > -1/2$*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(\sigma_n^{(r)})^2 = o(\mu^2(N)),$$

so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sigma_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} = o(\mu(N)).$$

Diesen Hilfssatz hat A. Zygmund mit $o(1)$ statt $o(\mu(N))$ bewiesen. (Siehe A. Zygmund [2], S. 360—361.)

Beweis von Hilfssatz IX. Auf Grund von (7. 1), (7. 2), (7. 4) und (7. 5) ist

$$\left|\sigma_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}\right| = \frac{1}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left|\sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} A_n^{(r)}\sigma_n^{(r)}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left(\sum_{n=0}^{N}(\sigma_n^{(r)})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(A_{N-n}^{\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} A_n^{(r)}\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{o(\sqrt{N}\mu(N))}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left(\sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(-1+2\varepsilon)} A_n^{(2r)}\right)^{1/2} = \frac{o(\sqrt{N}\mu(N))}{A_N^{\left(r+\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}\left(A_N^{(2r+2\varepsilon)}\right)^{1/2},$$

woraus mit Anwendug von (7. 1) ergibt sich die Behauptung.

Mit Anwendung der Hilfssätze VII—IX kann der folgende Hilfssatz bewiesen werden.

Hilfssatz X. *Es sei $\{\mu(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Es sei $\{a_n\} \in l^2$ und nehmen wir an, daß*

$$\sigma_N(x) = o(\mu(N))$$

fast überall in $[a, b]$ gilt. Dann ist auch die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\mu(N)) \tag{7.11}$$

für jedes $\alpha > 0$ fast überall in $[a, b]$ gültig.

Dieser Hilfssatz entspricht dem folgenden Satz von A. ZYGMUND: Ist eine quadratisch integrierbare Entwicklung fast überall $(C, 1)$-summierbar, so ist die fast überall $(C, \alpha > 0)$-summierbar. (Siehe A. ZYGMUND [2].)

Beweis von Hilfssatz X. Nach unserer Annahme ergibt sich mit Anwendung des Hilfssatzes VIII, daß

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (\sigma_n^{(0)}(x))^2 = o(\mu^2(N))$$

fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Daraus ergibt sich mit Anwendug des Hilfssatzes IX für $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x) = o(\mu(N)) \tag{7.12}$$

ist. Da für jedes N

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 \leqq \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x) - \sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2 +$$

$$+ \frac{2}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2$$

gilt, ergibt sich nach (7. 12) mit Anwendung des Hilfssatzes VII, daß

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 = o(\mu^2(N))$$

fast überall in $[a, b]$ erfüllt wird. Nach Hilfssatz IX mit $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ erhalten wir endlich, daß fast überall in $[a, b]$

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\mu(N))$$

ist.

Damit haben wir den Hilfssatz X bewiesen.

Nun gehen wir zum Beweis des Satzes VII über.

Beweis von Satz VII. Es sei $u_n = 1$ für $n = 1, 2, 3$ und $u_n = \log\log n$ für $n \geqq 4$. Es sei ferner $\{a_n\} \in l^2$ eine beliebige Koeffizientenfolge. Dann ist die orthogonale Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{u_\nu} \varphi_\nu(x)$$

nach einem Satz von D. MENCHOFF fast überall in $[a, b]$ $(C, 1)$-summierbar.[13]

Mit einer Abelschen Transformation erhalten wir:

$$\begin{aligned}(7.13)\quad \sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\frac{1}{u_\nu}a_\nu\varphi_\nu(x) &= \sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right)s_\nu(x)+\\ &+\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)(\nu+1)\sigma_\nu(x)+\frac{1}{u_{N+1}}\sigma_N(x).\end{aligned}$$

Nach den obigen Bemerkungen konvergiert die linke Seite von (7. 13) fast überall in $[a, b]$ und daher ist fast überall in $[a, b]$

$$(7.14)\qquad \sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\frac{1}{u_\nu}a_\nu\varphi_\nu(x) = O(1).$$

Da $\{a_n\} \in l^2$ ist, so kann man mit der Methode, die bei dem Beweis des Hilfssatzes VI angewendet wurde, zeigen, daß die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right)s_\nu(x),\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)|\sigma_\nu(x)|$$

in $[a, b]$ fast überall konvergieren und so gilt fast überall

$$(7.15)\qquad \sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{\nu}{N+1}\right)\left(\frac{1}{u_\nu}-\frac{1}{u_{\nu+1}}\right)s_\nu(x) = O(1)$$

und

$$(7.16)\qquad \frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_{\nu+2}}\right)(\nu+1)\,\sigma_\nu(x) = O(1).$$

Nach (7. 13), (7. 14), (7. 15), und (7. 16) erhalten wir, daß die Abschätzung

$$\sigma_N(x) = O(\log\log N)$$

für $\{a_n\} \in l^2$ in $[a, b]$ fast überall gültig ist. Daraus ergibt sich nach dem Hilfssatz VI, daß für $\{a_n\} \in l^2$

$$\sigma_N(x) = o(\log\log N)$$

fast überall in $[a, b]$ besteht. Schließlich erhalten wir daraus mit Anwendung

---

[13]) Dieser Satz lautet wie folgt: *Ist* $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *im Grundintervall fast überall* $(C, 1)$*-summierbar.* (Siehe D. MENCHOFF [3], S. 65—66.)

des Hilfssatzes X, daß (7.6) im Falle $\{a_n\} \in l^2$ für jedes $\alpha > 0$ im Intervall $[a, b]$ fast überall gilt.

Damit haben wir den Satz VII vollständig bewiesen.

Im folgenden wird gezeigt, daß die in dem Satz VII vorkommende Abschätzung im allgemeinen nicht verbessert werden kann. Nämlich gilt der folgende

Satz VIII. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$(4.17) \qquad w(n) = o(\log \log n)$$

erfüllt Dazu kann man eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angeben, so daß für jedes $\alpha > 0$ überall in $[a, b]$

$$(7.18) \qquad \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \Phi_\nu(x) \right| = \infty$$

besteht. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Beweis von Satz VIII. Es sei $\{\overline{w}(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$(7.19) \qquad w(n) = o(\overline{w}(n)),$$

$$(7.20) \qquad \overline{w}(n) = o(\log \log n)$$

erfüllt; man wähle z. B. die Folge

$$\overline{w}(n) = w(n)\left(\frac{\log \log n}{w(n)}\right)^{1/2} \qquad (n = 4, 5, \ldots)$$

(es sei etwa $\overline{w}(n) = \overline{w}(4)$ für $n = 0, 1, 2, 3$).

Aus (7.20) folgt, daß die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\overline{\overline{w}}(n) = \overline{w}(2^n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die Bedingung

$$\overline{\overline{w}}(n) = o(\log n)$$

erfüllt. So kann mit Anwendung von Hilfssatz I eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{w^*(n)\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$(7.21) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\left(w^*(n)\right)^2} = \infty$$

und

$$(7.22) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overline{\overline{w}}^2(n)}{(n \log^3 n)\left(w^*(n)\right)^2} < \infty$$

erfüllt.

Nach (7.21) kann der Hilfssatz III, bzw. III′ angewendet werden und so ergibt sich die Existenz eines im Intervall $[a, b]$ orthonormierten Funktionensystems $\{\Phi_n^*(x)\}$, für welches die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n^*(x) \tag{7.23}$$

mit den Koeffizienten

$$a_0^* = a_1^* = \frac{1}{w^*(2)}, \quad a_n^* = \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n}\, w^*(n)} \qquad (n \geqq 2)$$

fast überall in $[a, b]$ divergiert. Das Funktionensystem $\{\Phi_n^*(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Bezeichne

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n^* \Phi_n^*(x) \tag{7.24}$$

die orthogonale Reihe, die wir aus der Reihe (7.23) erhalten, indem wir die Glieder mit den Indizes $n = N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ weglassen (N_m hat dieselbe Bedeutung wie in den Hilfssätzen III und III′). Nach den Hilfssätzen III, III′ ist klar, daß auch die Reihe (7.24) fast überall in $[a, b]$ divergiert.

Wir ordnen jetzt die Funktionen $\Phi_n^*(x)$ in eine Reihenfolge um. Die Funktionen $\Phi_n^*(x)$ mit $n \neq N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ werden der Reihe nach mit $\Phi_{2^n}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und die Funktionen $\Phi_{N_m-1}^*(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ der Reihe nach mit $\Phi_k(x)$ $(k = 0, \ldots;\ k \neq 2^n)$ bezeichnet. Aus der Koeffizientenfolge $\{a_n^*\}$ erhalten wir eine neue Folge $\{\bar{a}_n\}$, indem wir die a_n^* mit $n \neq N_m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ fortlaufend mit $\bar{a}_{2^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bezeichnen und für die Indizes $k \neq 2^n$ $\bar{a}_k = 0$ setzen. Nach dem obigen ist es klar, daß $\bar{a}_{2^n} \leqq \left(\sqrt{n \log^3 n}\, w^*(n)\right)^{-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ gilt. Ferner ist es klar, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ auch orthonormiert ist, und falls das System $\{\Phi_n^*(x)\}$ gleichmäßig beschränkt ist, so ist das System $\{\Phi_n(x)\}$ ebenfalls gleichmäßig beschränkt.

Betrachten wir nun die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Phi_n(x). \tag{7.25}$$

Nach den obigen ist es evident, daß die 2^n-te Teilsumme der Reihe (7.25) mit der n-ten Teilsumme der Reihe (7.24) übereinstimmt. Da die Reihe (7.24) im Intervall $[a, b]$ fast überall divergiert, so ist die Reihe (7.25) nach einem bekannten Satz fast überall in $[a, b]$ nicht $(C, 1)$-summierbar.[14] Auf Grund

---

[14]) Dieser Satz lautet wie folgt: *Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein orthonormiertes Funktionensystem und sei $\{c_\nu\} \in l^2$. Die Reihe $\Sigma c_\nu \varphi_\nu(x)$ ist im Grundintervall dann und nur dann fast überall $(C, 1)$-summierbar, wenn die Folge der 2^n-ten Teilsummen der Reihe im Grundintervall fast überall konvergiert.* (Siehe A. N. Kolmogoroff [1].)

von (7.22) und nach dem obigen ist

$$(7.26)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \bar{w}^2(n)\bar{a}_n^2 \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{w}^2(2^n)}{(n \log^3 n)\,(w^*(n))^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\bar{\bar{w}}^2(n)}{(n \log^3 n)\,(w^*(n))^2} < \infty.$$

Also ist $\{\bar{a}_n\} \in l^2$ und so ergibt sich nach einem im Zusammenhang mit Hilfssatz X erwähnten Zygmundschen Satz, daß für jedes $\alpha > 0$ der Reihe (7.25) mit Ausnahme einer von α abhängigen Teilmenge vom Maße Null des Grundintervalls nirgends (C, α)-summierbar ist. (Dieses Ergebnis kann in der Mitteilung von D. MENCHOFF [3] gefunden werden; das oben beschriebene Verfahren kann abgesehen von einer kleinen Modifizierung bei S. KACZMARZ—H. STEINHAUS [1], S. 191 gefunden werden.)

Es sei r eine beliebige natürliche Zahl. Wir bezeichnen die n-te Teilsumme, bzw. die n-te (C, r)-Mittel der orthogonalen Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x)$$

mit $\bar{s}_n(x)$, bzw. mit $\bar{\sigma}_n^{(r)}(x)$:

$$\bar{s}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x), \quad \bar{\sigma}_n^{(r)}(x) = \frac{1}{A_n^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r)} \bar{w}(\nu)\bar{a}_\nu \Phi_\nu(x).$$

Wir erhalten mit einer r-fachen Abelschen Transformation:

$$(7.27)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{A_N^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r)} \bar{a}_\nu \Phi_\nu(x) &= \frac{1}{A_N^{(r)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r)} \left(\frac{1}{\bar{w}(\nu)} - \frac{1}{\bar{w}(\nu+1)}\right) \bar{s}_\nu(x) + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{r} \frac{1}{A_N^{(r)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(r-\mu)} A_\nu^{(\mu)} \left(\frac{1}{\bar{w}(\nu+\mu)} - \frac{1}{\bar{w}(\nu+\mu+1)}\right) \bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\bar{w}(N+r+1)} \bar{\sigma}_N^{(r)}(x) \end{aligned}$$

(vgl. K. TANDORI [4], S. 93).

Nach (7.26) kann mit der beim Beweis des Hilfssatzes VI angewendeten Methode gezeigt werden, daß die Reihen

$$(7.28)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(\nu)} - \frac{1}{\bar{w}(\nu+1)}\right) \bar{s}_\nu(x)$$

und

$$(7.29)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\bar{w}(\nu+\mu)} - \frac{1}{\bar{w}(\nu+\mu+1)}\right) |\bar{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)| \qquad (\mu = 1, \ldots, r)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergieren.

Es sei $x \in [a, b]$ ein beliebiger Punkt, in dem die Reihen (7.29) konvergieren und es sei ε eine beliebige positive Zahl. Es gibt dann eine Zahl

$\nu_0 = \nu_c(x)$ derart, daß

$$(7.30)\qquad \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)|\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(\mu=1,\ldots,r)$$

ist. Für $N\geqq\nu_0$ hat man nach (7.1), (7.2) und (7.30)

$$\left|\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)\right|<$$
$$<\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)|\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)|+\frac{\varepsilon}{2}$$

$(\mu=1,\ldots,r)$ und daraus folgt mit Anwendung von (7.1)

$$\left|\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)\right|<\varepsilon\qquad(\mu=1,\ldots,r)$$

für genügend großes N. Also ist in diesem Punkt x

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{A_N^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(r-\mu)}A_\nu^{(\mu)}\left(\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu)}-\frac{1}{\overline{w}(\nu+\mu+1)}\right)\overline{\sigma}_\nu^{(\mu)}(x)=0\qquad(\mu=1,\ldots,r).$$

Da die Reihen (7.29) in $[a,b]$ fast überall konvergieren, so wird diese Relation in $[a,b]$ fast überall erfüllt.

Da die Reihe (7.28) in $[a,b]$ fast überall konvergiert, und eine konvergente Reihe immer (C,r)-summierbar ist, so konvergiert die erste Summe der rechten Seite von (7.27) im Grundintervall $[a,b]$ fast überall. Da die auf der linken Seite von (7.27) stehende Summe nach der Annahme für $N\to\infty$ in $[a,b]$ überall divergiert, erhalten wir auf Grund der obigen Bemerkungen und nach (7.27), daß in $[a,b]$ fast überall

$$\frac{1}{\overline{w}(N+r+1)}\overline{\sigma}_N^{(r)}(x)\neq o(1)$$

ist, mithin gilt in $[a,b]$ fast überall

$$(7.31)\qquad \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{\overline{w}(N)}|\overline{\sigma}_N^{(r)}(x)|>0.$$

Wir bezeichnen mit $E(r)$ die meßbare Teilmenge des Grundintervalls $[a,b]$, für die (7.31) nicht erfüllt wird.

