ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

TOMUS XVIII

FASC. 3—4

REDIGUNT

L. KALMÁR, L. RÉDEI, B. SZ.-NAGY

SZEGED, 1. XII. 1957.

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

18. KÖTET

3—4. FÜZET

SZERKESZTIK

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

FELELŐS SZERKESZTŐ

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

SZEGED, 1957. december 1.

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation).

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.[1])

In dieser Mitteilung werden einige Fragen betreffs der Summation der quadratisch integrierbaren orthogonalen Entwicklungen behandelt.

Bekanntlich folgt aus der (C, α)-Summierbarkeit einer Reihe (für irgendeinen Parameterwert $\alpha > 0$), auch ihre Abel-Summierbarkeit (siehe z. B. A. ZYGMUND [1], 43). Umgekehrt, ist eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung im Grundintervall fast überall Abel-summierbar, so ist sie für jeden Parameterwert $\alpha > 0$ im Grundintervall fast überall (C, α)-summierbar (A. ZYGMUND [2]). Auf Grund dieser Sätze sind für quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklungen die Abelsche Summierbarkeit und die (C, α)-Summierbarkeit (für jeden Parameterwert $\alpha > 0$), abgesehen von einer Menge vom Maße Null, miteinander äquivalent.

So kann man in den Annahmen bzw. Behauptungen unserer Sätze die $(C, 1)$-Summierbarkeit mit (C, α)-Summierbarkeit $(\alpha > 0)$, oder auch mit Abelscher Summierbarkeit ersetzen.

Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthogonales und normiertes Funktionensystem. Die n-te Partialsumme der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

wird mit $s_n(x)$ bezeichnet:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Genügt die Koeffizientenfolge der Bedingung $\{c_\nu\} \in l^2$, d. h. ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 < \infty, \tag{2}$$

[1]) Bezüglich der gebrauchten Bezeichnungen und Begriffe verweisen wir auf Mitteilung I (K. TANDORI [1]).

so gilt bekanntlich fast überall die Abschätzung

(3) $$s_n(x) = o(\log n)$$

(H. RADEMACHER [1], 122).

In Mitteilung I (Satz III) haben wir gezeigt, daß diese Abschätzung im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

Wir setzen nun, außer der Bedingung (2), noch voraus, daß die Reihe (1) im Grundintervall fast überall $(C, 1)$-summierbar ist. Bekanntlich konvergiert dann die Teilfolge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall (A. N. KOLMOGOROFF [1][2])), und so könnte man hoffen, daß in diesem Falle die Abschätzung (3) verbessert werden kann. Wir werden beweisen, daß dies im allgemeinen unmöglich ist. Nämlich gilt der

Satz I. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$w(n) = o(\log n)$$

erfüllt wird. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, derart, daß die orthogonale Reihe

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist und jedoch fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty$$

gilt. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

D. MENCHOFF [1] hat den folgenden Satz bewiesen: *Ist*

(5) $$\sum_{\nu=4}^{\infty} c_\nu^2 (\log \log \nu)^2 < \infty,$$

so ist die orthogonale Reihe (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.*

Er hat auch gezeigt, daß die Bedingung (5) im allgemeinen nicht geschwächt werden kann. Es besteht nämlich der folgende Satz:

Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge mit $W(n) = o(\log \log n)$. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes

---

2) Es wirt dort bewiesen, daß für jede quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung der Unterschied der n_k-ten $(C, 1)$-Mittel und der n_k-ten Partialsumme fast überall gegen Null strebt, wenn $n_{k+1}/n_k \geqq q > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist.

Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angegeben werden, daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n) < \infty$$

ist und die Reihe (4) *nirgends* $(C, 1)$*-summierbar ist.*

Wir werden diesen Menchoffschen Satz folgendermaßen verschärfen:

Satz II. *Es sei eine positive Zahlenfolge* $\{a_n^*\} \in l^2$ *vorgegeben, für die die Bedingungen*

$$\sqrt{n}\, a_n^* \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}^* \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log\log n)^2 = \infty \tag{7}$$

erfüllt sind. Man kann dann ein im Grundintervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angeben, daß die Reihe* (4) *für jede solche Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *fast überall nicht* $(C, 1)$*-summierbar ist, welche die Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{8}$$

und $a_n \geqq \eta a_n^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *(mit einem konstanten* $\eta > 0$*) erfüllt.*

Dieser Satz und der obige Menchoffsche Satz ergeben also folgendes:

Es sei $\{c_\nu\}$ *eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung* $\sqrt{\nu}\, c_\nu \geqq \sqrt{\nu+1}\, c_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *erfüllt. Dann ist die Menchoffsche Bedingung* (5) *nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür, daß die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar ist.*

Der Satz II beantwortet ein Problem von G. Alexits, ob es eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung mit positiver monoton nichtwachsender Koeffizientenfolge gibt, die fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Aus Satz II folgt sogar, daß es eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung mit positiver, monoton nichtwachsender und (nach unten) konvexer Koeffizientenfolge gibt, die fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Nach Satz II gibt es nämlich z. B. ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(\log n)(\log\log n)^3}}\, \Phi_n(x)$$

fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.

Es sei bemerkt, daß aus Bedingung (6) folgt, daß die Folge $\{a_n^*\}$ monoton abnehmend ist. Für die Gültigkeit des Satzes II ist aber die Bedingung nicht genügend, daß die Folge $\{a_n^*\}$ monoton abnehmend sei. Es gibt nämlich eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge $\{a_n^*\}$, die die Bedingung (7) erfüllt, und doch die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist (siehe G. ALEXITS [1]).

Endlich soll bemerkt werden, daß die Bedingung (8) keine wesentliche Beschränkung bedeutet. Ist nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty,$$

so ist die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$$

mit jeder Toeplitzschen Methode fast überall nicht-summierbar (A. ZYGMUND [3]).

Es kann leich gezeigt werden, daß Satz II den entsprechenden Menchoffschen Satz enthält.

Es sei nämlich $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung $W(n) = o(\log\log n)$ erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $W(n) \leqq \log\log n$ für jedes $n \geqq 4$ angenommen werden. Da

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \infty$$

ist, so kann eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_0 = 4)$ definiert werden, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\frac{W(n)}{\log\log n} \leqq \frac{1}{m} \quad (N_{m-1} \leqq n < N_m;\ m = 1, 2, \ldots),$$

$$(1 <) \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m - 1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \leqq \sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es sei

$$v^2(m) = \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m - 1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Offenbar ist $\{v(m)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Es sei $a_0 = 1,\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2)$ und

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(\log n)(\log\log n)^3}\, v(m)} \quad (N_{m-1} \leqq n < N_m;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Offenbar ist $\sqrt{n}\, a_n \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\{a_n\} \in l^2$ und

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{v^2(m)} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \sum_{m=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

So ergibt sich mit Anwendung des Satzes II, daß ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ existiert, für welches die Reihe (4) fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Wenn wir die Werte der Funktionen $\{\Phi_n(x)\}$ in einer Menge vom Maß Null auf geeignete Weise verändern (z. B. auf dieser Menge $\Phi_n(x) = \infty$ $(n=0, 1, \ldots)$ setzen), können wir erreichen, daß diese Reihe in $[a, b]$ nirgends $(C, 1)$-summierbar ist.

Andererseits ist

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2\, W^2(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{W^2(n)}{n(\log n)(\log\log n)^3 v^2(m)} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 v^2(m)} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Also erfüllen dieses orthonormierte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und diese Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die in dem Menchoffschen Satz vorkommenden sämtlichen Bedingungen. Damit wurde gezeigt, daß der Menchoffsche Satz aus dem Satz II folgt.

Ob das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ im Satz II gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann, ist noch eine offene Frage.

G. ALEXITS [1] hat neulich den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{a_n^*\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\sqrt{n}} < \infty \tag{9}$$

erfüllt. Ist $c_\nu = O(a_\nu^*)$, so ist für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ die Reihe (1) *fast überall $(C, 1)$-summierbar.*

G. ALEXITS hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Bedingung (9) nicht geschwächt werden kann. Bezüglich dieser Vermutung werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz III. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sqrt{n} = o(w(n))$$

erfüllt. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall

$[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, derart, daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w(n)} < \infty$$

ist, und die Reihe (4) *im Intervall* $[a, b]$ *fast überall nicht* $(C, 1)$*-summierbar ist.*

Ob das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann, ist noch eine offene Frage.

Herrn Prof. Á. CSÁSZÁR, der diese Arbeit in Manuskript gelesen und mit einigen wertvollen Bemerkungen zur Vervollständigung derselben beigetragen hat, möchte ich meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Hilfssätze.