Es ist klar, daß $E(r)\subseteq E(r+1)$. Es sei

$$E=\bigcup_{r=1}^{\infty}E(r).$$

Da für jedes r $\mu\big(E(r)\big)=0$ ist, so gilt $\mu(E)=0$. Besteht (7.31) in einem

Punkt x für jede natürliche Zahl $r(\geqq 1)$, so ist nach (7.2), (7.4) und (7.5)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\overline{w}(N)} |\overline{\sigma}_N^{(\alpha)}(x)| > 0$$

für jedes $\alpha > 0$. Es sei $a_n = \overline{w}(n)\overline{a}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Es folgt nach (7.19), daß (7.18) für das oben definierte Funktionensystem mit jedem $\alpha > 0$ in der Menge CE überall besteht.

Wir werden beweisen, daß man mit einer geeigneten Veränderung der Funktionen $\{\Phi_n(x)\}$ in E erreichen kann, daß (7.18) für jedes $\alpha > 0$ überall in $[a, b]$ besteht.

Es sei $\Phi_n(x) = 1$ für $x \in E$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Es ist klar, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ in $[a, b]$ orthonormiert ist und die Funktionen $\Phi_n(x)$ gleichmäßig beschränkt sind, wenn sie ursprünglich gleichmäßig beschränkt waren; ferner besteht (7.18) für jedes $\alpha > 0$ überall in CE.

Wir werden beweisen, daß (7.18) für das so modifizierte Funktionensystem bei jedem positiven Parameterwert α auch in der Menge E erfüllt wird. Nach (7.17) ist es genügend zu zeigen, daß für jedes $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\log\log N} \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu = \infty \tag{7.32}$$

gilt. Nach (7.1) und auf Grund der obigen Definition der Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ ergibt sich für $\alpha > 0$

$$\frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \geqq c(\alpha) \sum_{\nu=0}^{[N/2]} \overline{a}_\nu \qquad (N = 0, 1, \ldots), \tag{7.33}$$

wo $c(\alpha)$ eine nur von α abhängige positive Zahl ist. Ferner folgt aus der Definition der Folge $\{\overline{a}_n\}$:

$$\sum_{\nu=0}^{2N} \overline{a}_\nu \geqq \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu^*. \tag{7.34}$$

So ergibt sich (7.32) auf Grund von (7.33) und (7.34), wenn es gezeigt wird, daß

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{\nu=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} = \infty$$

ist. Dies ist aber klar. Im gegengesetzten Fall existierte nämlich eine positive Zahl K, für die

$$\frac{1}{\log N} \sum_{\nu=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} < K \qquad (N \geqq 2)$$

ist, woraus auf Grund der Monotonität der Folge $\{w^*(n)\}$ sich ergäbe, daß

$$\frac{n}{2} \frac{1}{\sqrt{n \log^3 n\, w^*(n)}} < K \log n \qquad (n \geqq 4)$$

ist, also würde die Ungleichung

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\left(w^*(n)\right)^2} < 4K^2 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\log^4 n}{n^2} < \infty$$

bestehen, die der Bedingung (7.21) widerspricht.

Damit haben wir den Satz VIII vollständig bewiesen.

§ 8. Cesàrosche Mittel der orthogonalen Funktionen.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. In diesem Paragraphen werden wir die folgenden Bezeichnungen verwenden:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x), \quad \sigma_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{A_n^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(\alpha)} \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Der Einfachheit halber werden die $(C, 1)$-Mittel mit $\sigma_n(x)$ bezeichnet.

Zuerst werden wir die in der Einleitung erwähnte Abschätzung (16) beweisen.

Satz IX. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty \tag{8.1}$$

erfüllt. Dann gilt für jedes $\alpha > 0$ die Abschätzung

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N) \tag{8.2}$$

fast überall im Intervall $[a, b]$.

Zum Beweis benötigen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz XI. *Wenn die positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung* (8.1) *erfüllt, dann ist für jedes $\alpha > 0$*

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma_n^{(r-1)}(x) - \sigma_n^{(r)}(x)\right)^2 = o(\lambda_N^2) \qquad \left(r > \frac{1}{2}\right)$$

fast überall im Intervall $[a, b]$.

Beweis von Hilfssatz XI. Da für jedes s

$$\sum_{n=2}^{2^s} \frac{1}{\lambda_n^2} = \sum_{m=1}^{s} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{\lambda_n^2} \geqq \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{s} \frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2}$$

gilt, erhalten wir auf Grund von (8.1):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2} < \infty. \tag{8.3}$$

Nach der Definition der Koeffizienten $A_m^{(\alpha)}$ ist für jedes n

$$\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)=\frac{1}{A_n^{(r-1)}A_n^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{n}(A_{n-\nu}^{(r-1)}A_n^{(r)}-A_{n-\nu}^{(r)}A_n^{(r-1)})\varphi_\nu(x)=$$

$$=\frac{1}{rA_n^{(r)}}\sum_{\nu=0}^{n}\nu A_{n-\nu}^{(r-1)}\varphi_\nu(x)$$

und daher ist für jedes n

$$\int_a^b(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2dx=\frac{1}{r^2(A_n^{(r)})^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2(A_{n-\nu}^{(r-1)})^2.$$

Daraus ergibt sich mit einer einfachen Rechnung, daß für jedes n

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}dx=\frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}\frac{1}{(A_n^{(r)})^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2(A_{n-\nu}^{(r-1)})^2= \tag{8.4}$$

$$=\frac{1}{r^2}\sum_{\nu=0}^{2^{m+1}}\nu^2\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}\left(\frac{A_{n-\nu}^{(r-1)}}{A_n^{(r)}}\right)^2$$

gilt. Da nach (7. 1)

$$\sum_{n=\nu}^{2^{m+1}}\left(\frac{A_{n-\nu}^{(r-1)}}{A_n^{(r)}}\right)^2<\frac{M}{\nu}\qquad(\nu=1,\ldots,2^{m+1};\ m=1,2,\ldots) \tag{8.5}$$

ist, wo M eine von m und ν unabhängige positive Zahl bezeichnet[15]), so erhalten wir aus (8. 4) und (8. 5), daß für jedes $m(\geqq 1)$

$$\frac{1}{\lambda_{2^m}^2}\int_a^b\left\{\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}dx=O(1)\frac{2^m}{\lambda_{2^m}^2}$$

gilt. Daraus und aus (8. 3) ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2^m}^2}\left\{\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2\right\}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert. Nach dem Kroneckerschen Lemma besteht also

$$\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x))^2=o(\lambda_{2^m}^2) \tag{8.6}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall.

---

15) Siehe z. B. A. Zygmund [2], S. 360.

Ist $2^m < N \leqq 2^{m+1}$, so hat man

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)\right)^2 = O(1)\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^{m+1}}\left(\sigma_n^{(r-1)}(x)-\sigma_n^{(r)}(x)\right)^2,$$

woraus die Behauptung auf Grund von (8. 6) folgt.

Damit haben wir den Hilfssatz XI bewiesen.

Hilfssatz XII. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung* (8. 1) *erfüllt. Ist im Intervall $[a, b]$ fast überall*

(8. 7) $$\sigma_N(x) = o(\lambda_N),$$

so besteht auch

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) = o(\lambda_N^2)$$

fast überall in $[a, b]$.

Beweis von Hilfssatz XII. Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n^2(x) \leqq \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(s_n(x)-\sigma_n(x)\right)^2 + \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sigma_n^2(x)$$

ergibt sich die Behauptung mit Anwendung des Hilfssatzes XI.

Nun gehen wir zum Beweis des Satzes IX über.

Beweis von Satz IX. Zuerst wird gezeigt, daß (8. 7) im Intervall $[a, b]$ fast überall erfüllt wird. Dieser Beweis wird durch eine kleine Abänderung eines Gedankens von G. Alexits durchgeführt. (Siehe G. Alexits [1].) Da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \frac{\sigma_{2^n}^2(x)}{\lambda_{2^n}^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{\lambda_{2^n}^2}$$

ist, so ergibt sich nach (8. 3) mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma_{2^n}^2(x)}{\lambda_{2^n}^2}.$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert und so ist fast überall in $[a, b]$

(8. 8) $$\sigma_{2^n}(x) = o(\lambda_{2^n}).$$

Da für jedes $m(\geqq 1)$

$$\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\nu\varphi_\nu(x)$$

ist, gilt nach (8. 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{(n(n+1))^2}\sum_{\nu=0}^{n}\nu^2\right\}\frac{1}{\lambda_{n-1}^2} = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n-1}^2} < \infty$$

und so ergibt sich mit Anwendung des B. Levischen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall konvergiert. Also ist fast überall in $[a, b]$

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2 = o(1) \qquad (m\to\infty). \tag{8.9}$$

Für $2^m < N \leqq 2^{m+1}$ hat man auf Grund von (8.9) fast überall in $[a, b]$

$$\left|\frac{\sigma_N(x)}{\lambda_N}-\frac{\sigma_{2^m}(x)}{\lambda_{2^m}}\right| \leqq \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left|\frac{|\sigma_n(x)|}{\lambda_n}-\frac{|\sigma_{n-1}(x)|}{\lambda_{n-1}}\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)|}{\lambda_{n-1}} \leqq \left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} n\left(\frac{\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)}{\lambda_{n-1}}\right)^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{n}\right\}^{1/2} = o(1),$$

woraus sich nach (8.8) ergibt, daß für $\alpha=1$ die Abschätzung (8.2) im Intervall $[a, b]$ fast überall gilt.

Da (8.7) im Intervall $[a, b]$ fast überall erfüllt wird, erhalten wir mit Anwendung des Hilfssatzes XII, daß

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(\sigma_n^{(0)}(x))^2 = o(\lambda_N^2)$$

in $[a, b]$ fast überall gilt. Daraus folgt mit Anwendung des Hilfssatzes IX mit $\varepsilon=\alpha/2$, daß

$$\sigma_N^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x) = o(\lambda_N) \tag{8.10}$$

in $[a, b]$ fast überall ist. Da für jedes N

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 \leqq \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)-\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2+\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}(x)\right)^2$$

gilt, so erhalten wir nach dem obigen und nach (8.10), mit Anwendung des Hilfssatzes XI, daß fast überall in $[a, b]$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sigma_n^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}(x)\right)^2 = o(\lambda_N^2)$$

gilt. Deshalb ergibt sich endlich mit Anwendung des Hilfssatzes IX, daß im Intervall $[a, b]$ fast überall

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x) = o(\lambda_N)$$

ist.

Damit haben wir den Satz IX volständig bewiesen.

Im folgenden wir gezeigt, daß die im Satz IX angegebene Abschätzung im wesentlichen nicht verbessert werden kann.

Satz X. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty \tag{8.11}$$

erfüllt. Dazu kann ein im Grundintervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, derart, daß für jedes* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} \Phi_\nu(x) \right| = \infty \tag{8.12}$$

im Intervall $[a, b]$ *überall gilt.*

Beweis von Satz X. Da die Bedingung (8. 11) erfüllt wird, kann auf Grund des in der Fußnote [11]) angeführten Satzes eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ angegeben werden, die die Bedingungen

$$\lambda_n = o(\bar{\lambda}_n) \tag{8.13}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_n^2} = \infty \tag{8.14}$$

erfüllt. Aus (8. 14) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2n}^2} = \infty . \tag{8.15}$$

Nach (7. 1) existiert für jede natürliche Zahl r eine positive Zahl $c(r)$ mit

$$\frac{A_{M-m}^{(r)}}{A_M^{(r)}} \geqq c(r) \qquad \left(0 \leqq m \leqq \frac{M}{2};\quad M = 1, 2, \ldots\right). \tag{8.16}$$

Die Zahlen $c(r)$ können auch so gewählt werden, daß die Bedingung

$$1 \geqq c(r) \geqq c(r+1) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{8.17}$$

erfüllt wird.

Im folgenden werden wir mit vollständiger Induktion Indexfolgen $\{N_r\}$ und $\{m_n\}$ definieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$2 N_{r-1} \leqq N_r \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{8.18}$$

$$\frac{1}{2\bar{\lambda}_{2m_0}^2} < \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2m_n}^2} < \frac{b-a}{2} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{8.19}$$

und

$$\sum_{i=0}^{r-1} \bar{\lambda}_{2m_{N_i}} \leqq \frac{c(r)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{N_r}} \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{8.20}$$

Es sei $N_0 = 0$ und es sei m_0 die kleinste natürliche Zahl, für die $\bar{\lambda}_{2m_0} > (b-a)^{-1/2}$ gilt. Wir nehmen an, daß die Indizes $N_0, \ldots, N_{s-1}, m_0, \ldots, m_{N_{s-1}}$ $(s > 1)$ bereits definiert sind derart, daß für $r = 0, \ldots, s-1$ die Bedingungen (8. 18), (8. 19) und (8. 20) erfüllt werden. Es sei dann $\bar{N}_s$ die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichungen

$$(8.21) \qquad 2N_{s-1} \leqq \bar{N}_s, \quad \sum_{i=0}^{s-1} \bar{\lambda}_{2m_{N_i}} \leqq \frac{c(s)}{2} \bar{\lambda}_{2\bar{N}_s}$$

gelten, es sei ferner $k_s (> m_{N_{s-1}})$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$(8.22) \qquad \frac{1}{\bar{\lambda}_{2k_s}^2} < \frac{1}{2(\bar{N}_s - N_{s-1}) \bar{\lambda}_{2m_0}^2}$$

ist. Nach (8. 15) ist

$$\sum_{n=k_s}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2n}^2} = \infty.$$

Aus (8. 13) folgt, daß $\bar{\lambda}_n$ für $n \to \infty$ gegen ∞ strebt, und folglich kann eine unendliche Indexfolge $(k_s \leqq) \nu_1 < \cdots < \nu_n < \cdots$ definiert werden, so daß

$$(8.23) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2} = \frac{b-a}{2}$$

besteht. Es existiert also ein Index N_s (wir nehmen den kleinsten), für den

$$(8.24) \qquad \frac{1}{2\bar{\lambda}_{2m_0}^2} < \sum_{n=1}^{N_s - N_{s-1}} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2}$$

gilt. Aus (8.23) und (8.24) folgt:

$$(8.25) \qquad \frac{1}{2\bar{\lambda}_{2m_0}^2} < \sum_{n=1}^{N_s - N_{s-1}} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2\nu_n}^2} < \frac{b-a}{2}.$$

Ferner ist wegen (8.22) $N_s > \bar{N}_s$ und so besteht nach (8. 21) die Ungleichung (8. 18) für $r = s$. Es sei $m_{n+N_{s-1}} = \nu_n$ $(n = 1, \ldots, N_s - N_{s-1})$, dann wird wegen (8.25) die Bedingung (8. 19) erfüllt, und wegen $m_{N_s} \geqq N_s$ und (8.21) wird (8.20) auch für $r = s$ erfüllt.