Zum Beweis unseres Sätze werden wir einige Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz. I. *Es seien* c *und* $p(\geqq 2)$ *gegebene natürliche Zahlen. Dann kann ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{f_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ *im Intervall* $[0, 5]$ *angegeben werden, so daß die folgende Bedingung erfüllt wird:*

Für jedes $x \in \left(\frac{2}{c}, \frac{3}{c}\right)$ *gibt es eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m(x) (< p)$, *so das die Funktionenwerte* $f_1(c, p; x), \ldots, f_{p+m(x)}(c, p; x)$ *positiv sind und die Ungleichung*

$$f_1(c, p; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(c, p; x) \geqq A\sqrt{cp} \log p$$

besteht, wo A *eine von* c, p *und* x *unabhängige positive Zahl ist.*

Dieser Hilfssatz ist als Hilfssatz II in Mitteilung I enthalten.

Hilfssatz II. *Es sei* $p(\geqq 4)$ *eine natürliche Zahl. Es existiert eine von* p *unabhängige Konstante* $\beta(> 2)$ *derart, daß im Intervall* $[-1, \beta]$ *ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\{g_l(p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, p^2)$ *definiert werden kann, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) $$|g_l(p; x)| \leqq M \qquad (l = 1, \ldots, p^2; \ -1 \leqq x \leqq \beta)$$

mit einer von p *unabhängigen Konstanten* M,

b) *für jedes* $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *gibt es eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m(x) (< p^2)$, *so daß die Funktionenwerte* $g_1(p; x), \ldots, g_{m(x)}(p; x)$ *positiv sind und*

$$g_1(p; x) + \cdots + g_{m(x)}(p; x) \geqq Cp \log p$$

mit einer von p *und* x *unabhängigen positiven Konstanten* C *gilt.*

Dieser Hilfssatz ist auch in Mitteilung I enthalten (der Fall $c=1$ von Hilfssatz II').

Hilfssatz III. *Es seien* $c, p(\geqq 2), a_1, \ldots, a_{2p}$ *gegebene natürliche Zahlen. Es sei* $s_0=0$, $s_i=a_1+\cdots+a_i$ $(i=1, \ldots, 2p)$ *und* $\bar{a}_l=a_i$ *für* $s_{i-1}<l\leqq s_i$ $(i=1, \ldots, 2p)$. *Dann kann ein orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen* $h_l(x)=h_l(c, p, \{a\}; x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ *im Grundintervall* $[0, 1]$ *angegeben werden, so daß die folgende Bedingung erfüllt wird:*

es gibt eine einfache Menge[3]) $E=E(c, \{a\})\subset[0, 1]$ *vom Maße* $\mu(E)=\frac{1}{5c}$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $x\in E$ *eine von* x *abhängige natürliche Zahl* $m(x)\,(<2p)$ *derart gibt, daß die Funktionenwerte* $h_1(x), \ldots, h_{s_{m(x)}}(x)$ *nichtnegativ sind und*

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}}h_1(x)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}}h_{s_{m(x)}}(x)\geqq\sqrt{5}A\sqrt{cp}\log p$$

gilt, wo A *die im Hilfssatz I vorkommende positive Konstante bedeutet.*

Beweis von Hilfssatz III. Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in $N=a_1\ldots a_{2p}$ gleiche Teile; die einzelnen Teilintervalle seien $I_\varrho=[u_\varrho, v_\varrho]$ $(\varrho=1, \ldots, N)$, also ist $\mu(I_\varrho)=\frac{1}{N}$ $(\varrho=1, \ldots, N)$.

Dann sei

$$f_{l,\varrho}(x)=\begin{cases}\sqrt{5}f_l\left(c, p; 5\dfrac{x-u_\varrho}{v_\varrho-u_\varrho}\right) & \text{für}\quad u_\varrho<x<v_\varrho,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(\varrho=1, \ldots, N;\ l=1, \ldots, 2p)$, wo $f_l(c, p; x)$ $(l=1, \ldots, 2p)$ die sich mit Anwendung des Hilfssatzes I ergebenden Funktionen sind. Es sei ferner

$$E_\varrho=\left[\frac{v_\varrho-u_\varrho}{5}\frac{2}{c}+u_\varrho,\quad \frac{v_\varrho-u_\varrho}{5}\frac{3}{c}+u_\varrho\right) \qquad (\varrho=1, \ldots, N).$$

Offensichtlich ist für $\varrho=1, \ldots, N$

$$\int_{I_\varrho} f_{i,\varrho}(x)f_{j,\varrho}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für}\quad i\neq j,\\ \dfrac{1}{N} & \text{für}\quad i=j,\end{cases} \tag{1.1}$$

und

$$\mu(E_\varrho)=\frac{1}{5c}\frac{1}{N}. \tag{1.2}$$

Für jedes $x\in E_\varrho$ gibt es nach Hilfssatz I eine von x abhängige natürliche

[3]) Eine Punktmenge werden wir *einfach* nennen, wenn sie die Vereinigungsmenge endlich vieler Intervalle ist.

Zahl $m(x)$ $(< 2p)$, so daß die Funktionenwerte $f_{1,\varrho}(x), \ldots, f_{m(x),\varrho}(x)$ positiv sind und

$$(1.3) \qquad f_{1,\varrho}(x)+\cdots+f_{m(x),\varrho}(x) \geqq \sqrt{5}\, A \sqrt{cp} \log p$$

$(\varrho=1, \ldots, N)$ gilt.

Es sei

$$h_{s_{i-1}+j}(x)=\sqrt{a_i} \sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}} f_{i,\varrho}(x) \qquad (j=1, \ldots, a_i;\, i=1, \ldots, 2p)$$

und

$$E=E(c,\{a\})=\bigcup_{\varrho=1}^{N} E_\varrho .$$

Es ist evident, daß die so definierten Funktionen $h_l(x)=h_l(c,p,\{a\};x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ Treppenfunktionen sind, und nach (1.2) $\mu(E)=\frac{1}{5c}$ ist.

Es sei $1 \leqq l \leqq s_{2p}$ ein beliebiger Index. Ist $l=s_{i-1}+j$, so ist nach der Definition und (1.1)

$$\int_0^1 h_l^2(x)\,dx=a_i \sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}} \int_{I_\varrho} f_{i,\varrho}^2(x)\,dx=1,$$

also sind die Funktionen $h_l(x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ im Intervall $[0,1]$ normiert.

Nun seien l_1 und l_2 zwei verschiedene Indizes, $1 \leqq l_1 \leqq s_{2p}$, $1 \leqq l_2 = s_{2p}$, $l_1 \neq l_2$. Ist $l_1=s_{i_1-1}+j_1$ und $l_2=s_{i_2-1}+j_2$, so ist entweder $i_1 \neq i_2$, oder $i_1=i_2$, $j_1 \neq j_2$. Im ersten Fall ist nach der Definition

$$(1.4) \qquad \int_0^1 h_{l_1}(x)\, h_{l_2}(x)\,dx=\sqrt{a_{i_1}a_{i_2}} \sum_\varrho \int_{I_\varrho} f_{i_1,\varrho}(x) f_{i_2,\varrho}(x)\,dx,$$

wo die Summation auf diejenigen Indizes ϱ erstreckt werden soll, die die Bedingungen

$$(j_1-1)\frac{N}{a_{i_1}}<\varrho \leqq j_1\frac{N}{a_{i_1}}, \; (j_2-1)\frac{N}{a_{i_2}}<\varrho \leqq j_2\frac{N}{a_{i_2}}$$

erfüllen. Auf Grund von (1.1) ist die rechte Seite von (1.4) gleich 0. (Wenn kein diesen Bedingungen entsprechendes ϱ existiert, dann ist die Summe auf der rechten Seite leer, daher ist sie gleich 0.) In dem zweiten Fall ist es nach der Definition klar, daß das Integral (1.4) gleich 0 ist. Daher sind die Funktionen $h_l(x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ im Intervall $[0,1]$ aufeinander orthogonal.

Sei $x \in E$. Dann gibt es ein Index ϱ $(1 \leqq \varrho \leqq N)$, so daß $x \in E_\varrho$ ist, und folglich gibt es nach der Definition der Funktionen $h_l(x)$ zu jedem

i $(1 \leqq i \leqq 2p)$ einen wohlbestimmten Index $j(i, x)$ $(1 \leqq j(i, x) \leqq a_i)$, so daß

$$h_{s_{i-1}+j(i,x)}(x) = \sqrt{a_i}\, f_{i,\varrho}(x)$$

und

$$h_{s_{i-1}+j}(x) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq j(i, x),\ 1 \leqq j \leqq a_i$$

gilt. Daraus folgt auf Grund von (1. 3), daß es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(< 2p)$ gibt, derart, daß

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}} h_1(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1}} h_{j(1,x)}(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{m(x)}}} h_{s_{m(x)-1}+j(m(x),x)}(x) =$$

$$= f_{1,\varrho}(x) + \cdots + f_{m(x),\varrho}(x) \geqq \sqrt{5}\, A \sqrt{cp} \log p$$

ist.

Also erfüllen die so definierten Funktionen $h_l(x) = h_l(c, p, \{a\}; x)$ $(l = 1, \ldots, s_{2p})$ die im Hilfssatz III gestellten sämtlichen Bedingungen.

Damit ist der Hilfssatz III vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz I.

Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung $w(n) = o(\log n)$ erfüllt. Dann kann man eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\overline{w}(n)\}$ wählen, derart, daß

(2. 1) $$w(n) = o(\overline{w}(n))$$

und

(2. 2) $$\overline{w}(n) = o(\log n)$$

gilt. Zum Beispiel erfüllt die Folge

$$\overline{w}(n) = w(n) \left(\frac{\log n}{w(n)} \right)^{1/2} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$\overline{w}(0) = \overline{w}(1) = \overline{w}(2)$ diese Bedingungen.

Nach (2. 2) kann eine aus geraden Zahlen bestehende Folge $(4 \leqq) n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ angegeben werden, so daß

(2. 3) $$\frac{\overline{w}(n)}{\log n} \leqq \frac{1}{m^2} \qquad (n > N_m;\ m = 1, 2, \ldots)$$

gilt; wobei

$$N_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} \qquad (m \geqq 1)$$

gesetzt wird (wir setzen noch $N_0 = 0$). Da $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1}$ ist, so gilt

(2. 4) $$\frac{N_{m+1}}{N_m} > \frac{2^{n_{m+1}}}{2^{n_m+1}} \geqq 2 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es sei danach $a_0 = \cdots = a_{N_1}$ und

$$a_n = \frac{1}{m^2 \sqrt{N_{m+1} - N_m}} \qquad (N_m \leqq n < N_{m+1};\ m = 1, 2, \ldots).$$

Es ist klar, daß

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty \tag{2.5}$$

gilt.

Wir werden nun im Grundintervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ von Treppenfunktionen und eine Folge $\{G_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ von einfachen Teilmengen aus $[a, b]$ definieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes n gilt

$$|\Phi_n(x)| \leqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{b-a}} M \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{2.6}$$

wo β und M die im Hilfssatz II vorkommenden positiven Zahlen sind;

b) für jedes $x \in G_m$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x)\,(< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m+1}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und

$$|\Phi_{N_m+1}(x) + \cdots + \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{2\sqrt{b-a}} C \sqrt{N_{m+1} - N_m} \log(N_{m+1} - N_m) \tag{2.7}$$

gilt, wobei C die im Hilfssatz II vorkommende positive Zahl bedeutet;

c) die Mengen $\{G_m\}$ sind stochastisch unabhängig, und G_m hat das Maß

$$\mu(G_m) = \frac{b-a}{2(\beta+1)}. \tag{2.8}$$

Es seien $g_l(p; x)$ $(l = 1, \ldots, p^2)$ die in Hilfssatz II vorkommenden Funktionen. Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$g_l(p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{\beta+1}\, g_l\left(p; -1 + (\beta+1)\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, p^2)$ und

$$G(I) = \left[\frac{v-u}{\beta+1}\left(\frac{1}{2} + 1\right) + u,\ \frac{v-u}{\beta+1} 2 + u\right).$$

Offensichtlich ist

$$\int_I g_i(p, I; x)\, g_j(p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\mu(G(I)) = \frac{\mu(I)}{2(\beta+1)}, \tag{2.10}$$

und nach dem Hilfssatz II gibt es für jedes $x \in G(I)$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(<p^2)$ derart, daß die Funktionenwerte $g_1(p, I; x), \ldots$ $\ldots, g_{m(x)}(p, I; x)$ positiv sind und die Ungleichung

$$g_1(p, I; x)+\cdots+g_{m(x)}(p, I; x) \geqq \sqrt{\beta+1}\, C p \log p \tag{2.11}$$

besteht.

Es sei $\Phi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Wir bezeichnen mit I' und I'' die zwei Hälften des Intervalls $[a, b]$. Wir wenden den Hilfssatz II für $p = 2^{n_1/2}$ an. Es sei

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(g_l(p_1, I'; x) - g_l(p_1, I''; x)\right) \qquad (1 \leqq l \leqq N_1)$$

und

$$G_0 = G(I') \cup G(I'').$$

Nach dem Hilfssatz II sind die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_1)$ Treppenfunktionen, die die Ungleichung (2.6) erfüllen. Nach (2.9) und der Definition kann leicht gezeigt werden, daß sie in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden. Ferner sind nach (2.10) und (2.11) auch (2.7) und (2.8) für $m = 0$ erfüllt. Offensichtlich ist die Menge G_0 einfach.

Es sei $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_k)$ und die einfachen Mengen $G_m (0 \leqq m \leqq k-1)$ bereits definiert wurden, undzwar so, daß diese Funktionen in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, die Ungleichung (2.6) erfüllen und daß auch die Bedingungen b) und c) für $m = 0, \ldots, k-1$ erfüllt sind, speziell die Mengen $G_m (0 \leqq m \leqq k-1)$ stochastisch unabhängig sind.

Dann gibt es eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, auf denen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_k)$ konstant ist und jede Menge $G_m (0 \leqq m \leqq k-1)$ als die Vereinigung von einigen I_ϱ entsteht. Wir bezeichnen die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ mit I'_ϱ und I''_ϱ.

Nun werden wir den Hilfssatz II mit $p = p_{k+1} = \sqrt{N_{k+1} - N_k} = 2^{n_{k+1}/2}$ an. Es sei gesetzt

$$\Phi_{N_k+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{r} g_l(p_{k+1}, I'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(p_{k+1}, I''_\varrho; x)\right)$$

$(l = 1, \ldots, N_{k+1} - N_k)$ und

$$G_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} (G(I'_\varrho) \cup G(I''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz II sind auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(N_k < n \leqq N_{k+1})$ Treppenfunktionen, die die Ungleichung (2.6) erfüllen. Auf Grund der Definition und der Relation (2. 9) folgt es leicht, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_{k+1})$ ein orthonormiertes System in $[a, b]$ bilden. Ferner ist es nach (2. 10) und (2. 11) klar, daß (2. 7) und (2. 8) auch für $m = k$ gelten. Es ist ferner klar, daß auch die Menge G_k einfach ist und die Mengen $G_0, \ldots, G_k$ stochastisch unabhängig sind.

Danach ergibt sich mit vollständiger Induktion ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{G_m\}$, für welche die Bedingungen a)—c) erfüllt sind.

Es sei $x \in G_m$. Nach der Bedingung b) existiert eine natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß (2. 7) erfüllt wird. Daraus erhalten wir nach (2. 3) die Abschätzung

$$|a_{N_m+1}\Phi_{N_m+1}(x) + \cdots + a_{N_m+n_m(x)}\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{2\sqrt{b-a}} C \frac{1}{m^2} \log (N_{m+1} - N_m) >$$

$$> \frac{\sqrt{\beta+1}}{4\sqrt{b-a}} C \frac{1}{m^2} \log N_{m+1} \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{4\sqrt{b-a}} C \overline{w}(N_{m+1}). \tag{2.12}$$

Ist $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} G_m$, so wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Nach der Bedingung c) ergibt sich aber, mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} G_m) = b - a$ ist.

Wegen (2. 5) und des in der Einleitung zitierten Satzes von G. Alexits ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Phi_\nu(x)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.

Wir bezeichnen mit $s_n(x)$ die n-te Partialsumme dieser Reihe:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x).$$

Nach (2. 4) erhalten wir mit Anwendung des in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satzes, daß die Folge $\{s_{N_m}(x)\}$ fast überall konvergiert und so nach (2. 1) fast überall

$$s_{N_m}(x) = O(\overline{w}(N_m))$$

gilt. Daraus erhalten wir endlich auf Grund von (2. 1), (2. 12) und den obigen Bemerkungen, daß fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} |s_N(x)| = \infty$$

gilt.

Damit wurde Satz I vollständig bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz II.

Es sei $\{a_n^*\} \in l^2$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$(3.1)\qquad \sqrt{n}\, a_n^* \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}^* \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und

$$(3.2)\qquad \sum_{n=4}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log\log n)^2 = \infty$$

erfüllt. Nach (3.1) kann a_n^* in der folgenden Form geschrieben werden:

$$a_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}\,\lambda_n} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

wo $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist.

Dann ergibt sich mit einfacher Rechnung aus (3.2), daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{\lambda_{2^n}^2} = \infty$$

ist. Wir setzen $l_n = \lambda_{2^n}$ $(n=2,3,\ldots)$ und $N_0=0$, $N_m = 2(2+\cdots+2^m)$ $(m \geqq 1)$. Auf Grund der Monotonität der Folge $\{l_n\}$ erhalten wir mittels einer einfachen Rechnung, daß

$$(3.3)\qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{m+1} \log^2 N_{m+1}}{l_{N_{m+1}}^2} = \infty$$

ist. Es soll bemerkt werden, daß

$$(3.4)\qquad \sqrt{2^{m+1}} > \frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}},\quad m+1 \leqq \frac{1}{3}\log N_{m+1} \qquad (m=0,1,\ldots)$$

ist.