Somit haben wir die Indexfolgen $\{N_r\}$ und $\{m_n\}$ durch vollständige Induktion definiert, nach Konstruktion gelten die Bedingungen (8. 18)—(8. 20) für jedes r. Aus (8. 19) folgt:

$$(8.26) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_{2m_n}^2} = \infty.$$

Nun wird mit der im Paragraphen 5 angegebenen Methode ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ von

Treppenfunktionen mit der Periode $b-a$ definiert, für das die folgende Bedingung erfüllt wird: für jede natürliche Zahl n ist

$$(8.27)\qquad |\Phi_n(x)| = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_n} & \text{für } x \in I_n + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo $I_n = [\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\alpha_{-1} = 0$, $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_{2m_n}^{-2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ bedeutet.

Es sei

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_0} & \text{für } x \in I_0 + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, daß diese Funktion eine Treppenfunktion von der Periode $b-a$ ist, ihre Norm gleich 1 ist und die Bedingung (8.27) für $n = 0$ erfüllt wird.

Es sei k eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{k-1}(x)$ bereits definiert wurden, so daß sie Treppenfunktionen von der Periode $b-a$ sind, ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes System bilden und die Bedingung (8.27) für $n = 0, \ldots, k-1$ erfüllt wird.

Es gibt eine Einteilung des Intervalls I_k in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, auf denen die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_{k-1}(x)$ alle konstant sind. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ seien mit I'_ϱ und I''_ϱ bezeichnet $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Es sei

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}_{2m_k} & \text{für } x \in I'_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots), \\ -\bar{\lambda}_{2m_k} & \text{für } x \in I''_\varrho + l(b-a) \quad (l = 0, \pm 1, \ldots) \end{cases} \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Es ist klar, daß auch $\Phi_k(x)$ eine Treppenfunktion von der Periode $b-a$ ist, ihre Norm gleich 1 ist und in $[a, b]$ die Funktionen $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_k(x)$ orthogonal sind, und für $n = k$ die Bedingung (8.27) auch erfüllt wird.

Somit haben wir durch vollständige Induktion ein in $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ konstruiert, das aus Funktionen von der Periode $b-a$ besteht und für welches (8.27) für jedes n erfüllt wird. Wir zeigen, daß für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ auch (8.12) für jedes $\alpha > 0$ überall erfüllt wird. Nach (7.2), (7.4) und (7.5) ist es klar, daß falls (8.12) für $\alpha_0 > 0$ erfüllt wird, es auch für jedes $\alpha \leqq \alpha_0$ überall erfüllt wird. Daher ist es genügend zu zeigen, daß für einen beliebig großen Parameterwert $\alpha = r_0$ (r_0 ist eine natürliche Zahl) (8.12) überall gültig ist. Es sei $x_0 \in [a, b]$ und seien $(0 \leqq)\, n_0 < \cdots < n_s < \cdots$ die sämtlichen Indizes, für die die Relation $x_0 \in I_{n_s} + l(b-a)$ mit irgendeiner ganzen Zahl l erfüllt wird; wegen (8.26) gibt es unendlich viele solche Indizes. Wir betrachten einen beliebigen solchen Index $n_s (> N_{r_0})$ und wählen r derart, daß $N_r < n_s \leqq N_{r+1}$ besteht; offenbar ist $r \geqq r_0$. Auf Grund von (8.18) und (8.19) ergibt sich, daß im Falle $n_s < n \leqq 2\, n_s$ $(\leqq N_{r+2})$ die Relation $x_0 \in I_n + l(b-a)$ für keine ganze Zahl l besteht und $n_{s-1} \leqq N_{r-1}$, $n_{s-2} \leqq N_{r-2}, \ldots$ ist (nach (8.19) ist notwendigerweise $s \leqq r$).

Es sei

$$\bar{\sigma}_n^{(r_0)}(x) = \frac{1}{A_n^{(r_0)}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{(r_0)} \Phi_\nu(x) \qquad (n=0,1,\ldots).$$

Nach den obigen Bemerkungen und auf Grund von (7.3), (8.16) und (8.27) ist

$$(8.28) \qquad |\bar{\sigma}_{2n_s}^{(r_0)}(x_0)| = \frac{A_{n_s}^{(r_0)}}{A_{2n_s}^{(r_0)}} |\Phi_{n_s}(x_0)| - \sum_{i=0}^{s-1} |\Phi_{n_i}(x_0)| \geqq c(r_0)\bar{\lambda}_{2m_{n_s}} - \sum_{i=0}^{s-1} \bar{\lambda}_{2m_{n_i}}.$$

Jedoch nach den obigen Bemerkungen und nach (8.20) gilt

$$(8.29) \qquad \sum_{i=0}^{s-1} \bar{\lambda}_{2m_{n_i}} \leqq \sum_{j=0}^{r-1} \bar{\lambda}_{2m_{N_j}} \leqq \frac{c(r)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{N_r}}.$$

Da $n_s \geqq N_r$, so gilt $\bar{\lambda}_{2m_{n_s}} \geqq \bar{\lambda}_{2m_{N_r}}$. Da $r \geqq r_0$ ist, so erhalten wir aus (8.29) nach (8.17)

$$c(r_0)\bar{\lambda}_{2m_{n_s}} - \sum_{i=0}^{s-1} \bar{\lambda}_{2m_{n_i}} \geqq \frac{c(r_0)}{2} \bar{\lambda}_{2m_{n_s}}.$$

Da $m_{n_s} \geqq n_s$, erhalten wir nach (8.28):

$$|\bar{\sigma}_{2n_s}^{(r_0)}(x_0)| \geqq \frac{c(r_0)}{2} \bar{\lambda}_{2n_s}.$$

Nach dem obigen ist diese Abschätzung für unendlich viele Indizes n_s gültig, und so besteht nach (8.13)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} |\bar{\sigma}_N^{(r_0)}(x_0)| = \infty.$$

Da $x_0 \in [a, b]$ beliebig ist, wird diese Relation im Intervall $[a, b]$ überall erfüllt. Da auch r_0 beliebig ist, so ergibt sich, daß für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ (8.12) für jedes $\alpha > 0$ in $[a, b]$ überall besteht.

Damit haben wir den Satz X vollständig bewiesen.

Es bleibt die Frage offen, ob das System $\{\Phi_n(x)\}$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann.

§ 9. Die Lebesgueschen Funktionen der Cesàroschen Summation.

In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß auch die Abschätzungen (17) und (18) im allgemeinen nicht verbessert werden können.

Satz XI. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$(9.1) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) w^2(n)} = \infty$$

erfüllt wird. Es kann ein im Grundintervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varrho_n(x)\}$ *angegeben werden, für welches die Relation*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N \log N w(N)}} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} \varrho_\nu(x) \varrho_\nu(t) \right| dt = \infty \tag{9.2}$$

für jedes $\alpha > 0$ *und für jedes* x *in* $[a, b]$ *besteht.*

Ferner kann auch für jedes $\alpha > 0$ *ein in* $[a, b]$ *gleichmäßig beschränktes orthonormiertes Funktionensystem* $\{r_n^{(\alpha)}(x)\}$ *angegeben werden, derart, daß in* $[a, b]$ *überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N}} \int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} r_\nu^{(\alpha)}(x) r_\nu^{(\alpha)}(t) \right| dt > \delta (> 0) \tag{9.3}$$

gilt.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz XIII. *Es sei* p *eine natürliche Zahl und* c *eine reelle Zahl mit*

$$0 < \frac{1}{c} \leqq 1, \tag{9.4}$$

ferner sei $\{a_i\}$ $(i = 1, \ldots, 2p)$ *eine endliche Folge von positiven Zahlen, für die die Bedingungen*

$$1 \geqq a_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, 2p), \quad a_i > \frac{1}{2^\omega} \quad (i = 1, \ldots, p) \tag{9.5}$$

mit einer positiven ganzen Zahl ω *erfüllt sind. Es kann dann ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes System* $\{h_l(c, p, \{a_i\}; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ *angegeben werden, das die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$\int_0^2 h_l(c, p, \{a_i\}; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, 2p), \tag{9.6}$$

für $0 \leqq \bar{a}_l \leqq 1$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ *gilt*

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{2p} \bar{a}_l h_l(c, p, \{a_i\}; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt < 2^{\omega+1} \sqrt{cp} \qquad (0 \leqq x \leqq 2), \tag{9.7}$$

es existiert eine meßbare Menge $H(c, \omega)$ $(\subseteq [a, b])$, *so daß*

$$\mu(H(c, \omega)) > \frac{1}{2^{2\omega+2}} \frac{1}{c} \tag{9.8}$$

ist, und für $x \in H(c, \omega)$ gilt

(9. 9) $$\int_0^2 \left| \sum_{l=p+1}^{2p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt = 0$$

und

(9. 10) $$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x) h_l(c, p, \{a_i\}; t) \right| dt > \frac{1}{16} \sqrt{2cp}.$$

Dieser Hilfssatz ist das Analogon des Hilfssatzes IV.

B e w e i s von H i l f s s a t z XIII. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

(9. 11) $$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa}$$

besteht. Für $l = 1, \dots, p$ sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}; x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_l} \theta_1 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[0, \dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right), \\ t_l \theta_1 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}, \dfrac{2r}{2^\varkappa}\right), \\ \theta_2 r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^\varkappa}, 2\right] \end{cases}$$

und für $l = p+1, \dots, 2p$ sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}; x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \left[0, \dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right), \\ \theta r_{\varkappa+2\omega+l}(x) & \text{in } \left[\dfrac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}, 2\right], \end{cases}$$

dabei ist $r_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ die k-te Rademachersche Funktion,

(9. 12) $$\theta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^\varkappa}{r} \right)^{1/2},$$

(9. 13) $$\theta_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2^\varkappa} \right)^{-1/2},$$

ferner sind $t_1, \dots, t_p, \theta$ solche nichtnegative Zahlen, für die die Bedingung

$$\int_0^2 h_l^2(c, p, \{a_i\}; x)\, dx = 1 \qquad (l = 1, \dots, 2p)$$

erfüllt wird, die Existenz solcher Zahlen folgt aus (9. 4), (9. 5) und (9. 11). Offenbar ist

$$0 \leqq t_l \leqq 1 \qquad (l = 1, \ldots, p) \tag{9.14}$$

und

$$0 < \theta \leqq 1. \tag{9.15}$$

Nach (9. 11) ist

$$\frac{2r}{2^{\varkappa}} > \frac{1}{2}\frac{1}{c}. \tag{9.16}$$

Daraus folgt nach (9. 11) und (9. 12):

$$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c}. \tag{9.17}$$

Ferner folgt nach (9. 4) und (9. 13):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}. \tag{9.18}$$

Es ist klar, daß die Funktionen $h_l(c, p, \{a_i\}; x)$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ Treppenfunktionen sind und im Intervall $[0, 2]$ ein orthonormiertes System bilden. Mit Anwendung der Bunjakowski-Schwarzschen Ungleichung kann (9. 7) auf Grund von (9. 4), (9. 5), (9. 14), (9. 15), (9. 17) und (9. 18) leicht gezeigt werden. Endlich folgt (9. 6) offenbar aus der Definition.

Es sei $H(c, \omega)$ die meßbare Menge, welche aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^{\varkappa+2\omega+1}}\right)$ durch Weglassen der diadisch rationalen Punkte entsteht. Aus (9. 16) folgt (9. 8). Nach der Definition ist (9. 9) klar.

Für $x \in H(c, \omega)$ ist nach (9. 17) und (9. 18)

$$\int_0^2 \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x) h_l(c, p, \{a_i\}; t)\right| dt \geqq$$

$$\geqq \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}; x) h_l(c, p, \{a_i\}; t)\right| dt = \tag{9.19}$$

$$= \theta_1 \theta_2 \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left|\sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+2\omega+l}(x) r_{\varkappa+2\omega+l}(t)\right| dt > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left|\sum_{k=\varkappa+2\omega+1}^{\varkappa+2\omega+p} r_k(x) r_k(t)\right| dt.$$

Da nach (9. 4) und (9. 11) die in dem Hilfssatz IV vorkommende Bedingung erfüllt wird, so folgt (9. 10) mit Anwendung des Hilfssatzes IV aus (9. 19).

Damit haben wir den Hilfssatz XIII vollständig bewiesen.

Ist $I=[u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)=\begin{cases}\sqrt{2}h_l\left(c, p, \{a_i\}; 2\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u<x<v, \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(l=1, \ldots, 2p)$ und bezeichnen wir mit $H(c, \omega, I)$ das durch die Transformation $y=\frac{v-u}{2}x+u$ sich ergebende Bild der Menge $H(c, \omega)$. Dann ist es auf Grund von (9.6), (9.7), (9.8), (9.9) und (9.10) klar, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\int_I h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\,dx=0 \qquad (l=1, \ldots, 2p), \tag{9.20}$$

für $0 \leqq \bar{a}_l \leqq 1$ $(l=1, \ldots, 2p)$ gilt

$$\int_I \left|\sum_{l=1}^{2p} \bar{a}_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt<\mu(I) 2^{\omega+1} \sqrt{cp} \quad (x \in I), \tag{9.21}$$

ferner ist

$$\mu(H(c, \omega, I))>\frac{\mu(I)}{2^{2\omega+3}} \frac{1}{c}, \tag{9.22}$$

$$\int_I \left|\sum_{l=p+1}^{2p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt=0 \quad (x \in H(c, \omega, I)) \tag{9.23}$$

und

$$\int_I \left|\sum_{l=1}^{p} a_l h_l(c, p, \{a_i\}, I; x)\, h_l(c, p, \{a_i\}, I; t)\right| dt>\frac{\mu(I)}{16} \sqrt{2cp} \qquad (x \in H(c, \omega, I)). \tag{9.24}$$

B e w e i s v o n S a t z XI. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Beweis der ersten Behauptung. Mit Anwendung des in der Fußnote [11]) zitierten Satzes ergibt sich nach (9.1), daß eine positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\bar{w}(n)\}$ existiert, für die die Bedingungen

$$w(n)=o(\bar{w}(n)) \tag{9.25}$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n) \bar{w}^2(n)}=\infty \tag{9.26}$$

erfüllt sind.