Wir werden nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und eine Folge $\{E_m\}$ $(m=0,1,\ldots)$ von einfachen Teilmengen von $[a,b]$ definieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

ā) für jedes $x \in E_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)\ (< 2^{m+2})$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{2^{N_m+1}+1}(x), \ldots, \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x)$ alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv sind und der Ungleichung

$$(3.5)\qquad \left| \frac{1}{\sqrt{\bar a_1^{(m)}}}\, \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar a^{(m)}_{s^{(m)}_{n_m(x)}}}}\, \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x) \right| \geqq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}}\, A \lambda_{2^{N_m+1}}$$

genügen, wobei A die im Hilfssatz III vorkommende Konstante, $s_0^{(m)}=0$, $s_i^{(m)} = a_1^{(m)} + \cdots + a_i^{(m)}$ $(i=1,\ldots,2^{m+2};\ m=0,1,\ldots)$ und $\bar a_j^{(m)} = a_i^{(m)} = 2^{N_m+i}$ $(s_{i-1}^{(m)} < j \leqq s_i^{(m)})$ bezeichnen;

b) die Mengen E_m $(m=0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(E_m) \geqq \frac{b-a}{10} \min \left\{ 1, \frac{N_{m+1} \log^2 N_{m+1}}{l^2_{N_{m+1}}} \right\} \tag{3.6}$$

Für ein beliebiges, endliches Intervall $I=[u, v]$ setze man

$$h_l(c, p, \{a\}, I; x) = \begin{cases} h_l\left(c, p, \{a\}; \dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l=1, \ldots, s_{2p})$, wo $h_l(c, p, \{a\}; x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ die im Hilfssatz III vorkommenden Funktionen bezeichnen, und sei $E(I)$ das Bild der Menge $E=E(c, \{a\})$, das sich durch die Transformation $y=u+(v-u)x$ ergibt. Offenbar hat man

$$\int_I h_i(c, p, \{a\}, I; x) h_j(c, p, \{a\}, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für} \quad i=j, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\mu(E(I)) = \frac{\mu(I)}{5c} \tag{3.8}$$

und für jedes $x \in E(I)$ existiert eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (<2p)$, so daß die Funktionenwerte $h_1(c, p, \{a\}, I; x), \ldots, h_{s_{m(x)}}(c, p, \{a\}, I; x)$ nichtnegativ sind und der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}} h_1(c, p, \{a\}, I; x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(c, p, \{a\}, I; x) \geqq \sqrt{5}\, A \sqrt{cp} \log p \tag{3.9}$$

genügen, wo $A, s_u, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{s_{2p}}$ die im Hilfssatz III vorkommenden Zahlen sind.

Es sei

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} r_n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \quad (n=0, 1, 2)$$

wo $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ die n-te Rademachersche Funktion bezeichnet. Es ist evident, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=0, 1, 2)$ Treppenfunktionen sind und im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden.

Bezeichnen wir mit $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho=1, \ldots, 4)$ die vier Viertel des Intervalls $[a, b]$ und mit $\bar{I}_\varrho'$ und $\bar{I}_\varrho''$ die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho=1, \ldots, 4)$. Wenden wir nun den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_1 = \left[\frac{l^2_{N_1}}{N_1 \log^2 N_1} + 1 \right]^{4)}, \quad p_1=2, \quad a_i^{(0)} = 2^i \quad (i=1, \ldots, 2p_1)$$

---

4) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α

an. Es sei.

$$\Phi_{2+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{4} h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{4} h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}''_\varrho;x)\right)$$

$(l=1,\ldots,2+\cdots+2^{2p_1})$ und

$$E_0=\bigcup_{\varrho=1}^{4}(E(c_1,\bar{I}'_\varrho)\cup E(c_1,\bar{I}''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz III sind auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(2<n\leqq 2^{N_1+1})$ Treppenfunktionen. Auf Grund der Definition und der Relation (3, 7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_1+1})$ im Grundintervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (3.8) folgt, durch einfache Rechnung, daß für $m=0$ (3.6) erfüllt wird. Nach (3.4) und (3.9) kann ferner gezeigt werden, daß für $m=0$ auch (3.5) erfüllt wird. Offensichtlich ist auch die Menge E_0 einfach.

Es sei $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Nehmen wir an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_k+1})$ und die einfachen Mengen E_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ bereits definiert wurden, derart, daß diese Funktionen ein orthonormiertes System im Intervall $[a,b]$ bilden, die Bedingungen $\bar{a}$) und $\bar{b}$) für $m=0,\ldots,k-1$ erfüllt sind, insbesondere also die Mengen $E_0,\ldots,E_{k-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Dann gibt es eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\ldots,r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_k+1})$ konstant ist und jede Menge E_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ die Vereinigung von einigen I_ϱ ist. Bezeichnen wir mit I'_ϱ und I''_ϱ die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ $(\varrho=1,\ldots,r)$.

Wir wenden nun den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_{k+1}=\left[\frac{l^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1}\log^2 N_{k+1}}+1\right],\quad p_{k+1}=2^{k+1},\quad a_i^{(k)}=2^{N_k+i}\qquad (i=1,\ldots,2p_{k+1})$$

an. Es sei gesetzt:

$$\Phi_{2^{N_k+1}+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1},p_{k+1},\{a^{(k)}\},I'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1},p_{k+1},\{a^{(k)}\},I''_\varrho;x)\right)$$

für $l=1,\ldots,2^{N_k+1}+\cdots+2^{N_k+2p_{k+1}}$, und

$$E_k=\bigcup_{\varrho=1}^{r}(E(c_{k+1},I'_\varrho)\cup E(c_{k+1},I''_\varrho)).$$

Diese Funktionen $\Phi_n(x)$ $(2^{N_k+1}<n\leqq 2^{N_{k+1}+1})$ sind auch Treppenfunktionen. Nach der Definition und der Relation (3.7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_{k+1}+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a,b]$ bilden. Auf Grund von (3.8) ist es leicht ersichtlich, daß (3.6)

auch für $m=k$ erfüllt wird. Nach (3. 4) und (3. 9) ergibt sich, daß (3. 5) auch für $m=k$ besteht. Offenbar ist auch E_k eine einfache Menge und die Mengen $E_0, \ldots, E_k$ sind stochastisch unabhängig.

Auf diese Weise erhalten wir mit vollständiger Induktion ein unendliches orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_m\}$, so daß die Bedingungen $\bar{a}$) und $\bar{b}$) erfüllt sind.

Es sei $x \in E_m$. Dann ist $N_m + n_m(x) + 1 \leqq N_m + 2^{m+2} = N_{m+1}$. Da $a_n \geqq \eta a_n^*$ $(n=1, 2, \ldots)$ und die Folge $\{\lambda_n\}$ monoton nichtabnehmend ist, so erhalten wir aus (3. 5):

$$(3.10) \qquad |a_{2^{N_m+1}+1} \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \cdots + a_{2^{N_m+n_m(x)+1}} \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x)| \geqq \frac{\eta\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A.$$

Für $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m$ wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Aber aus (3. 3) und der Bedingung $\bar{b}$), mit der Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas folgt: $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m) = b-a$.

Aus (3. 10) folgt, daß die Folge der 2^n-ten Partialsummen der Reihe

$$(3.11) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall divergiert. Wegen der Bedingung $\{a_n\} \in l^2$ folgt aus dem in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satz, daß die Reihe (3. 11) im Intervall $[a, b]$ fast nirgends $(C, 1)$-summierbar ist.

Damit wurde der Satz II vollständig bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz III.

Es sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung

$$(4.1) \qquad \sqrt{n} = o(w(n))$$

erfüllt. Auf Grund von (4. 1) kann eine Folge von geraden Zahlen $(2 \leqq) n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ definiert werden, so daß mit der Bezeichnung $M_0 = 0$, $M_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m}$ $(m=1, 2, \ldots)$ gilt:

$$(4.2) \qquad \frac{w(n)}{\sqrt{n}} \geqq m \quad \text{für} \quad n \geqq M_m \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

Wegen $M_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1}$ ist

$$(4.3) \qquad \frac{M_{m+1}}{M_m} > \frac{2^{n_{m+1}}}{2^{n_m+1}} \geqq 2 \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

Es sei

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}} \frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)} \qquad (M_m < n \leqq M_{m+1};\ m = 1, 2, \ldots)$$

und $a_i = a_{M_1+1}$ $(i = 0, \ldots, M_1)$.

Es ist klar, daß die so definierte Koeffizientenfolge positiv, monoton nichtwachsend ist. Ferner gilt

$$\text{(4. 4)} \qquad \sum_{n=M_1+1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} a_n^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \log^2(m+1)} < \infty.$$

Endlich ist nach (4. 2)

$$\sum_{n=M_1+1}^{\infty} \frac{a_n}{w(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} \frac{a_n}{w(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)} \frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}} \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} \frac{1}{w(n)} =$$

$$\text{(4. 5)} \qquad = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)} \frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}} \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{w(n)} = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{3/2}} < \infty.$$

Nach (4. 4) und (4. 5) erfüllt die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die in der Behauptung des Satzes III vorkommenden Bedingungen.