Nach (7.1) gibt es für jede natürliche Zahl r eine nur von r abhängige natürliche Zahl $\omega(r)$, so daß

$$\frac{A_{n-\nu}^{(r)}}{A_n^{(r)}} > \frac{1}{2^{\omega(r)}} \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq \frac{n}{2};\, n=0, 1, \ldots\right) \tag{9.27}$$

ist; die Zahlen $\omega(r)$ können auch so gewählt werden, daß die Bedingung

$$\omega(r) \leqq \omega(r+1) \qquad (r=1, 2, \ldots) \tag{9.28}$$

erfüllt wird.

Wir werden eine Indexfolge $(1 \leqq) n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ und eine aus ganzen Zahlen bestehende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $(1 \leqq) r_1 \leqq \cdots \leqq$ $\leqq r_m \leqq \cdots$ definieren, für die die Bedingungen

$$\left((n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})\right)^{-1} \leqq 1, \tag{9.29}$$

$$N_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1} \qquad (m=1, 2, \ldots), \tag{9.30}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} < 2^{-\left(\omega(r_m)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{n_m/2} \qquad (m=2, 3, \ldots) \tag{9.31}$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2\omega(r_m)}\left((n_m+1)\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1} = \infty \tag{9.32}$$

erfüllt sind.

Nach (9.26) kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angeführten Methode eine Indexfolge $(1 \leqq) \nu_1^{(1)} < \cdots < \nu_l^{(1)} < \cdots$ definiert werden, für die die Bedingungen

$$\left((\nu_1^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_1^{(1)}+1})\right)^{-1} \leqq 1, \tag{9.33}$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} 2^{\nu_i^{(1)}} < 2^{-\left(\omega(1)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{\nu_l^{(1)}/2} \qquad (l=2, 3, \ldots) \tag{9.34}$$

und

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left((\nu_l^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(1)}+1})\right)^{-1} = \infty$$

erfüllt sind. Es sei k die kleinste natürliche Zahl, für die

$$2^{-2\omega(1)} \sum_{l=1}^{k_1} \left((\nu_l^{(1)}+1)\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(1)}+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{9.35}$$

besteht.

Es sei $n_l = \nu_l^{(1)}$, $r_l = 1$ für $l = 1, \ldots, k_1$. Auf Grund von (9.33) wird (9.29) erfüllt und nach (9.34) wird auch die Bedingung (9.31) für

$m=2,\ldots,k_1$ erfüllt. Nach (9. 35) ist

$$\sum_{l=1}^{k_1} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2}.$$

Es sei $s>1$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die natürlichen Zahlen $n_1<n_2<\cdots<n_{k_{s-1}}$ und $r_1\leqq r_2\leqq\cdots\leqq r_{k_{s-1}}(=s-1)$ bereits definiert sind, so daß für die Indizes $m=1,\ldots,k_{s-1}$ die Bedingung (9. 31) erfüllt wird und

$$\sum_{l=1}^{k_{s-1}} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right) > \frac{s-1}{2} \tag{9. 36}$$

ist. Es sei a_s die kleinste natürliche Zahl, für die

$$\sum_{k=1}^{k_{s-1}} 2^{n_k/2} < 2^{-\left((\omega(s)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{a_s/2}$$

gilt; offenbar ist $a_s>n_{k_{s-1}}$. Wegen (9. 26) ist

$$\sum_{n=2^{a_s}}^{\infty} \frac{1}{(n\log n)\overline{w}^2(n)} = \infty.$$

So kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angegebenen Methode eine Indexfolge $(a_s=)\nu_1^{(s)}<\nu_2^{(s)}<\cdots<\nu_l^{(s)}<\cdots$ definiert werden, derart, daß die Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{k_{s-1}} 2^{n_k/2} + \sum_{i=1}^{l-1} 2^{\nu_i^{(s)}/2} < 2^{-\left(\omega(s)+5+\frac{1}{2}\right)} 2^{\nu_l^{(s)}/2} \qquad (l=2,3,\ldots) \tag{9. 37}$$

und

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left((\nu_l^{(s)}+1)\,\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(s)}+1})\right)^{-1} = \infty$$

erfüllt werden. Es sei $k_s(>k_{s-1})$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$2^{-2\omega(s)} \sum_{l=1}^{k_s-k_{s-1}} \left((\nu_l^{(s)}+1)\,\overline{w}^2(2^{\nu_l^{(s)}+1})\right)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{9. 38}$$

besteht.

Wir setzen $n_{k_{s-1}+l}=\nu_l^{(s)}$, $r_{k_{s-1}+l}=s$ für $l=1,\ldots,k_s-k_{s-1}$. Aus (9. 37) folgt, daß (9. 31) für jedes $m=2,\ldots,k_s$ besteht. Nach (9. 36) und (9. 38) ist

$$\sum_{l=1}^{k_s} 2^{-2\omega(r_l)}\left((n_l+1)\overline{w}^2(2^{n_l+1})\right)^{-1} > \frac{s}{2}. \tag{9. 39}$$

Wenn dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt wird, erhalten wir gegen ∞ strebende Folgen von natürlichen Zahlen $n_1<\cdots<n_m<\cdots$ und $r_1\leqq\cdots\leqq$

$\leqq r_m \leqq \ldots$, so daß die Bedingung (9. 31) für jeden Index $m(\geqq 2)$ erfüllt wird, und es gibt eine Indexfolge $k_1 < \ldots < k_s < \ldots$, so daß (9. 39) für jedes s besteht. Also wird auch (9. 32) erfüllt. Da die Indexfolge $\{n_m\}$ streng wachsend ist, besteht auch (9. 30).

Wir werden ein aus Treppenfunktionen bestehendes und von der Folge $\{\overline{w}(n)\}$ (und so auch von der Folge $\{w(n)\}$) abhängiges, im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und eine Folge von meßbaren Mengen $H_m \subseteqq [a, b]$ $(m = 1, 2, \ldots)$ definieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\overline{a}$) für jeden Index $m(\geqq 1)$ gilt

$$(9.40)\qquad \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \overline{a}_n \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt < \sqrt{2}\, 2^{\omega(r_m)} \left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1}),$$

wenn $0 \leqq \overline{a}_n \leqq 1$ $(N_{m-1} \leqq n < N_m;\ N_0 = 0)$ ist;

$\overline{b}$) für $x \in H_m$ ist

$$(9.41)\qquad \int_a^b \left| \frac{1}{A_{N_m-1}^{(r_m)}} \sum_{n=N_{m-1}+2^{n_m-1}}^{N_m-1} A_{N_m-1-n}^{(r_m)}\, \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt = 0$$

und

$$(9.42)\qquad \int_a^b \left| \frac{1}{A_{N_m-1}^{(r_m)}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A_{N_m-1-n}^{(r_m)}\, \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{16}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1});$$

$\overline{c}$) die Mengen H_m $(m = 1, 2, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt;

$$(9.43)\qquad \mu(H_m) > 2^{-2\omega(r_m)-3}\left((n_m+1)\,\overline{w}^2(2^{n_m+1})\right)^{-1}(b-a).$$

Es sei $c_1 = (n_1+1)\overline{w}^2(2^{n_1+1})$, $2p_1 = 2^{n_1}$, $a_i^{(1)} = A_{N_1-i}^{(r_1)} \big/ A_{N_1-1}^{(r_1)}$ $(i = 1, \ldots, N_1)$, $\omega_1 = \omega(r_1)$. Dann werden wegen (7. 2), (9. 27) und (9. 29) die Bedingungen (9. 4) und (9. 5) erfüllt, und so kann der Hilfssatz XIII angewendet werden. Es sei

$$\varrho_{l-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, h_l\left(c_1, p_1, \{a_i^{(1)}\}, [a, b]; x\right) \qquad (l = 1, \ldots, 2^{n_1})$$

und $H_1 = H(c_1, \omega_1, [a, b])$.

Nach dem Hilfssatz XIII sind die $\varrho_n(x)$ $(n = 0, \ldots, N_1 - 1)$ Treppenfunktionen, die im Intervall $[a, b]$ ein orthonomiertes System bilden, ferner werden (9.40), (9.41), (9.42) und (9.43) nach (9.21), (9.22), (9.23) und (9.24) für $m=1$ erfüllt.

Es sei $s(>1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(n=0,\dots,N_{s-1}-1)$ und die meßbaren Mengen $H_1,\dots,H_{s-1}$ bereits definiert sind, so daß diese Funktionen im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden und die Bedingungen $\overline{a})-\overline{c})$ für $m=1,\dots,s-1$ erfüllt sind, insbesondere sind also die Mengen $H_1,\dots,H_{s-1}$ stochastisch unabhängig.

Das Intervall $[a,b]$ kann in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\dots,r)$ zerlegt werden, so daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(0\leqq n<N_{s-1})$ in den einzelnen Teilintervallen konstant sind.

Wir setzen alsdann $c_s=(n_s+1)\overline{w}^2(2^{n_s+1})$, $2p_s=2^{n_s}$, $a_i^{(s)}=A^{(r_s)}_{N_s-N_{s-1}-i}\Big/A^{(r_s)}_{N_s-1}$ $(i=1,\dots,2^{n_s})$, $\omega_s=\omega(r_s)$. Wegen (7.2), (9.27) und (9.29) sind die Bedingungen (9.4) und (9.5) erfüllt; folglich kann der Hilfssatz XIII angewendet werden. Es sei

$$\varrho_{N_{s-1}+l-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r}h_l(c_s,p_s,\{a_i^{(s)}\},I_\varrho;x)\qquad (l=1,\dots,2^{n_s})$$

und

$$H_s=\bigcup_{\varrho=1}^{r}H(c_s,\omega_s,I_\varrho).$$

Nach Hilfssatz XIII sind auch die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(N_{s-1}\leqq n<N_s)$ Treppenfunktionen. Mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode kann gezeigt werden, daß dieselben ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes System bilden, und wegen (9.20) zu den Funktionen $\varrho_n(x)$ $(0\leqq n<N_{s-1})$ orthogonal sind. Auf Grund von (9.21), (9.22), (9.23) und (9.24) kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode gezeigt werden, daß (9.40), (9.41), (9.42) und (9.43) auch für $m=s$ erfüllt werden. Es ist aus der Konstruktion klar, daß auch die Mengen $H_1,\dots,H_s$ stochastisch unabhängig sind.

Somit haben wir durch vollständige Induktion die unendlichen Folgen von Funktionen $\varrho_n(x)$ und Mengen H_m derart definiert, daß die gestellten Bedingungen erfüllt sind.

Es sei nun α eine beliebige positive Zahl. Wegen $r_m\to\infty$ ist $r_m\geqq\alpha$ für genügend großes m. Wir betrachten einen solchen Index m, und sei $x\in H_m$. Dann ist nach (7.2) und (7.3)

$$0<\frac{A^{(r_m)}_{N_m-1-n}}{A^{(r_m)}_{N_m-1}}\leqq 1\qquad (0\leqq n\leqq N_m-1),$$

und so nach (9.27), (9.28), (9.30), (9.31), (9.40), (9.41) und (9.42) gilt:

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq$$

$$\geqq \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt -$$

(9.44)
$$- \sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt >$$

$$> \frac{1}{16}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1}) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{m-1} 2^{\omega(r_k)} \left(2^{n_k}(n_k+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_k+1}) \geqq$$

$$\geqq \sqrt{2}\, 2^{\omega(r_m)} (n_m+1)^{1/2}\, \overline{w}(2^{n_m+1}) \left\{ 2^{-(\omega(r_m)+4+\frac{1}{2})} 2^{n_m/2} - \sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} \right\} >$$

$$> \frac{1}{32}\left(2^{n_m}(n_m+1)\right)^{1/2} \overline{w}(2^{n_m+1}) \geqq \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m \log N_m}\, \overline{w}(N_m).$$

Nach (7.2), (7.4) und (7.5) ergibt sich, daß für genügend großes m ($r_m \geqq \alpha$) und für $x \in H_m$ gibt es ein Index M_m, $0 \leqq M_m < N_m$, so daß

(9.45)
$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{M_m}} \sum_{\nu=0}^{M_m} A^{(\alpha)}_{M_m-\nu} \varrho_\nu(x)\varrho_\nu(t) \right| dt \geqq$$

$$\geqq \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(r_m)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(r_m)}_{N_m-1-n} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m \log N_m}\, \overline{w}(N_m)$$

gilt.

Ist nun $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m$, so wird (9.44) für unendlich viele m erfüllt und so gibt es für unendlich viele Indizes m eine natürliche Zahl $0 \leqq M_m < N_m$, so daß (9.45) besteht. Also gilt nach (9.25)

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{N_m \log N_m}\, w(N_m)} \int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{M_m}} \sum_{\nu=0}^{M_m} A^{(\alpha)}_{M_m-\nu} \varrho_\nu(x)\varrho_\nu(t) \right| dt = \infty.$$

Daraus folgt, daß (9.2) in jedem solchen Punkt x besteht.

Auf Grund von (9.32), (9.41) und der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen H_m ergibt sich aber mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} H_m) = b-a$. Also besteht (9.2) für jedes $\alpha > 0$ fast überall in $[a, b]$.

Wir bezeichnen mit E die Teilmenge vom Maße Null des Grundintervalls $[a, b]$, auf der (9.2) für irgendeinen Parameterwert $\alpha > 0$ nicht erfüllt wird. Wir verändern auf der Menge E die Werte der Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ wie folgt: für $x \in E$ setzen wir

$$\varrho_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{b-a}\right)^{1/2} \frac{A_{N_{m-1}}^{(r_m)}}{A_{N_{m-1}-n}^{(r_m)}} \sqrt{c_m} & \text{wenn } N_{m-1} \leqq n < N_{m-1} + 2^{n_{m-1}}, \\ 0 & \text{wenn } N_{m-1} + 2^{n_{m-1}} \leqq n < N_m \end{cases}$$

$(m = 1, 2, \ldots)$. Das so erhaltene Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ wird im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiert, und wie leicht zu sehen ist, wird (9.2) für jedes $\alpha > 0$ in $[a, b]$ überall erfüllt.

Damit haben wir die erste Behauptung des Satzes XI bewiesen.

Nun gehen wir zum Beweis der zweiten Behauptung des Satzes XI über. Es kann mit der bei dem Beweis des Satzes VI angewendeten Methode eine Indexfolge $(1 \leqq) \mu_1 < \cdots < \mu_m < \cdots$ angegeben werden, so daß die Bedingungen

(9.46) $$N_m = 2^{\mu_1} + \cdots + 2^{\mu_m} < 2^{\mu_m + 1} \qquad (m = 1, 2, \ldots; \ N_0 = 0)$$

und

(9.47) $$\sum_{k=1}^{m-1} 2^{n_k/2} < 2^{-(\omega(\alpha)+5+\frac{1}{2})} 2^{\mu_m/2} \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

erfüllt sind, wobei $\omega(\alpha)$ eine natürliche Zahl bedeutet, für die

(9.48) $$\frac{A_{M-n}^{(\alpha)}}{A_M^{(\alpha)}} \geqq \frac{1}{2^{\omega(\alpha)}} \cdot \qquad \left(0 \leqq n \leqq \frac{M}{2}; \ M = 0, 1, \ldots\right)$$

besteht.

Wir verrichten die beim Beweis der ersten Behauptung des Satzes XI angegebene Konstruktion, so daß der Hilfssatz XIII mit den Zahlen

$$c_m = 1, \ 2p_m = 2^{\mu_m}, a_i^{(m)} = A_{N_m - N_{m-1} - i}^{(\alpha)} \Big/ A_{N_m - 1}^{(\alpha)} \quad (i = 1, \ldots, 2^{\mu_m}; \ m = 1, 2, \ldots),$$

$\omega = \omega(\alpha)$ angewendet wird; dies ist möglich, da (9.4) erfüllt wird, und wegen (9.48) auch (9.5) besteht.

So erhalten wir ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes, von α abhängiges Funktionensystem $\{r_n^{(\alpha)}(x)\}$ und eine Folge von meßbaren Mengen $O_m \subseteqq [a, b]$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\bar{\bar{a}}$) für jeden Index $m (\geqq 1)$ gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m - 1} \bar{a}_n r_n^{(\alpha)}(x) r_n^{(\alpha)}(t) \right| dt < \sqrt{2}\, 2^{\omega(\alpha)} 2^{n_m/2} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

wenn $0 \leqq \bar{a}_n \leqq 1$ $(N_{m-1} \leqq n < N_m)$ ist;

$\overline{\overline{b}})$ für $x \in O_m$ ist

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}+2^{n_m-1}}^{N_m-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r_n^{(\alpha)}(x) r_n^{(\alpha)}(t) \right| dt = 0$$

und gilt

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_{m-1}+2^{n_m-1}-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r_n^{(\alpha)}(x) r_n^{(\alpha)}(t) \right| dt > \frac{1}{16} 2^{n_m/2};$$

$\overline{\overline{c}})$ die Mengen O_m $(m=1,2,\ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(O_m) > (b-a) 2^{-2\omega(\alpha)-3}. \tag{9.49}$$

Ferner ist nach (9.5), (9.14), (9.15), (9.17), (9.18), (9.48) und der Konstruktion

$$|r_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} 2^{\omega(\alpha)} \qquad (n=0,1,\ldots;\ a \leqq x \leqq b).$$

Auf Grund der Bedingungen $\overline{\overline{a}})$, $\overline{\overline{b}})$ und nach (9.46), (9.47) ergibt sich in der oben angegebenen Weise, daß für $x \in O_m$

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A^{(\alpha)}_{N_m-1}} \sum_{n=0}^{N_m-1} A^{(\alpha)}_{N_m-1-n} r_n^{(\alpha)}(x) r_n^{(\alpha)}(t) \right| dt > \frac{\sqrt{2}}{64} \sqrt{N_m}$$

gilt. Ist $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} O_m$, so wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt, also gilt (9.3).

Nach (9.49) und der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen O_m folgt aber mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} O_m) = b-a$ ist, also gilt (9.3) fast überall in $[a, b]$. Durch eine geeignete Veränderung der Werte der Funktionen $r_n^{(\alpha)}(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ auf einer Menge vom Maße Null kann erreicht werden (siehe den Beweis der ersten Behauptung des Satzes XI), daß (9.3) in $[a, b]$ überall gilt.

Damit haben wir auch die zweite Behauptung des Satzes XI vollständig bewiesen.

Es bleibt die Frage offen, ob die Folge $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ durch eine beliebige, positive, monoton nichtabnehmende Folge $\{\lambda_n\}$ ersetzt werden kann, welche die Bedingung (8.11) erfüllt.

Schriftenverzeichnis.

ALEXITS, G., [1] Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Annales de la Société Polonaise de Math.*, **25** (1952), 183—187.

FELLER, W., [1] *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I (New-York, 1950).

GÁL, I. S., [1] Sur les moyennes arithmétiques des suites de fonctions orthogonales, *Annales de l'Institut Fourier*, **1** (1949), 53—59.

HARDY, G. H. — LITTLEWOOD, J. E. — PÓLYA, G., [1] *Inequalities* (Cambridge, 1934).

KACZMARZ, S., [1] Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121; [2] Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, **5** (1934), 103—106.

KACZMARZ, S. — STEINHAUS, H., [1] *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa-Lwów, 1935).

KHINTCHINE, J. — KOLMOGOROFF, A. N., [1] Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, *Recueil math. Moscou*, **32** (1925), 668—677.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; [2] Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120; [3] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

TANDORI, K., [1] Quelques évaluations sur les fonctions orthogonales, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 836—838; [2] Sur les moyennes de Cesàro des séries orthogonales, *ebenda*, **244** (1957), 993—995; [3] Sur les constantes de Lebesgue des systèmes de fonctions orhogonales et normées, *ebenda*, **244** (1957), 1128—1130; [4] Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Reihen, *Acta Sci. Math.*, **14** (1951-52), 85—95.

ZYGMUND, A., [1] *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935); [2] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.

(*Eingegangen am 5. April 1957.*)

Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen.

Von G. ALEXITS und D. KRÁLIK in Budapest.

1. Bei Reihenentwicklungen nach Orthogonalfunktionen betrachtet man oft Sätze von folgendem Typus: Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ vorgegebenes Orthonormalsystem; gilt für die reellen Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) < \infty \tag{1}$$

mit einer positiven, wachsenden und nach ∞ strebenden Faktorfolge $\lambda(n)$, so ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

auf einer Menge E konvergent bzw. summierbar (nach irgendeiner Summationsart). Eine Konvergenz- bzw. Summierbarkeitsbedingung von der Form (1) wollen wir im folgenden eine *Koeffizientenbedingung* nennen.

Eine wohlbekannte Koeffizientenbedingung ist z. B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log n)^2 < \infty, \tag{3}$$

aus welcher die Konvergenz jeder Orthogonalreihe (2) fast überall folgt (RADEMACHER [14] und MENCHOFF [10]). Die Koeffizientenbedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty \tag{4}$$

sichert die (C, α)-Summierbarkeit fast überall jeder Orthogonalreihe (2) für alle $\alpha > 0$ (MENCHOFF [11] und KACZMARZ [7]).

Für trigonometrische Reihen kann (3) durch die schwächere Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty \tag{5}$$

ersetzt werden (KOLMOGOROFF—SELIVERSTOFF [8] und PLESSNER [13]). Ähnliches läßt sich auch für eine breite Klasse von Orthogonalpolynomentwicklungen behaupten (B. Sz.-Nagy [15]).

Diese Koeffizientenbedingungen sagen über die Struktur der in die Orthogonalreihe (2) entwickelten Funktion $f(x)$ unmittelbar nichts aus. Daher erhebt sich die Frage, ob es sich eine nur auf die entwickelte Funktion $f(x)$ beziehende *Strukturbedingung* angeben läßt, welche die Koeffizientenbedingung (1) ersetzen könnte, oder mit ihr sogar gleichwertig wäre, und somit die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Entwicklung (2) unmittelbar aus den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ abzulesen ermöglichte.

Im Fall spezieller Orthogonalsysteme kennt man derartige Strukturbedingungen. So z. B. haben Alexits [1] und Stečkin [16] unabhängig voneinander gezeigt, daß die Koeffizientenbedingung (5) für Fourierreihen mit folgender Strukturbedingung vollkommen äquivalent ist: Es gibt eine positive, monoton wachsende Funktion $\Phi(x)$ mit der Eigenschaft

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\,\Phi(x)} < \infty, \tag{6}$$

so daß für den quadratischen Stetigkeitsmodul[1] $\omega_2(\delta, f)$ von $f(x)$ die Beziehung

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{7}$$

besteht. Diese und auch manche andere Strukturbedingungen haben über die entsprechende Koeffizientenbedingung den Vorteil, daß sie lokalisiert werden können. Wenn nämlich die Funktion $f(x)$ nur über einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[0, 2\pi]$ quadratisch integrierbar ist, und nur der „lokale" quadratische Stetigkeitsmodul

$$\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta) = \sup_{|h|\leqq\delta} \left\{ \int_\alpha^\beta [f(x+h)-f(x)]^2\,dx \right\}^{1/2}$$

die Bedingungen (6) und (7) erfüllt, so konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ im Intervall $[\alpha, \beta]$ fast überall, obzwar in diesem Fall auch $\sum_{n=1}^\infty (a_n^2+b_n^2) = +\infty$ sein kann (Alexits [1], Stečkin [16]). Mit der Bedingung (5) ist auch die Strukturbedingung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[f(x+t)-f(x-t)]^2}{t}\,dt\,dx < \infty$$

---

[1]) $\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h|\leqq\delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+h)-f(x)]^2\,dx \right\}^{1/2}.$

äquivalent (PLESSNER [13]), welche ebenfalls lokalisiert werden kann (ULJANOV [18]). Strukturbedingungen von ähnlichem Typ für die Konvergenz von Orthogonalpolynomentwicklungen haben KOLMOGOROFF [9], ALEXITS [2] und ULJANOV [17] angegeben.

Im folgenden wollen wir die Frage der Ersetzbarkeit der Koeffizientenbedingung (1) durch eine entsprechende Strukturbedingung ganz allgemein betrachten, um dadurch den Kern der ähnlichen speziellen Untersuchungen herauszubekommen. Die bisher erzielten speziellen Ergebnisse sind in unseren Resultaten als Korollare enthalten. Natürlich gibt unsere Untersuchung auch zur Aufstellung weiterer Strukturbedingungen Anlaß.

2. Es sei $\lambda(x)$ eine für alle genügend große x definierte positive, monoton wachsende, von unten konkave Funktion; wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty\right), \tag{8}$$

wo k_0 eine entsprechend gewählte natürliche Zahl ist. Wegen

$$\lambda(n) = \int_{k_0}^{n} \lambda'(x)\,dx + \lambda(k_0)$$

läßt sich

$$\begin{aligned}\sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) &= \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \int_{k_0}^{n} \lambda'(x)\,dx + \lambda(k_0) \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \leqq \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \sum_{\nu=k_0}^{n} \lambda'(\nu) + O(1) = \\ &= \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^2 + O(1)\end{aligned} \tag{9}$$

schreiben. Handelt es sich um ein Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$, bei dem die Beziehung

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2} = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) \tag{10}$$

besteht, so folgt hieraus, daß die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \cdot \omega_2^2\left(\frac{1}{\nu}, f\right) \tag{11}$$

die Konvergenz von (8) nach sich zieht. Die Reihe (11) und das Integral

$$\int_{k_0}^{\infty} \lambda'(x)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{x}, f\right) dx$$

sind aber gleichzeitig konvergent oder divergent; aus der Konvergenz dieses Integrals folgt also die Bedingung (1). Hiemit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Erfüllt das Orthonormalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ die Beziehung* (10), *gilt ferner für ein $f \in L^2(a,b)$ die Strukturbedingung*

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{12}$$

mit einem wachsenden $\Phi(x) > 0$, für welches

$$\int_1^\infty \frac{\lambda'(x)}{\Phi(x)}\, dx < \infty \tag{13}$$

ist, so ist auch die Koeffizientenbedingung (1) *erfüllt; also folgt aus* (12) *und* (13) *die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Entwicklung* (2) *in denselben Punkten, in welchen sie aus* (1) *gefolgert werden kann.*

Im Fall des trigonometrischen Systems kann man die Gültigkeit der Beziehung (10) leicht einsehen, so daß hier (1) stets durch eine entsprechende Strukturbedingung ersetzt werden kann. In diesem Fall läßt sich sogar mehr behaupten:

Satz 2. *Im Fall des trigonometrischen Systems sind die Koeffizientenbedingung* (1) *(mit $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$) und die Strukturbedingung* (12), (13) *vollkommen äquivalent.*

In diesem Fall besteht nämlich die Ungleichung

$$\omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq \frac{8\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2$$

(vgl. z. B. [1], oder [16]). Wir haben daher

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 8\pi \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu^2 = 8\pi \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \nu \sum_{k=\nu}^{\infty} c_k^2 \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} + O(1).$$

Wegen der Konkavität der Funktion $\lambda(x)$ ist $\lambda'(x)$ monoton abnehmend, folglich ist

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\lambda'(n)}{n^2} \leqq \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq \frac{2\lambda'(\nu)}{\nu},$$

woraus

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq 16\pi \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \lambda'(\nu) \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n^2 + O(1)$$

folgt. Daraus ergibt sich wegen (9)

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \lambda'(n)\, \omega_2^2\left(\frac{1}{n}, f\right) \leqq O(1) \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n^2 \lambda(n) + O(1),$$

d. h. die Strukturbedingung ist eine Folge der Koeffizientenbedingung, w. z. b. w.

Wenn für die Entwicklung (2) die Beziehung (10) und außerdem noch das Lokalisationsprinzip[2]) gültig ist, so kann der Satz 1 auch in einer lokalisierten Form ausgesprochen werden:

Bezeichne E die Menge jener Punkte von $[a, b]$, *in welchen die Konvergenz von* (2) *im Fall des Erfülltseins der Koeffizientenbedingung* (1) *gefolgert werden kann. Besteht für die Entwicklung* (2) *die Beziehung* (10) *und ist für sie auch das Lokalisationsprinzip gültig, erfüllt ferner die Funktion* $f(x)$ *in einem Teilintervall* $[\alpha, \beta]$ *von* $[a, b]$ *die Bedingung*

$$\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_\alpha^\beta [f(x+h) - f(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right),$$

wo $\Phi(x)$ *der Bedingung* (13) *genügt, so konvergiert* (2) *in den Punkten des Durchschnittes* $E \cap [\alpha, \beta]$.