Wir werden nun im Intervall (a, b) ein orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und eine Folge $\{F_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ von einfachen Teilmengen aus $[a, b]$ definieren, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) für jedes $x \in F_m$ existiert eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 2^{m+2})$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x), \ldots, \Phi_{M_{N_m+n_m(x)}+1}(x)$ alle nichtnegativ, oder alle nichtpositiv sind und der Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{a}}_1^{(m)}}} \Phi_{M_{N_m+1}+1}(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{a}}^{(m)}_{s^{(m)}_{n_m(x)}}}} \Phi_{M_{N_m+n_m(x)}+1}(x) \right| \geqq$$

$$\text{(4. 6)} \qquad \geqq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A \sqrt{N_{m+1}} \log N_{m+1}$$

genügen, wobei A die im Hilfssatz III vorkommende positive Konstante, $s_0^{(m)} = 0$, $s_i^{(m)} = a_1^{(m)} + \cdots + a_i^{(m)}$ $(i = 1, \ldots, 2^{m+2};\ m = 0, 1, \ldots)$, und $N_0 = 0$, $N_m = 2(2 + \cdots + 2^m)$ $(m \geqq 1)$, $\bar{\bar{a}}_j = a_i^{(m)} = M_{N_m+i+1} - M_{N_m+i}$ $(s_{i-1}^{(m)} < j \leqq s_i^{(m)})$ sind,

b) die Mengen $\{F_m\}$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\text{(4. 7)} \qquad \mu(F_m) = \frac{b-a}{5}.$$

Es sei bemerkt, daß

$$\text{(4. 8)} \qquad \sqrt{2^{m+1}} < \frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}},\ m+1 \geqq \frac{1}{3}\log N_{m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Es sei nun gesetzt:

$$\Phi_l(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}r_l\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad \text{für} \quad l=0,\dots,M_1$$

mit $r_l(x)=\operatorname{sign}\sin 2^l\pi x$. Es ist klar, daß diese Funktionen Treppenfunktionen sind und im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden. So kann eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho(\varrho=1,\dots,\bar{r})$ angegeben werden, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n=0,\dots,M_1)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ seien mit $\bar{I}'_\varrho$ und $\bar{I}''_\varrho$ bezeichnet $(\varrho=1,\dots,\bar{r})$.

Wir wenden den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_1=1,\ p_1=2,\ a_i^{(0)}=M_{i+1}-M_i \qquad (i=1,\dots,2p_1)$$

an. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen setzen wir

$$\Phi_{M_1+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{\bar{r}}h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{\bar{r}}h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}''_\varrho;x)\right)$$

für $l=1,\dots,M_{N_1+1}-M_1$, und

$$F_0=\bigcup_{\varrho=1}^{\bar{r}}(E(c_1,\bar{I}'_\varrho)\cup E(c_1,\bar{I}''_\varrho)).$$

Nach Hilfssatz III ist es klar, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(M_1<n\leqq M_{N_1+1})$ Treppenfunktionen sind. Auf Grund der Definition und der Relation (3. 7) kann man leicht zeigen, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_1+1})$ im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (3. 8) folgt, daß (4. 7) für $m=0$ erfüllt wird. Aus (3. 9) nach (4. 8) ist es ferner leicht ersichtlich, daß (4. 6) für $m=0$ besteht. Offenbar ist auch die Menge F_0 einfach.

Es sei dann $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_k+1})$ und die einfachen Mengen F_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ bereits derart definiert wurden, daß diese Funktionen im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden, die Bedingungen $\bar{\bar{\text{a}}}$) und $\bar{\bar{\text{b}}}$) für die Indizes $m=0,\dots,k-1$ erfüllt sind, insbesondere die Mengen $F_0,\dots,F_{k-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Es gibt also eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\dots,r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_k+1})$ konstant ist und jede Menge F_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ die Vereinigung von einigen I_ϱ ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ seien I'_ϱ und I''_ϱ $(\varrho=1,\dots,r)$.

Wir wenden jetzt den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_{k+1}=1,\quad p_{k+1}=2^{k+1},\quad a_i^{(k)}=M_{i+1+N_k}-M_{i+N_k} \qquad (i=1,\dots,2p_{k+1})$$

an. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei gesetzt:

$$\Phi_{M_{N_{k+1}+1}+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1},p_{k+1},\{a^{(k)}\},I'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1},p_{k+1},\{a^{(k)}\},I''_\varrho;x)\right)$$

für $l=1,\ldots,M_{N_{k+1}+1}-M_{N_k+1}$ und

$$F_k=\bigcup_{\varrho=1}^{r}(E(c_{k+1},I'_\varrho)\cup E(c_{k+1},I''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz III sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Nach der Definition und der Relation (3. 7) ist es leicht einzusehen, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_{k+1}+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a,b]$ bilden. Aus (3. 8) folgt, daß (4. 7) auch für $m=k$ erfüllt wird. Aus (3. 9) auf Grund von (4. 8) kann leicht gezeigt werden, daß (4. 6) auch für $m=k$ besteht. Es ist ferner klar, daß auch F_k eine einfache Menge ist und die Mengen $F_0,\ldots,F_k$ stochastisch unabhängig sind.

Auf diese Weise erhalten wir mit vollständiger Induktion ein im Intervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$, so daß die Bedingungen $\bar{\bar{\text{a}}})$ und $\bar{\bar{\text{b}}})$ erfüllt werden.

Es sei $x\in F_m$. Da $N_m+n_m(x)<N_{m+1}$ ist, ergibt sich nach der Definition der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (4. 6), daß

$$\begin{aligned}&|a_{M_{N_m+1}+1}\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x)+\cdots+a_{M_{N_m+n_m(x)+1}}\Phi_{M_{N_m+n_m(x)+1}}(x)|\geqq\\ (4.9)\qquad &\geqq\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}}A\frac{\sqrt{N_{m+1}}\log N_{m+1}}{\sqrt{N_m+n_m(x)}\log(N_m+n_m(x)+1)}\geqq\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}}A\end{aligned}$$

gilt.

Für $x\in\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m$ wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Jedoch nach der Bedingung $\bar{\bar{\text{b}}})$ ergibt sich mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas: $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}}F_m)=b-a$.

Aus (4. 9) erhalten wir auf diese Weise, daß die Folge der M_n-ten Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(x) \tag{4. 10}$$

im Intervall $[a,b]$ fast überall divergiert. Daraus und aus (4. 3) folgt mit Anwendung des in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satzes, daß die Reihe (4. 10) im Intervall $[a,b]$ fast nirgends $(C,1)$-summierbar ist.

Damit wurde der Satz III vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis.

ALEXITS, G., [1] Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 5—9.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, 8 (1926), 56—108.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 57—130.

ZYGMUND, A., [1] *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935); [2] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, 10 (1927), 356—362; [3] On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.*, 16 (1930), 90—107.

(Eingegangen am 2. September 1957.)

Über die orthogonalen Funktionen. III (Lebesguesche Funktionen).

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.[1])

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im endlichen Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Es ist bekannt, daß für jede positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{l_n\}$, die die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n^2} < \infty$$

erfüllt, im Intervall $[a,b]$ fast überall

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\, \varphi_n(t) \right| dt = o(l_N)$$

gilt. (Siehe z. B. Mitteilung I, Einleitung.)

Diese Abschätzung kann im allgemeinen nicht verbessert werden. Nämlich gilt der folgende

Satz I. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \infty \tag{1}$$

erfüllt wird. Dann kann ein im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in $[a,b]$ fast überall gilt:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x)\, \varrho_n(t) \right| dt = \infty .$$

---

[1]) Bezüglich der gebrauchten Bezeichnungen und Begriffe verweisen wir auf Mitteilung I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

Diesen Satz haben wir in Mitteilung I (Satz VI) in dem speziellen Fall $\lambda_n = \sqrt{n \log n}\, w(n)$ bewiesen, wo $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge mit

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)\, w^2(n)} = \infty$$

ist. In dieser Mitteilung werden wir sogar den folgenden noch schärferen Satz beweisen:

Satz II. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann kann man ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ derart angeben, daß fast überall in $[a, b]$ gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt > \delta\,(>0)$$

und

$$\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt = O(\lambda_N).$$

Es ist leicht einzusehen, daß der Satz II den Satz I enthält. Ist nämlich $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für welche die Bedingung (1) erfüllt wird, so existiert nach einem bekannten Satz (siehe z. B. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities*, p. 120—121) eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge $\{\bar\lambda_n\}$ mit

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar\lambda_n^2} = \infty$$

und

(3) $$\lambda_n = o(\bar\lambda_n).$$

Auf Grund von (2) kann für die Folge $\{\bar\lambda_n\}$ der Satz II angewendet werden, also existiert ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$, für welches fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\bar\lambda_N} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt > \delta\,(>0)$$

gilt. Daraus folgt nach (3), daß das Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ alle in der Behauptung des Satzes I vorkommenden Bedingungen erfüllt.