Der Beweis beruht auf der Erweiterbarkeit von der in $[\alpha, \beta]$ betrachteten Funktion $f(x)$ zu einer in $[a, b]$ definierten Funktion $g(x)$, welche die Strukturbedingung in $[a, b]$ erfüllt (vgl. z. B. [1]). Das Übrige ergibt sich dann durch Anwendung des Lokalisationsprinzips und des Satzes 1.

Aus diesen allgemeinen Sätzen ergeben sich die bekannten speziellen Sätze als Korollare: Im Fall des trigonometrischen Systems setze man z. B. $\lambda(x) = \log x$, dann erhält man einerseits nach Satz 2 die Äquivalenz der Koeffizientenbedingung (5) und der Strukturbedingung (6), (7), andererseits nach dem soeben bewiesenen die lokalisierte Strukturbedingung von Alexits [1] und Stečkin [16]. — Setzt man $\lambda(x) = x$, so folgt aus Satz 2 die Äquivalenz der Koeffizientenbedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty \tag{14}$$

und der Strukturbedingung

$$\int_1^\infty \omega_2^2\left(\frac{1}{x}, f\right) dx < \infty. \tag{15}$$

Sind a_n und b_n die Fourierkoeffizienten einer auf der Peripherie des Einheitskreises definierten stetigen Funktion $f(x)$, so ist das Erfülltsein von (14) für

[2]) Wir verstehen unter dem Ausdruck „für (2) gilt das Lokalisationsprinzip" die Gültigkeit des folgenden Satzes: Ist $f(x) = g(x)$ in einem Teilintervall I von $[a, b]$, so sind die Entwicklungen (2) von $f(x)$ und $g(x)$ in I äquikonvergent.

die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf den Einheitskreis notwendig und hinreichend (s. z. B. [5]), also ist (15) die notwendige und hinreichende Strukturbedingung für die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips auf die stetige Randfunktion $f(x)$ des Einheitskreises (FREUD und KRÁLIK [6]).

3. Sei $\varrho(x) \geqq 0$ eine in $[a, b]$ L-integrierbare Funktion, die höchstens auf einer Nullmenge verschwindet. Die Belegungsfunktion $\varrho(x)$ bestimmt bekanntlich (bis auf das Vorzeichen) eindeutig ein Orthonormalpolynomsystem. Bezeichne jetzt $\{\varphi_n(x)\}$ dieses System; dann gilt bekanntlich für die Entwicklung einer stetigen Funktion $f(x)$ nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$ der Jacksonsche Satz

$$|f(x)-P_n(x)| \leqq C_1 \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, f\right),$$

wenn $P_n(x)$ das im Tschebyschewschen Sinn am besten approximierende Polynom $(n-1)$-ten Grades, $\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)$ den Stetigkeitsmodul[3]) von $f(x)$ und C_1 eine absolute Konstante bedeutet. Es ist also

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right\|_2 \leqq \left\{ \int_a^b \varrho(x) [f(x)-P_n(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \leqq C_2 \cdot \omega\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

Daraus folgt durch Anwendung von (9) genau wie im Beweis des Satzes 1 der

Satz 3. *Genügt $\omega(\delta, f)$ der Strukturbedingung* (12), (13), *so folgt daraus die Konvergenz bzw. Summierbarkeit der Orthogonalpolynomentwicklung* (2) *in denselben Punkten, welche durch die Koeffizientenbedingung* (1) *bestimmt werden.*

Aus diesem Satz ergibt sich als unmittelbares Korollar die folgende Behauptung: *Ist die Strukturbedingung*

$$\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/\delta)}}\right) \tag{16}$$

mit einem $\Phi(x)$ erfüllt, für welches

$$\int_3^\infty \frac{\log x (\log\log x)^{1+\varepsilon}}{x\Phi(x)} dx < \infty \qquad (\varepsilon > 0)$$

gilt, so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *in jeder Anordnung*

---

3) $\omega(\delta, f) = \sup\limits_{|x'-x''| \leqq \delta} |f(x')-f(x'')|$.

fast überall (ULJANOV [17]). Man hat ja nur $\lambda(x) = \log^2 x \cdot (\log\log x)^{1+\varepsilon}$ zu setzen und einen bekannten Satz von ORLICZ [12] anzuwenden. — Setzt man $\lambda(x) = \log^2 x$, so ergibt sich als Korollar der folgende Satz von KOLMOGOROFF [9]: *Ist die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$ *erfüllt, für welches*

$$\int_3^\infty \frac{\log x}{x\,\Phi(x)}\,dx < \infty \tag{17}$$

gilt, so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *fast überall.* — Ein weiteres, bisher explizite vielleicht nicht ausgesprochenes Korollar ist das folgende: *Ist die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$ *erfüllt, für welches*

$$\int_3^\infty \frac{\log\log x}{\Phi(x)\,x\log x}\,dx < \infty \tag{18}$$

gilt, so ist die Orthogonalpolynomentwicklung (2) *der stetigen Funktion* $f(x)$ *fast überall* $(C, \alpha > 0)$*-summierbar.*

Sowohl das letzte wie auch das vorangehende Korollar (Kolmogoroffscher Satz) kann lokalisiert werden, wenn das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann gilt nämlich, wie leicht ersichtlich, das Lokalisationsprinzip für $\{\varphi_n(x)\}$ und daher kann man den Gedankengang der lokalisierten Form des Satzes 1 mit $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ statt $\omega_2(\delta, f; \alpha, \beta)$ anwenden:

Ist das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt und gilt für den in* $[\alpha, \beta]$ *definierten Stetigkeitsmodul* $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ *die Strukturbedingung* (16) *mit einem* $\Phi(x)$, *das* (17) *bzw.* (18) *erfüllt, so ist die Entwicklung* (2) *der in* $[\alpha, \beta]$ *stetigen, sonst nur bezüglich* $\varrho(x)$ *quadratisch integrierbaren Funktion* $f(x)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *fast überall konvergent bzw.* $(C, \alpha > 0)$*-summierbar.*[4])

4. Bekanntlich folgt die Konvergenz fast überall der Reihe (2) schon aus der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty, \tag{19}$$

falls das Orthonormalpolynomsystem $\{\varphi_n(x)\}$ in jedem ganz im Inneren von (a, b) liegenden abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig beschränkt ist [15]. Daher gilt nach Satz 3 die folgende Behauptung: *Ist das Orthonormalpolynomsystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt, genügt ferner* $\omega(\delta, f)$ *der Bedingung*

---

[4]) Setzt man statt der Beschränktheit von $\{\varphi_n(x)\}$ in $[\alpha, \beta]$ die Beschränktheit im ganzen Intervall $[a, b]$ voraus, so läßt sich die Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit von $f(x)$ in $[a, b] - [\alpha, \beta]$ bezüglich $\varrho(x)$ durch die gewöhnliche Integrierbarkeit bezüglich $\varrho(x)$ ersetzen.

(16) *mit einem* $\Phi(x)$, *welches die unter* (6) *geforderte Eigenschaft besitzt, so konvergiert* (2) *fast überall.* Auf Grund des Lokalisationsprinzips können wir diese Behauptung auch in lokalisierter Form aussprechen, womit wir einen Konvergenzsatz von ALEXITS [2] wesentlich verallgemeinern:

Satz 4. *Ist das Orthonormalpolynomsystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *in einem ganz im Inneren von* (a, b) *liegenden abgeschlossenen Teilintervall* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt, genügt ferner der auf* $[\alpha, \beta]$ *bezogene Stetigkeitsmodul* $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ *der* $L^2_{\varrho(x)}$*-integrierbaren Funktion* $f(x)$ *der Bedingung* (16) *mit einem der Bedingung* (6) *genügenden* $\Phi(x)$, *so konvergiert die Orthogonalpolynomentwicklung* (2) *von* $f(x)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *fast überall.*

Es sei $g(x)$ die Funktion, die in $[\alpha, \beta]$ mit $f(x)$ zusammenfällt und in den Intervallen $[a, \alpha)$, $(\beta, b]$ die konstanten Werte $f(\alpha)$ bzw. $f(\beta)$ annimmt. Der Stetigkeitsmodul $\omega(\delta, g; a, b)$ erfüllt die für $\omega(\delta, f; \alpha, \beta)$ geforderte Strukturbedingung im ganzen Intervall $[a, b]$; nach Satz 3 besteht also für die Entwicklungskoeffizienten von $g(x)$ die Beziehung (19), woraus die Konvergenz der Entwicklung von $g(x)$ in $[\alpha, \beta]$ fast überall folgt (vgl. [4] und [15]). Die Konvergenz der Entwicklung von $f(x)$ fast überall in $[\alpha, \beta]$ ergibt sich mithin aus dem Lokalisationsprinzip.

Es ist zu bemerken, daß wir uns von der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ in $[\alpha, \beta]$ befreien können, wenn wir die Belegungsfunktion $\varrho(x)$ durch die Bedingung

$$0 \leqq \varrho(x) \leqq \frac{K}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \tag{20}$$

einschränken, wobei K eine Konstante bedeutet. Durch die Transformation $x = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\vartheta + \frac{b+a}{2}$ erhalten wir die Funktion

$$g(\vartheta) = f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \cos\vartheta + \frac{b+a}{2}\right),$$

auf welche wir einen Gedankengang von ALEXITS [3] anwenden dürfen, woraus sich die folgende Verschärfung der Behauptung des Satzes 4 ergibt: *Genügt* $\varrho(x)$ *der Bedingung* (20) *und ist* $\{\varphi_n(x)\}$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt, erfüllt ferner* $\omega_2(\delta, g; \beta', \alpha')$ *die Bedingung* (7) *mit einem durch* (6) *eingeschränkten* $\Phi(x)$, *wobei* α', β' *die auf der* ϑ*-Achse liegenden Bildpunkte von* α, β *sind, so konvergiert die Entwicklung von* $f(x)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *fast überall.*

Literaturverzeichnis.

[1] G. Alexits, Über den Einfluß der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 95—101.

[2] ——— Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 1—4.

[3] ——— Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12B** (1950), S. 223—225.

[4] ——— Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, *Commentarii Math. Helv.*, **16** (1944), 200—208.

[5] R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces* (New-York, 1950).

[6] G. Freud - D. Králik, Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 411—416.

[7] S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

[8] A. Kolmogoroff—G. Seliverstoff, Sur la convergence des séries de Fourier, *Comptes Rendus Acad, Sci. Paris*, **178** (1925), 303—305 und *Rendiconti Acad. Lincei Roma*, **3** (1926), 307—310.

[9] А. Н. Колмогоров, О сходимости рядов по ортогональным полиномам, Доклады Акад. Наук СССР, **1** (1934), 291—294.

[10] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. I, *Fund. Math.*, **4** (1923), 82—105.

[11] ——— Sur les séries de fonctions orthogonales. II, *Fund. Math.*, **8** (1926), 56—108.

[12] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bull. Intern. Acad. Polonaise, classe A des Sciences math. et nat.*, 1927, 81—115.

[13] A. Plessner, Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journal f. reine u. angew. Math.*, **155** (1926), 15—25.

[14] H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[15] B. Sz.-Nagy, Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 50—55.

[16] С. Б. Стечкин, О теореме Колмогорова—Селиверстова, Известия Акад. Наук СССР, **17** (1953), 499—512.

[17] П. Л. Ульянов, О безусловной сходимости почти всюду, Матем. Сборник, **40** (1956), 95—100.

[18] П. Л. Ульянов, Обобщение теоремы Марцинкевича, Известия Акад. Наук СССР, **17** (1953), 513—524.

(Eingegangen am 14. April 1957.)

Bibliographie.

B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, Ägyptische, Babylonische und Griechische Mathematik. Aus dem Holländischen übersetzt von H. Habicht, mit Zusätzen vom Verfasser. 488 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1956.

Der bekannte Verf. der „Modernen Algebra" veröffentlichte als leidenschaftlich interessierter Historiker der Mathematik schon mehrere wichtige Beiträge zur Geschichte der exakten Wissenschaften im Altertum. Vorliegendes Werk (1950 holländisch und 1954 auch englisch herausgebracht) umfaßt die Geschichte der ägyptischen, babylonischen und griechischen Mathematik bis etwa zur Mitte des 6. Jh. Der Schwerpunkt der Behandlung fällt — wie es auch im voraus betont wird (S. 16 f.) — auf die Griechen, nach dem ja bei ihnen zuerst die Mathematik zur deduktiven Wissenschaft wurde. Der erste Teil des Buches (S. 23—130) faßt unsere gegenwärtigen Kenntnisse über die altorientalische Mathematik zusammen. Innerhalb dessen überblickt ein Sonderkapitel das Problem „Zahlensysteme, Ziffern und Rechenkunst" (S. 59—99) bis in das 16. Jh. hinein. Die scheinbare Abschweifung wird durch die Tatsache begründet, daß Zahlenschreibweise und zugehörige Rechentechnik von sehr großer Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik sind. — Interessant, daß nach der Ansicht des Verf. einerseits der verhältnismäßig hohe Entwicklungsstand der Zahlenschreibweise und Rechentechnik in Babylonien die höhere Entfaltung der Mathematik selbst für diejenigen Griechen erleichterte, die die orientalische Erbschaft übernahmen, andrerseits aber eben „technische Unzulänglichkeiten" auch zum Steckenbleiben, ja zum Verfall der griechischen Wissenschaft beitrugen (S. 440 f.). — In der Tat sind die großen Fortschritte der Mathematik seit der Antike zum wesentlichen Teil mit dadurch bedingt, daß es gelang einen brauchbaren, leistungsfähigen Formalismus zu schaffen, wie es einen in der Antike noch nicht gab.

Leider, ist es hier nicht möglich, die neuen Ergebnisse des ausgezeichneten und sehr reichhaltigen Buches alle im einzelnen zu besprechen, oder sie auch nur aufzuzählen. Van der Waerdens Zusammenfassung wird ja voraussichtlich noch für lange Zukunft Grundlage jeder weiteren historischen Forschung auf diesem Gebiete. Ein Rezensent der holländischen Ausgabe hat übrigens schon zusammengestellt, was in der Arbeit gegenüber früheren Darstellungen der antiken Mathematik neu ist. Überholt ist diese ältere Rezension (O. Becker, *Gnomon*, 1951) eigentlich nur deswegen, weil der Verf. auch seitdem sein Buch vervollständigt hatte. Man denke dabei nicht nur an die Zusätze, Ergänzungen und kleinere Verbesserungen, die zum Teil von der Kritik verlangt wurden, sondern noch mehr an jene tiefgreifende Auseinandersetzung mit der anderweitigen Forschung, die für den Verf. ermöglicht, seine Ergebnisse immer mehr zu vervollständigen.

Der Verf. wendet sich mit besonderem Interesse der Frage zu, wie sich die praktisch-empirischen Kenntnisse der altorientalischen Völker bei den Griechen zu einer theoretischen Wissenschaft entwickelten. Die frühen Ansätze einer solchen Entwicklung werden jedesmal mit Recht hervorgehoben. So heißt es z. B. im Zusammenhang mit den sog. Hau-Rechnungen der Ägypter (die also *nicht* Problemen aus der Praxis entspringen): „Sie zeugen von dem *rein theoretischen Interesse* der ägyptischen Rechenmeister. Sie sind offensichtlich von solchen Leuten ausgedacht, die Spaß am reinen Rechnen hatten und ihren Schülern schwere Aufgaben zur Übung aufgeben wollten. Wie jede Kunst, so hat auch die Rechenkunst die Neigung, sich bis an ihre äußersten Grenzen zu entfalten." Ein andermal wird die Lückenhaftigkeit unserer Kenntnisse in bezug auf Babylonien betont: „Schade, daß fast alle Texte nur Aufgaben und Lösungen, aber keine Herleitungen enthalten. Man gibt die Lösung wie eine Art Rezept ohne zu sagen, wie man sie gefunden hat. *Und doch müßen diese Rezepte irgendwie hergeleitet sein, und die Lehrer müßen ihren Schülern gesagt haben, wie sie Unbekannte aus Gleichungen auflösen und eine Unbekannte durch eine andere ausdrücken konnten*". Die Vermutung wird wohl zutreffen, doch müßte man auf der anderen Seite umso schärfer betonen, daß solche grundlegenden Begriffe wie *Satz*, *Beweis*. *Definition*, *Axiom* und *Postulat* in der vorgriechischen Wissenschaft allem Anschein nach noch gar nicht existierten. Wie kam es dazu, daß man solche Begriffe schuf? — Diese Frage wird im Buch nicht gestellt, und doch kann man eben nach VAN DER WAERDENS Vorbild auch solche Fragen anpacken, nur muß man dazu die Arbeit des historisch interessierten Mathematikers von der Philosophiegeschichte und der Philologie her ergänzen. Um nur ein Beispiel zu nennen: der Verf. hat in der Beurteilung der Wissenschaft von THALES wohl Recht (S. 145 f.). THALES hat seine Sätze allerdings schon *bewiesen*. Aber welcher Art seine *Beweise* gewesen sein mögen? — Schade, daß zu dieser Frage eine Arbeit von K. v. FRITZ (*Archiv f. Begriffsgesch.*, 1955) noch nicht berücksichtigt werden konnte. Man hat nämlich inzwischen wahrscheinlich machen können, daß die thaletischen Beweise noch vorwiegend *empirischer Art* sein mußten. Diese Vermutung wird auch dadurch noch erhärtet, daß der math. Terminus der Griechen für „beweisen" der Wortbedeutung nach eigentlich „zeigen", „veranschaulichen" heißt. Es hat also wohl eine Entwicklungsstufe gegeben, in der die math. Evidenz noch unmittelbar empirisch, anschaulich war. Die Forderung nach einer anderen Art (*logischer*) Evidenz wird wohl erst auf der nächsten Entwicklungsstufe ausschlaggebend.

Gewiß, hat der Verf. Recht, wenn er betont (S. 18), daß man erfolgreich Mathematik-Geschichte betreiben kann, auch ohne die klassischen Autoren im Urtext zu lesen. Aber will man auf demselben Wege, der durch ihn so gangbar gemacht wurde, weiterkommen, so wird einiges wohl auch noch die Philologie beisteuern können. VAN DER WAERDEN hat z. B. auf die logischen Mängel des 8. Euklidischen Buches hingewiesen; sein Verf. (ARCHYTAS) ränge ständig mit der Ausdrucksweise. „Es macht fast den Eindruck, als hätte er Angst, auf den glitschigen Pfaden der Logik auszurutschen" (S. 253). Dagegen rühmte er die geschlossen kompakte Einheit und Eleganz des etwas früheren 7. Buches. Nun liest man aber das 7. Buch Euklids griechisch, so wird man auch an seiner Logik manches auszusetzen haben. Was soll man z. B. zu der sehr ungeschickten Formulierung des 15. Satzes sagen — der übrigens nur ein Spezialfall von Satz 9 ist? Die historische Erklärung dieser logischen Ungeschicklichkeit könnte wohl manches Licht auf die mathematisch-philosophischen Diskussionen des 5. Jh. werfen. Und von dieser Seite her würde man auch die logische Ungeschicklichkeit von ARCHYTAS etwas anders erklären, als es VAN DER WAERDEN tut.

Hervorgehoben seinen noch — neben den sehr eindrucksvollen Euklid-Analysen — die schönen Kapitel über ARCHIMEDES und APOLLONIOS. Was den Verfall der griechischen Math. betrifft, macht der Verf. mit Recht darauf aufmerksam, wie ganz anders die Entwicklung in der Astronomie verlaufen ist. Der Rückgang der Mathematik muß also seine „inneren Ursachen" haben.

Das Buch, obwohl streng wissenschaftlich und weitere Nachforschungen anregend, ist überall allgemeinverständlich, klar und setzt nirgends mehr als die einfachste Schulmathematik voraus.

Árpád Szabó (Budapest)

V. Thébault, Parmi les belles figures de la géométrie dans l'espace (Géométrie du tétraèdre), XVI + 287 p., Paris, Vuibert, 1955.

Comme l'on le soupçonne déjà du titre, l'ouvrage n'est pas un traité au sens étroit. Le but de l'auteur est de faire passer quelques moments agréables au lecteur.

M. V. Théabult recherche depuis quarante ans les analogies existant entre la géométrie du triangle et celle du tétraèdre et arrivait à étendre de nombreuses relations du plan à l'espace. Après des rappels aux résultats de ses prédécesseurs il nous offre un receuil des principaux résultats de ses propres recherches sur le tétraèdre et les polygones gauches. Les raisonnements procèdent par assez de calculs; quant aux "belles figures", c'est le lecteur qui doit les construire.

La part la plus riche du livre est Chapitre III: Points de Lemoine, sphères d'Adams, de Tücker, de Lucas, de Hagge, l'orthopôle d'une droite.

Les résultats de l'auteur concernant des tétraèdres spéciaux (par ex. orthocentriques) franchiraient les limites du livre, mais entre les questions proposées quelques unes sont prises dans ce domaine. Il est à regretter que le livre ne contient pas une bibliographie détaillée et un index.

T. Bakos (Szeged)

E. Kamke, Mengenlehre (Sammlung Göschen, Band 999/999a), 192 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1955.

Die dritte, neugearbeitete Auflage dieses bekannten und bewährten Büchleins wurde gegenüber der zweiten Auflage (1947) mit verschiedenen Ergänzungen wesentlich erweitert: Neu ist ein Kapitel über das Rechnen mit Mengen (Formeln von Morgan, Suslin-Operation), ein Abschnitt über die Begründung der Mengenlehre, in dem unter anderem die Bedeutung des Auswahlprinzips diskutiert wird und einige Bemerkungen über die intuitionistische Mengendefinition von Brouwer gemacht werden. Neu sind ferner die §§ 34 und 35 über die Zerfällung und Zerlegung von Ordnungszahlen. In einem letzten Abschnitt werden neben der ausführlichen Behandlung des Wohlordnungssatzes die Sätze von Tukey, Hausdorff und Zorn behandelt.

Inhaltsübersicht: I. Aus den Anfängen der Mengenlehre. II. Über beliebige Mengen und ihre Kardinalzahlen. III. Bemerkung über die Begründung der Mengenlehre. IV. Über geordnete Mengen und ihre Ordnungstypen. V. Über wohlgeordnete Mengen und ihre Ordnungszahlen. VI. Der Wohlordnungssatz, verwandte Sätze und Folgerungen.

G. Fodor (Szeged)

H. Bachmann, Transfinite Zahlen (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 1), VII + 204 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Der vorliegende Bericht enthält deutliche und systematische Ausführungen über die Ergebnisse und Probleme der Theorie der transfiniten Zahlen (Ordnungszahlen und Mächtigkeiten). Das Zermelo—Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre bildet die Grundlage, es wird aber alles in der Sprache der naiven Mengenlehre formuliert.

In der Einleitung (Kap. I) findet man einen kurzen Abriß über die Mengenlehre und das Grundlagenproblem, über die üblichen Axiome der Mengenlehre und die fundamentalen

Definitionen der Äquivalenz, Ähnlichkeit, Wohlordnung, der transfiniten Induktion und der transfiniten Zahlen.

In Kapitel II werden behandelt: die Ordnungszahlen, stetige Funktionen von Ordnungszahlen, die ordinalen Anfangszahlen, Normalfunktionen, Iteration und kritische Zahlen und die Theorie der regressiven Funktionen.

Kapitel III beschäftigt sich mit der Arithmetik der Ordnungszahlen. Zuerst werden die arithmetischen Operationen mit Ordnungszahlen auf mengentheoretischer Weise eingeführt. Sodann folgt die funktionale Theorie der arithmetischen Operationen. In diesem Kapitel findet man noch die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen, die höheren arithmetischen Operationen, die Theorie der Hauptzahlen, die Umkehrungen der arithmetischen Operationen, die Zerlegung einer Ordnungszahl in unzerlegbare Zahlen, die Permutationen von Folgen von Ordnungszahlen und die Theorie der vertauschbaren Ordnungszahlen.

In Kapiteln IV und V wird die Theorie der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen dargestellt, undzwar in Kapitel IV ohne das Auswahlaxiom zu benutzen, und in Kapitel V unter Verwendung des Auswahlaxioms. Es werden behandelt: die Mächtigkeit beliebiger Mengen und ihre Arithmetik, Vergleichung von Mächtigkeiten, die Potenzmenge einer beliebigen Menge, die Kardinalzahlen und die kardinalen Anfangszahlen, Arithmetik der Kardinalzahlen, Ungleichungen für unendliche Summen und Produkte von Kardinalzahlen, Beziehungen zwischen Kardinalzahlen und Mächtigkeiten, äquivalente Formen und Konsequenzen des Auswahlaxioms, die Beths, Summen von Beths, die Alephhypothese und ihre Folgerungen.

In Kapitel VI handelt es sich, etwas weniger eingehend, um die Anwendungen der transfiniten Zahlen in der Theorie der Punktmengen, das Axiom der Hauptfolgen, die formale Darstellung von Ordnungszahlen und schließlich um einige Alternativen zum Auswahlaxiom.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit den unerreichbaren Zahlen.

Zum Schluß werden ausführliche Literaturangaben zu den einzelnen Kapiteln angeführt.

G. Fodor (Szeged)

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band: **Funktionen einer Veränderlichen.** Dritte, verbesserte Auflage, XI + 450 Seiten. Zweiter Band: **Funktionen mehrerer Veränderlicher.** Dritte, verbesserte Auflage, XI + 468 Seiten. Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Courants *Vorlesungen* sind wohl schon ein klassisches Werk geworden. Dies erweist sich auch daraus, daß sie schon in dritter Auflage vorliegen und auch in andere Sprachen übersetzt wurden. Dieser Erfolg ist u. a. dem zu danken, daß es dem Verf. gelingt, dem Stoff, ohne Verzicht auf Präzision, in einer undogmatischen, lesbaren Form darzustellen und abstrakte Begriffe anschaulich zu motivieren. Er hält die Schwierigkeiten der Anfänger immer vor den Augen. Darum sind die schwierigeren und engänzenden Probleme, die man beim ersten Studium übergehen kann, nur in den Anhängen betrachtet. Charakteristisch ist im Aufbau des Materials, daß das bestimmte Integral vor der Ableitung eingeführt wird und Differential- und Integralrechnung nebeneinander zur Behandlung kommen.

Diese dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten hauptsächlich durch die Aufnahme einer Reihe von Zusätzen. Diese betreffen u. a. die Intervalleinschachtelung und das Zahlenkontinuum, den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung, den Weierstraßschen Approximationssatz (nach H. Lebesgue), das Iterationsprinzip für die numerische Auflösung gewisser Gleichungen, die Bernoullischen Polynome und die Eulersche Summenformel, das Integral von Fresnel und von Dirichlet, die Integration der Fourierreihen, das isoperimetrische Problem, die Differentiation und Integration von gebrochener Ordnung, die Wellengleichung und die Maxwellschen Gleichungen im leeren Raum.

In dieser ergänzten Form werden die *Vorlesungen* von Courant gewiß einen noch größeren Einfluß auf die Ausbildung der neuen Mathematikergenerationen haben.

J. Berkes (Szeged)

Arnaud Denjoy, Articles et mémoires. Reproduits et rassemblés avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. VII + 1108 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

On trouve dans ces deux volumes de remarquable étendue un recueil complet des reproductions photographiques des articles et des mémoires, écrits avant 1955, de l'éminent analyste. Les notes préliminaires, publiées pour la plupart dans les Comptes Rendus de Paris, feront le sujet d'une collection ultérieure.

Le premier volume embrasse les ouvrages qui traitent de la théorie des fonctions d'une variable complexe, le second comprend ceux qui s'occupent des fonctions réelles et des questions de la théorie des ensembles, en particulier de la topologie. On y trouve encore un article de T. J. Boks, écrit sous la direction d'A. Denjoy, et trois notices de l'auteur qui donnent un aspect général sur son oeuvre, datant des années 1921, 1934 et 1942.

Dans nos jours, une grande partie des résultats de l'auteur sont à trouver dans les monographies sur la théorie des fonctions réelles, il y en a même qui font partie des manuels. Tous les analystes conviendront de ce que ces faits ne rendent pas superflu l'étude des publications originales; celui qui désire étudier la genèse des idées et s'enfoncer dans la profondeur de celles-ci, aura à les consulter dans la forme dans laquelle l'auteur même les a présentées. On ne peut donc que saluer avec joie la parution de ce recueil qui facilite l'accès des travaux d'un des plus illustres analystes de notre époque.

Á. Császár (Budapest)

R. W. Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum (Wissenschaft und Kultur, Bd. 10), 223 Seiten, mit 54 Figuren, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.