Wir bemerken, daß für die zu der $(C, \alpha > 0)$-Summation gehörenden Lebesgueschen Funktionen ähnliche Sätze gelten.

Satz III. *Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann kann man ein im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varrho_n(x)\}$ *derart angeben, daß für jeden positiven Parameterwert* α *fast überall gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N}\int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varrho_n(x)\varrho_n(t)\right| dt = \infty \qquad \left(A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}\right).$$

Satz IV. *Es sei α ein gegebener positiver Parameterwert und $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung* (1) *erfüllt wird. Dann existiert ein von α abhängiges, im Grundintervall* $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\varrho_n^{(\alpha)}(x)\}$ *derart, daß im Intervall* $[a, b]$ *fast überall gilt:*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N}\int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varrho_n^{(\alpha)}(x)\varrho_n^{(\alpha)}(t)\right| dt > \varrho\,(>0)$$

und

$$\int_a^b \left| \frac{1}{A_N^{(\alpha)}} \sum_{n=0}^{N} A_{N-n}^{(\alpha)} \varrho_n^{(\alpha)}(x)\varrho_n^{(\alpha)}(t)\right| dt = O(\lambda_N).$$

Mit Anwendung der Methoden von Mitteilung I, § 9, können diese Sätze analog zum Beweis des Satzes II leicht bewiesen werden. Daher wird vom ausführlichen Beweis dieser beiden Sätze abgesehen.

§ 1. Hilfssätze.

Zum Beweis des Satzes II werden wir einige Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz I. *Es sei p eine beliebige natürliche Zahl und c eine reelle Zahl mit*

$$(1.\ 1) \qquad 0 < \frac{1}{c} \leqq 1.$$

Dann kann man ein orthonormiertes System $\{h_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, p)$ von Treppenfunktionen im Intervall $[0, 2]$ *angeben, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(1.\ 2) \qquad \int_0^2 h_l(c, p; x)\,dx = 0 \quad (l = 1, \ldots, p),$$

$$(1.\ 3) \qquad \int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{q} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t)\right| dt < \sqrt{2cp} \quad (q = 1, \ldots, p;\ 0 \leqq x \leqq 2),$$

ferner existiert eine einfache Menge[2]) $H(c)$ ($\subseteqq [0,2]$) *mit*

$$\mu(H(c)) > \frac{1}{2c}, \tag{1.4}$$

so daß für jeden Punkt $x \in H(c)$ *gilt:*

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \right| dt > \frac{1}{16}\sqrt{2cp}. \tag{1.5}$$

Ähnlicher Hilfssatz ist als Hilfssatz V in unserer Mitteilung I enthalten. Vollständigkeit halber sei aber der Beweis kurz ausgeführt.

B e w e i s v o n H i l f s s a t z I. Es seien r und $\varkappa$ natürliche Zahlen, für die die Ungleichung

$$\frac{2r}{2^\varkappa} \leqq \frac{1}{c} < \frac{2r+1}{2^\varkappa}$$

erfüllt wird. Es sei für $l = 1, \ldots, p$ gesetzt:

$$h_l(c,p;x) = \begin{cases} \theta_1 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für} \quad x \in \left[0, \dfrac{2r}{2^\varkappa}\right], \\ \theta_2 r_{\varkappa+l-1}(x) & \text{für} \quad x \in \left(\dfrac{2r}{2^\varkappa}, 2\right], \end{cases}$$

wo

$$\theta_1 = \left(\frac{2^{\varkappa-2}}{r}\right)^{1/2} \text{ und } \theta_2 = \left(4 - \frac{r}{2^{\varkappa-2}}\right)^{-1/2}$$

ist.

Aus der Definition ist es klar, daß die Funktionen $h_l(c,p;x)$ Treppenfunktionen sind und ein orthonormiertes System in $[0,2]$ bilden, ferner (1.2) erfüllt wird. Offensichtlich gilt

$$\sqrt{c} > \theta_1 \geqq \sqrt{\frac{c}{2}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}} \geqq \theta_2 > \frac{1}{2}.$$

Mit Anwendung der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung ergibt sich:

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{q} h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \right| dt \leqq \sqrt{2} \left\{ \int_0^2 \sum_{l=1}^{q} \Big(h_l(c,p;x)\, h_l(c,p;t) \Big)^2 dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=1}^{q} h_l^2(c,p;x) \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{2} \max(\theta_1, \theta_2) \sqrt{q}$$

($q = 1, \ldots, p$) und so auf Grund von den obigen Ungleichungen erhalten wir (1.3).

---

[2]) D. h. eine aus endlich vielen Intervallen bestehende Menge.

Es sei $H(c)$ die Menge, die so entsteht, daß wir aus dem Intervall $\left[0, \frac{2r}{2^{\varkappa}}\right]$ die Punkte $x = \frac{s}{2^t}$ $(t = 0, \ldots, \varkappa + p - 1, s = 0, \ldots, 2^{t+1})$ weglassen. Offensichtlich ist die Menge $H(c)$ einfach. Da nach der Definition von r und $\varkappa$

$$\frac{2r}{2^{\varkappa}} > \frac{1}{2c}$$

gilt, so ist (1. 4) erfüllt.

Für $x \in H(c)$ gilt nach den obigen Ungleichungen

$$\int_0^2 \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt \geqq \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p; x)\, h_l(c, p; t) \right| dt =$$

$$= \theta_1 \theta_2 \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{l=1}^{p} r_{\varkappa+l-1}(x)\, r_{\varkappa+l-1}(t) \right| dt > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\frac{2r}{2^{\varkappa}}}^{2} \left| \sum_{k=\varkappa}^{\varkappa+p-1} r_k(x)\, r_k(t) \right| dt,$$

woraus sich (1. 5) mit Anwendung von Hilfssatz IV aus Mitteilung I ergibt.

Damit haben wir Hilfssatz I bewiesen.

Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$h_l(c, p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, h_l\left(c, p; 2\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u < x < v, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ferner sei $H(c, I)$ das durch die Transformation $y = \frac{v-u}{2} x + u$ erhaltene Bild der Menge $H(c)$. Auf Grund von (1. 2), (1. 3), (1. 4) und (1. 5) ist es leicht einzusehen, daß die folgenden Beziehungen gelten:

(1. 6) $$\int_I h_l(c, p, I; x)\, dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p),$$

(1. 7) $$\int_I h_i(c, p, I; x)\, h_j(c, p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für } i = j, \end{cases}$$

(1. 8) $$\int_I \left| \sum_{l=1}^{q} h_l(c, p, I; x)\, h_l(c, p, I; t) \right| dt < \mu(I) \sqrt{2cp} \qquad (q = 1, \ldots, p;\ u < x < v),$$

(1. 9) $$\mu(H(c, I)) > \frac{\mu(I)}{4c},$$

und für $x \in H(c, I)$ ist

(1. 10) $$\int_I \left| \sum_{l=1}^{p} h_l(c, p, I; x)\, h_l(c, p, I; t) \right| dt > \mu(I) \frac{1}{16} \sqrt{2cp}.$$

Hilfssatz II. *Es sei* $\{\chi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ *das orthonormierte Haarsche Funktionensystem im Grundintervall* $[0, 1]$. *Dann ist*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(x)\chi_n(t) \right| dt \leqq 1 \quad (s=0, 1, \ldots) \tag{1.11}$$

überall in $[0, 1]$.

Das ist eine leichte Folgerung aus der Definition der Haarschen Funktionen (siehe z. B. S. Kaczmarz—H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, S. 33 und 120—121).

Für ein beliebiges endliches Intervall $I=[u, v]$ definieren wir

$$\chi_n(I; x) = \begin{cases} \chi_n\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=0, 1, \ldots)$. Aus (1.11) folgt, daß überall in I gilt:

$$\int_I \left| \sum_{n=0}^{s} \chi_n(I; x)\chi_n(I; t) \right| dt \leqq \mu(I) \quad (s=0, 1, \ldots). \tag{1.12}$$

§ 2. Beweis von Satz II.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende, ins Unendliche strebende Zahlenfolge, für die die Bedingung (1) erfüllt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\lambda_1 \geqq 2^6$ ist.

Wir definieren eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ und eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{\lambda}_n\}$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

a) $\lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n \leqq (2^8+1)\lambda_n \quad (n=1, 2, \ldots)$,

b) $\bar{\lambda}_{N_m} \leqq \dfrac{1}{2^8+1}\bar{\lambda}_{N_{m+1}} \quad (m=0, 1, \ldots)$,

c) für $N_{m+1}-N_m>1$ ist $\bar{\lambda}_{N_{m+1}} \leqq 2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_m} \quad (m=1, 2, \ldots)$.