Die Entwicklung der Mathematik und der Physik in den letzten hundert Jahren — wir denken dabei insbesondere an die Relativitätstheorien von Einstein — hat unsere wissenschaftliche Auffassung des Raumes auf grundlegende Weise umgestaltet. Die neu entstandenen Begriffe, wie der der mehrdimensionalen Räume, sind in der Weiterentwicklung der Geometrie von entscheidender Bedeutung geworden, die man auch in der mathematischen Beschreibung der Naturgesetze nicht entbehren kann. Die abstrakten Begriffe der Wissenschaft sind sogar gewissermaßen auch in die „öffentliche Meinung" eingedrungen; über die „vierte Dimension" hat man z. B. eine Unmenge von Werken, Artikeln, Notizen geschrieben, von wissenschaftlichen oder halbwissenschaftlichen bis zu scherzhaften im Stil der „Fliegenden Blätter."

Verf. war ein aktiver Teilnehmer der großen wissenschaftlichen Arbeit, die zur Ausgestaltung der neuen Begriffe geführt hat, und so nimmt der Mathematiker-Leser sein Buch mit gesteigertem Interesse in die Hände. Das Buch — eine Entwicklung und Umarbeitung des 1929 bei Vieweg in Braunschweig unter demselben Titel erschienenen Werkes — ist aber in erster Reihe dem gebildeten großen Publikum bestimmt, sein Hauptziel ist die Neugier dieses Publikums zu vertiefen und zu befriedigen. Immerhin wird vom Leser eine gewisse Geschultheit im mathematischen Denken gefordert, eine Vertrautheit mit einigen mathematischen Begriffen und Sätzen (auf S. 107/108 wird z. B. die Differentialgleichung der geodätischen Linien in einer gekrümmten Metrik angeführt). Doch kann man ja die Mathematik ohne Mathematik — auf dem „Wege der Könige" nicht kennen lernen. Jedes Werk, das die Wissenschaft verbreiten will (ich habe absichtlich nicht „popularisieren" gesagt), steht vor einem Dilemma: entweder bleibt man an der Oberfläche um völlig verständlich zu sein, oder aber spricht man auch über tiefer liegende Dinge auf die Gefahr hin, nicht recht verstanden zu werden.

Kapitel I *(Die Grundlagen)* dient zur Vorbereitung. Sich vorwiegend auf die koordinatengeometrische Methode stützend, zeigt Verf., daß der vierdimensionale Raum zwar eine abstrakte mathematische Konstruktion ist, doch die Struktur gewisser konkreten Mannigfaltigkeiten spiegelt.

Kapitel II *(Das Feenreich der Geometer)* umfaßt ein recht beträchtliches Erkenntnismaterial. Solche grundlegende Begriffe, wie die der linearen Unterräume des vierdimensionalen Raumes, ihrer Durchschnitts- und Verbindungsräume, ihrer Parallelheit und Orthogonalität usw. werden auf klare Weise eingeführt und verständlich gemacht. Es wird auch die Möglichkeit einer Darstellung in der zweidimensionalen Ebene besprochen. Die vierdimensionalen Simplexe und Polytope sowie auch einige nichtlineare Gebilde werden eingehend behandelt. Man spricht sogar auch über die Einbettung der dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie in den vierdimensionalen euklidischen Raum.

Kapitel III *(Raum und Zeit)* behandelt die Entwicklung des Begriffs des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, und die Raumbegriffe der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie. Es wird betont, daß die Einsteinsche Geometrie nur ein spezieller Fall von allgemeineren Differentialgeometrien ist.

Die beiden letzten Kapitel (IV. *Der R_4 und andere Wissensgebiete*, V. *Der R_4 in der phantastischen Literatur)* sind zwar vielleicht eine zerstreuende Lektüre, haben aber mit der Wissenschaft nichts zu tun: sie zeigen nur, zu welchen Phantasmagorien und Dummheiten das Mißverständnis wissenschaftlicher Begriffe unter den Laien führen kann.

F. Kárteszi (Budapest)

Carl Ludwig Siegel, Vorlesungen über Himmelsmechanik (Grundlehren d. math. Wissenschaften, Bd. 85), VIII + 212 Seiten, Berlin, Springer-Verlag, 1956.

Wie auch im Vorworte betont wird, hat der Verfasser bei seinen Vorlesungen hauptsächlich den Zweck verfolgt, diejenigen Sätze und Methoden der Theorie der Differentialgleichungen herauszuarbeiten, welche zur Darstellung der Sundmannschen Ergebnisse, der periodischen Lösungen und der Stabilitätsfragen in der Himmelsmechanik nötig sind.

Das erste Kapitel bringt die notwendigen Vorkenntnisse aus der Transformationstheorie der kanonischen Differentialgleichungen. Dann wird durch eine von Levi-Cività herrührende Transformation der binäre Stoß beim Dreikörperproblem regularisiert. Mit den so gewonnenen Hilfsmitteln gibt dann der Verf. eine bequem lesbare Darstellung der Sundmannschen Ergebnisse zum Dreikörperproblem. Zuerst werden die Hilfssätze über die untere Grenze des Dreieckumfanges und die obere Grenze der kleinsten Geschwindigkeit hergeleitet. Diese Hilfssätze genügen dann zum Beweis des Hauptsatzes, welcher besagt, daß — im Falle eines nichtverschwindenden Dralles — die Koordinaten der drei Körper und die Zeit sich in konvergente Potenzreihen einer Hilfsvariable entwickeln lassen.

Das zweite Kapitel beginnt mit der Herleitung der Lagrangeschen periodischen Lösungen. Nach einem allgemeinen Existenzsatz über periodische Lösungen folgen die eigenen Ergebnisse des Verfassers über die periodischen Lösungen des Dreikörperproblems in der Nähe der Kreisbahnlösungen. Auch die Poincarésche Fixpunktmethode wird in diesem Kapitel geschildert.

Im dritten Kapitel werden zuerst die klassischen Stabilitätsuntersuchungen von Dirichlet und Ljapunov erläutert.

Bei diesen Untersuchungen wird der quadratische Teil der analytisch vorausgesetzten Hamiltonschen Funktion in der Umgebung einer Gleichgewichtsstelle durch eine lineare kanonische Transformation in eine in den Produkten der konjugierten Variabelpaaren homogene lineare Form transformiert. Als naturgemäße Weiterentwickelung dieser Idee erscheint beim Verf. die analytische kanonische Transformation in einer solchen Normalform, bei welcher die Hamiltonsche Funktion nur von den Produkten der konjugierten Variabelpaaren abhängt. Die Konvergenz dieser viel versprechenden und formal immer möglichen Transformation wird aber gerade durch die eigene Untersuchungen des Verf. als eine Ausnahmefall erwiesen. In diesem Kapitel werden auch topologische Methoden (Wiederkehrsatz) besprochen.

Der Verfasser, der die Entwicklung auf diesem Gebiete durch eigene Arbeiten wesentlich gefördert hat, gibt in diesen Vorlesungen einen sehr guten Überblick über die neueren Methoden und Resultate der Himmelsmechanik. Die Darstellung ist elegant und durch Benützung von Vektoren, Matrizen und komplexer Koordinaten sehr prägnant. Das Buch kann, besonders für vorwiegend mathematisch interessierte Leser, wärmstens empfohlen werden.

E. Egerváry (Budapest)

H. Boerner, Darstellungen von Gruppen (Die Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. LXXIV), S. XI + 287, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.

Das Ziel des vorliegenden Buches ist es, eine Einführung in diejenigen Teile der Darstellungstheorie der Gruppen zu bieten, die Anwendungen in der Physik haben. Stoffauswahl und Behandlungsweise werden demgemäß von praktischen Gesichtspunkten geführt; der größte Teil des Buches beschäftigt sich mit der Bestimmung der Darstellungen von wichtigeren Gruppen (unimodulare Gruppe, unitäre Gruppe usw.). Unter Darstellung ist immer eine endlichdimensionale zu verstehen. Die Entwicklung der allgemeinen Theorie (invariantes Integral, Theorie der Lieschen Gruppen) wird immer nur soweit geführt, als diese zu diesem Hauptziel des Buches erforderlich ist. Diese starke Abgrenzung der Behandlungsweise des Stoffes ist aber nicht immer glücklich zu nennen; gewiß hätte eine Einordnung des vorgetragenen Materials in größere Zusammenhänge auch aus dem Gesichtspunkt der Zielsetzung des Buches pädagogische Vorteile. Auch die Beschränkung auf endlichdimensionale Darstellungen scheint nicht durch die Bedürfnisse der Physik begründet zu sein. Trotzdem ist sicherlich zu erwarten, daß dieses äußerst klar und sorgfältig geschriebene Buch vielen eine genußreiche wenn auch nicht ganz leichte Anleitung zu diesem reizvollen Gebiet der Mathematik geben wird.

Das Buch besteht aus elf Kapiteln. Vor jedem Kapitel wird der Inhalt desselben mit Hinweisen auf den Zusammenhang mit anderen Kapiteln kurz zusammengestellt. Das erste

Kapitel behandelt die benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der Matrizen. Das zweite bringt die Elemente der Theorie der endlichen und kontinuierlichen Gruppen. Im dritten Kapitel werden die Hauptsätze der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen mit Verwendung der Gruppenalgebra entwickelt, und dann die entsprechenden Tatsachen bei kontinuierlichen Gruppen behandelt. Kapitel IV gibt die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, Kapitel V berechnet die irreduziblen Darstellungen der vollen linearen, unimodularen und unitären Gruppen. Kapitel VI beschäftigt sich mit dem Zusammenhang der Charaktere der symmetrischen Gruppe mit denen der vollen linearen Gruppe. Kapitel VII beginnt mit einer Betrachtung über die Zusammenhangsverhältnisse der Drehgruppe; dann folgt die Bestimmung der eindeutigen Darstellungen derselben mit Heranziehung von transzendenten Methoden. Kapitel VIII behandelt dann die zweideutigen Darstellungen mit Hilfe der Cliffordschen Algebren; auch weitere spezielle Algebren werden betrachtet, die in der Physik von Bedeutung sind. Endlich beschäftigt sich Kapitel IX mit der Darstellungstheorie der Lorentzgruppe.

Zum Studium des Buches sind wenig Vorkenntnisse erforderlich; fast alle nötigen Hilfsmittel werden voll entwickelt.

L. Pukánszky (Szeged)

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Vierte, erweiterte und berichtigte Auflage mit 43 Abbildungen, einer Farbtafel und einem Anhang (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Math. Reihe Bd. 22), XI + 271 Seiten, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.

Dieses Buch ist von einem Anhang und einigen unwesentlichen Korrektionen abgesehen eine unveränderte Auflage der in der „Gelben Sammlung" von Springer erschienenen dritten Auflage. In dem Anhang ist die Herstellung von Gruppenbildern besprochen und der Unterschied zwischen der funktionentheoretischen Auffassung und der Substitution erörtert. Das Buch ist mit zu dem Siebeneck gehörigen farbigen Kleinschen Kreisfigur (als Titelbild) dekoriert.

Dieses schon klassisch gewordenes Werk wird in seiner schönen neuen äußerlichen Gestaltung gewiß noch viele Freunde der Gruppentheorie gewinnen.

J. Szép (Szeged)

Michio Suzuki, Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Reihe: Gruppentheorie), 96 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956.

Lattice theory, one of the most recent branches of algebra, has many applications in various fields of mathematics, of which perhaps the most important belong to group theory. It is a well known fact that the set of all subgroups of a group G form a lattice $L(G)$ with respect to the operations of forming unions and intersections. Thus it is a natural idea to try getting information about the structure of a group by investigating its subgroup lattice. This particular field of investigation within group theory, whose history does not go back further than some thirty years, is already rich with important results. The present work is the first systematic account on this subject.

The first chapter is devoted to groups with a special kind of subgroup lattice. The results are concerned mostly with finite groups. Thus for instance the finite groups G with modular, lower semi-modular, upper semi-modular, complemented and relatively complemented $L(G)$, respectively, are characterized. Sufficient conditions are given for infinite groups to have a modular or upper semi-modular subgroup lattice. The structure of distributive groups (groups the subgroup lattice of which is distributive) is determined completely. These results lead in particular to a characterization of finite quasi-Hamiltonian groups and to a theorem stating that any quasi-Hamiltonian group is metabelian.

The second chapter deals with the isomorphisms of subgroup lattices. First projectivities (i. e. isomorphic mappings of a subgroup lattice $L(G)$ of a group G onto a subgroup lattice $L(H)$ of a group H) are discussed. For finite groups a theorem of Jones answers completely the question under what circumstances is a projectivity of G onto H induced by a group isomorphism. In this way results concerning abelian, locally free and modular groups, respectively, are discussed here. From the results concerning the index preserving projectivities of a group (i. e. projectivities such that $(U:V)=\varphi(U):\varphi(V))$ holds for any cyclic subgroup U of G and every subgroup V of U) one obtains also the theorem stating that every projectivity maps finite perfect groups onto finite perfect ones. A similar result holds for finite solvable groups. This chapter is closed by a section on so called "situation preserving mappings", which were investigated first by A. Rottländer, as a matter of fact, the theory of subgroup lattices began with her investigations in 1928.

The third chapter is devoted to the homomorphisms of subgroup lattices. A homomorphic mapping φ of the subgroup lattice $L(G)$ of G onto a lattice L is called an L-homomorphism of G onto L. φ is called complete, if $\varphi(\bigcap_\lambda U_\lambda)=\bigcap_\lambda \varphi(U_\lambda)$ and $\varphi(\bigcup_\lambda U_\lambda)= =\bigcup_\lambda \varphi(U)$ hold for any number of subgroups. First the complete L-homomorphisms onto cyclic groups (i. e. onto the $L(Z)$ of a cyclic group Z) are discussed. Sufficient conditions are given under which a homomorphism of a group G onto H induces an L-homomorphism of G. From the results concerning the L-homomorphism of finite G groups one obtains an interesting theorem stating that if φ is an L-homomorphism of a perfect finite group onto a subgroup lattice $L(H)$ of a group H, then this group H is perfect. A similar result holds for finite solvable groups. This chapter also contains Zappa's results on meet-homomorphisms. Finally, the structure of finite groups admitting a proper L-homomorphism is treated.

The last short chapter deals with the dualisms of subgroup lattices. A dualism of the group G onto H means a dual-isomorphism between their subgroup lattices, and H is called a dual of G. A theorem of Baer determines completely the structure of abelian groups with duals. The book closes with investigations of the author, characterizing the structure of the nilpotent and the finite solvable groups with duals respectively.

The book is completed by a rich bibliography.

Of course, the author could not aim at completeness, yet he succeeds in giving a systematic and very clear presentation of the subject. Several results of the author, published here for the first time, and numerous original ideas enhance the value of the book. It will undoubtedly greatly contribute to further progress in the investigation of groups via their subgroup lattices.

J. Szendrei (Szeged)