Es sei $N_0=0, N_1=1$ und $\bar{\lambda}_0=0, \bar{\lambda}_1=\lambda_1$. Es sei $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl, und wir nehmen an, daß die Indizes $N_1<\ldots<N_k$ und die Zahlen $(2^6 \leqq)\bar{\lambda}_1 \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_{N_k}$ bereits so definiert wurden, daß für die Indizes $n=1, \ldots, N_k$ die Bedingung *a*) und für die Indizes $m=1, \ldots, k-1$ die Bedingungen *b*) und *c*) erfüllt sind, und $\bar{\lambda}_{N_k} \leqq \lambda_{N_k+1}$ ist.

Nun sei $\bar{N}_{k+1}$ die kleinste nach N_k folgende natürliche Zahl, für die

$$\bar{\lambda}_{N_k} \leqq \frac{1}{2^8+1}\lambda_{\bar{N}_{k+1}}$$

gilt. Ist $\overline{N}_{k+1} = N_k + 1$ oder $\lambda_{\overline{N}_{k+1}} \leqq 2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$, so sei $N_{k+1} = \overline{N}_{k+1}$ und sei $\bar{\lambda}_n = \lambda_n\,(N_k < n \leqq N_{k+1})$. Ist $\overline{N}_{k+1} > N_k + 1$ und $\lambda_{\overline{N}_{k+1}} > 2(2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$, so sei $N_{k+1} = \overline{N}_{k+1} - 1$ und sei $\bar{\lambda}_n = \lambda_n\,(N_k < n < N_{k+1})$, $\bar{\lambda}_{N_{k+1}} = (2^8+1)\bar{\lambda}_{N_k}$.

Es ist klar, daß in beiden Fällen $N_k < N_{k+1}$, $\bar{\lambda}_{N_k} \leqq \ldots \leqq \bar{\lambda}_{N_{k+1}}$ gilt, die Bedingung $a)$ auch für die Indizes $n = N_k + 1, \ldots, N_{k+1}$ und die Bedingungen $b)$ und $c)$ für $m = k$ erfüllt sind. Es ist ferner klar, daß in beiden Fällen $\bar{\lambda}_{N_{k+1}} \leqq \lambda_{N_{k+1}+1}$ ist.

Auf diese Weise erhalten wir durch vollständige Induktion die Folgen $\{N_m\}$, $\{\bar{\lambda}_n\}$, für die alle die gestellten Bedingungen $a)$—$c)$ erfüllt sind.

Es soll bemerkt werden, daß aus der Bedingung $b)$ folgt:

$$\bar{\lambda}_{N_1} + \cdots + \bar{\lambda}_{N_m} \leqq \frac{1}{2^8}\,\bar{\lambda}_{N_{m+1}} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2. 1}$$

Mit Anwendung unserer Hilfssätze werden wir nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und eine Folge $\{H_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ von einfachen Teilmengen von $[a, b]$ konstruieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$\bar{a})$ für jede natürliche Zahl m gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_{m-1}+q} \varrho_n(x)\,\varrho_n(t) \right| dt \leqq 2\sqrt{2}\,\bar{\lambda}_{N_m} \quad (q = 1, \ldots, N_m - N_{m-1};\ a \leqq x \leqq b); \tag{2. 2}$$

$\bar{b})$ für $x \in H_m$ ist

$$\int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m} \varrho_n(x)\,\varrho_n(t) \right| dt > \frac{1}{2^6}\sqrt{2}\,\bar{\lambda}_{N_m}; \tag{2. 3}$$

$\bar{c})$ die Mengen H_m sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(H_m) > \frac{b-a}{4} \min\left\{1, \frac{N_m - N_{m-1}}{\bar{\lambda}^2_{N_m}}\right\}. \tag{2. 4}$$

Es sei

$$c_1 = \frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1 - N_0},\quad p_1 = N_1 - N_0 \quad \text{falls } \frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1 - N_0} \geqq 1, \tag{I$_0$}$$

$$c_1 = 1,\quad p_1 = [\bar{\lambda}_{N_1}]^2\,{}^{3)} \quad \text{falls } \frac{\bar{\lambda}^2_{N_1}}{N_1 - N_0} < 1. \tag{II$_0$}$$

Da die Bedingung (1. 1) für die Zahl c_1 erfüllt wird, kann Hilfssatz I mit c_1

---

[3]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

und p_1 angewendet werden. Wir setzen

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} h_n(c_1, p_1, [a, b]; x) \quad \text{für } n = 1, \ldots, p_1$$

und es sei $H_1 = H(c_1, [a, b])$. Nach Hilfssatz I sind diese Funktionen Treppenfunktionen, und bilden nach (1.7) im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System. Aus (1.9) ergibt sich durch einfache Rechnung, daß (2.4) für $m = 1$ erfüllt wird. Im Falle (I_0) folgen (2.2) und (2.3) für $m = 1$ aus (1.8) und (1.10). Nach Hilfssatz I ist die Menge H_1 einfach.

Im Falle (II_0) definieren wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ für $[\bar{\lambda}_{N_1}]^2 < n \leqq N_1 - N_0$ wie folgt. Es existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots, \bar{r}$) derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq [\bar{\lambda}_{N_1}]^2)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ seien mit $\bar{I}'_\varrho$ und $\bar{I}''_\varrho$ bezeichnet ($\varrho = 1, \ldots, \bar{r}$). Wir setzen

$$\varrho_{[\bar{\lambda}_{N_1}]^2+l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left\{ \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{\bar{r}} \chi_l(\bar{I}''_\varrho; x) \right\} \text{für } l = 0, \ldots, N_1 - [\bar{\lambda}_{N_1}]^2 - 1.$$

Offenbar sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Es kann durch eine einfache Rechnung bewiesen werden, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_1)$ auch im Fall (II_0) ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes System bilden, andererseits ergibt sich aus (1.12), daß

$$\int_a^b \left| \sum_{n=[\bar{\lambda}_{N_1}]^2+1}^{q} \varrho_n(x) \varrho_n(t) \right| dt \leqq 1 \qquad ([\bar{\lambda}_{N_1}]^2 < q \leqq N_1;\ a \leqq x \leqq b)$$

gilt. Hieraus ist nach (1.8) und (1.10) leicht ersichtlich, daß (2.2) und (2.3) auch im Fall (II_0) für $m = 1$ erfüllt sind.

Also haben wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(n = 1, \ldots, N_1)$ in beiden Fällen derart definiert, daß $\bar{a}$) und $\bar{b}$) für $m = 1$ erfüllt sind.

Es sei nun k eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ und die einfachen Mengen H_m $(1 \leqq m \leqq k)$ bereits so definiert wurden, daß diese Funktionen $\varrho_n(x)$ im Intervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, für die Indizes $m = 1, \ldots, k$ die Bedingungen $\bar{a}$)—$\bar{c}$) erfüllt sind, insbesondere die Mengen $H_1, \ldots, H_k$ stochastisch unabhängig sind.

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$) derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_k)$ konstant ist und jede Menge H_m $(1 \leqq m \leqq k)$ als Vereinigung von einigen I_ϱ entsteht.

Es seien

$$(\mathrm{I}_k) \qquad c_{k+1} = \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k}, \quad p_{k+1} = N_{k+1} - N_k \quad \text{falls } \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1} - N_k} \geqq 1,$$

$$(\mathrm{II}_k) \qquad c_{k+1}=1, \quad p_{k+1}=[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2 \quad \text{falls} \quad \frac{\bar{\lambda}^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1}-N_k}<1.$$

Da für die Zahl c_{k+1} die Bedingung (1. 1) erfüllt wird, kann der Hilfssatz I mit c_{k+1}, p_{k+1} angewendet werden. Es sei gesetzt

$$\varrho_{N_k+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, I_\varrho; x) \text{ für } l=1,\ldots,p_{k+1}$$

und

$$H_{k+1}=\bigcup_{\varrho=1}^{r} H(c_{k+1}, I_\varrho).$$

Nach dem Hilfssatz I sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Nach (1. 6) und (1. 7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_k+p_{k+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Aus (1. 9) ergibt sich, daß (2. 4) auch für $m=k+1$ erfüllt wird. Im Falle (I_k) folgt aus (1. 8) und (1. 10), daß (2. 2) und (2. 3) auch für $m=k+1$ erfüllt wird. Es ist ferner klar, daß auch H_{k+1} eine einfache Menge ist und die Mengen $H_1,\ldots,H_{k+1}$ stochastisch unabhängig sind.

Im Falle (II_k) werden wir die Funktionen $\varrho_n(x)$ für $N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2<n\leqq N_{k+1}$ wie folgt definieren. Da nach der Konstruktion die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_k+[\lambda_{N_{k+1}}]^2)$ Treppenfunktionen sind, existiert eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{\bar{I}}_\varrho$ $(\varrho=1,\ldots,\bar{\bar{r}})$ derart, daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_k+[\lambda_{N_{k+1}}]^2)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{\bar{I}}_\varrho$ seien $\bar{\bar{I}}'_\varrho$ und $\bar{\bar{I}}''_\varrho$. Es sei nun gesetzt:

$$\varrho_{N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2+l+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left\{\sum_{\varrho=1}^{\bar{\bar{r}}}\chi_l(\bar{\bar{I}}'_\varrho; x)-\sum_{\varrho=1}^{\bar{\bar{r}}}\chi_l(\bar{\bar{I}}''_\varrho; x)\right\}$$

für $l=0,\ldots,N_{k+1}-N_k-[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2-1$.

Es ist klar, daß auch diese Funktionen Treppenfunktionen sind, und eine einfache Rechnung zeigt, daß die Funktionen $\varrho_n(x)$ $(1\leqq n\leqq N_{k+1})$ auch in dem Fall (II_k) ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Aus (1. 12) folgt:

$$\int_a^b\left|\sum_{n=N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2+1}^{q}\varrho_n(x)\,\varrho_n(t)\right|dt\leqq 1 \quad (N_k+[\bar{\lambda}_{N_{k+1}}]^2<q\leqq N_{k+1};\ a\leqq x\leqq b).$$

Daraus und nach (1. 8) und (1. 10) folgt durch einfache Rechnung, daß für $m=k+1$ (2. 2) und (2. 3) auch in dem Fall (II_k) gelten.

Somit haben wir die Treppenfunktionen $\varrho_n(x)$ für $n=1,\ldots,N_{k+1}$ und die Mengen H_m für $m=1,\ldots,k+1$ in beiden Fällen derart definiert, daß die Bedingungen $\bar{a})-\bar{c})$ für $m=1,\ldots,k+1$ erfüllt sind.

Auf diese Weise erhalten wir durch vollständige Induktion je eine unendliche Folge $\{\varrho_n(x)\}$ und $\{H_m\}$, für die die Bedingungen $\bar{a})$—$\bar{c})$ erfüllt sind.

Nachdem wir die Konstruktion dieser Funktionen und Mengen vollzogen haben, können wir den Beweis des Satzes II folgendermaßen weiterführen:

Es sei N eine beliebige natürliche Zahl, und sei $N_{k-1} < N \leqq N_k$. Dann ist auf Grund der Bedingungen $\bar{a})$, $a)$, $c)$ und (2. 1)

$$\begin{aligned}\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt &\leqq \sum_{m=1}^{k-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt + \\ &+ \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \leqq O(1)(\bar{\lambda}_{N_1} + \cdots + \bar{\lambda}_{N_k}) = O(1)\bar{\lambda}_{N_k} = O(\bar{\lambda}_N).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Für $x \in H_m$ ist nach den Bedingungen $\bar{a})$, $\bar{b})$ und nach (2. 1)

$$\begin{aligned}\int_a^b \left| \sum_{n=1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt &\geqq \int_a^b \left| \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt - \\ &- \sum_{k=1}^{m-1} \int_a^b \left| \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varrho_n(x)\varrho_n(t) \right| dt \geqq 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2^7}\bar{\lambda}_{N_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \bar{\lambda}_{N_k} \right) \geqq \frac{\sqrt{2}}{2^7}\bar{\lambda}_{N_m}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Aus (1) kann auf Grund der Monotonität der Folge $\{\bar{\lambda}_n\}$, und der Bedingungen $a)$ und $c)$ leicht gezeigt werden, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m - N_{m-1}}{\bar{\lambda}_{N_m}^2} = \infty$$

gilt. Daraus erhalten wir wegen (2. 4)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(H_m) = \infty.$$

Nun ergibt sich wegen Bedingung $\bar{c})$ mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} H_m) = b - a$ ist.

Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} H_m$, so wird (2. 6) für unendlich viele Indizes m erfüllt. Danach ist es evident wegen (2. 5), (2. 6) und der Bedingung $a)$, daß das so erhaltene Funktionensystem $\{\varrho_n(x)\}$ die in der Behauptung des Satzes II vorkommenden Bedingungen fast überall erfüllt.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 2. September 1957.)

Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Introduction.

Il est connu que, $\{\varphi_n(x)\}$ étant un système quelconque de fonctions orthogonales et normées définies dans un intervalle arbitraire $[a, b]$, la série orthogonale

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

dont les coefficients c_n satisfont à la condition

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

converge presque partout, si (1) est presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et certaines conditions de lacunarité sont remplies. Mais il nous semble qu'on ne connaît aucune condition de lacunarité qui assure la sommabilité presque partout sans être en même temps une condition de convergence. Nous allons montrer d'abord qu'une condition de ce type existe pour une vaste catégorie de séries orthogonales.

Convenons dans la définition suivante. Étant donnée une fonction $\lambda(x)$ non-décroissante, concave de dessous, positive pour $x \geqq 1$ et telle que $\lambda(x) \leqq x$, nous disons que la série (1) est *$\lambda(n)$-lacunaire* si le nombre de ses coefficients non-nuls dont le rang est compris entre n et $2n$ ne surpasse pas la valeur $\lambda(n)$. Cela étant, notre résultat annoncé est le suivant:

Théorème I. *Si la série* (1) *est $\lambda(n)$-lacunaire et ses coefficients satisfont aux conditions* (2) *et $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} < \infty,$$

alors (1) *est presque partout sommable (C, α) pour tout $\alpha > 0$.*

Le fait que la condition $c_n = O(q_n)$ combinée avec la $\lambda(n)$-lacunarité permet d'obtenir un nouveau critère de sommabilité est d'autant plus intéressant que M. TANDORI [5] a démontré qu'il est impossible d'améliorer les critères de sommabilité connus portant uniquement sur l'ordre de grandeur des coefficients, même si les coefficients forment une suite monotone décroissante.

La sommabilité presque partout $(C, \alpha > 0)$ d'une série orthogonale, combinée avec certaines conditions de lacunarité assez restrictives, entraîne, comme on sait, la convergence presque partout de cette série. Or la majorabilité des coefficients par une suite non-croissante $\{q_n\}$ convenablement choisie donne lieu à un affaiblissement de ces conditions de lacunarité, même si on renonce à l'hypothèse préalable de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$. Nous démontrerons à cet égard le

Théorème II. *Si les coefficients de la série $\lambda(n)$-lacunaire* (1) *satisfont à la condition $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \log^\beta n < \infty \qquad (0 \leqq \beta \leqq 2) \tag{4}$$

et si la croissance de $\{\lambda(n)\}$ est bornée par la relation

$$\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^{2-\beta} n}\right), \tag{5}$$

la série (1) *converge presque partout.*

Le cas spécial $\beta = 0$ contient une amélioration considérable du théorème connu d'après lequel la série (1) est presque partout convergente, si elle est presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et si les indices ν_n, ν_{n+1} de deux coefficients non-nuls consécutifs satisfont à la condition $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1$. On voit aisément que cette dernière condition entraîne une $\lambda(n)$-lacunarité avec $\lambda(n) =$ constante, notamment $\lambda(n) = \frac{\log 2}{\log q}$. Or en prenant $\beta = 0$ dans le théorème II, on voit que, *si $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < \infty, \tag{6}$$

la $\lambda(n)$-lucunarité avec $\lambda(n) = O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ assure, même sans l'hypothèse supplémentaire de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$, la convergence presque partout de la série (1).

On se demande évidemment jusqu'à quel point peut-on densifier les coefficients non-nuls pour que la proposition de ce corollaire reste valable? Nous allons montrer, en nous basant sur un résultat de M. TANDORI [4], que la condition $\lambda(n)=O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ est la meilleure possible:

Théorème III. *Si la fonction $\lambda(x)$ satisfait, outre les conditions d'être positive, non-décroissante, concave de dessous et telle que $\lambda(x)\leqq x$, aussi à la condition que*

$$w(n)=\lambda(n)\frac{\log^2 n}{n}\to\infty \tag{7}$$

pour $n\to\infty$, on peut construire une série orthogonale $\lambda(n)$-lacunaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x) \tag{8}$$

qui diverge partout, bien que ses coefficients sont tels que $c_n=O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite positive non-croissante satisfaisant à (6).

2. Sommabilité des séries orthogonales lacunaires.

Passons à la démonstration du théorème I et désignons à ce but par

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

la somme partielle de rang n de la série orthogonale (1). Soient $c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \dots, c_{\nu_N}$ les coefficients non-nuls de rang compris entre 2^n et 2^{n+1}. Par application de l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left\{\int_a^b\left|s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)\right|dx\right\}^2\leqq(b-a)\int_a^b[s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)]^2dx=$$
$$=(b-a)\sum_{k=1}^{N}c_{\nu_k}^2=O(1)\sum_{k=1}^{N}q_{\nu_k}^2.$$

La suite $\{q_n\}$ étant non-croissante et $N\leqq\lambda(2^n)$, on a

$$\sum_{k=1}^{N}q_{\nu_k}^2\leqq Nq_{\nu_1}^2\leqq\lambda(2^n)q_{2^n}^2,$$

par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b|s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|dx=O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\lambda(2^n)}q_{2^n}. \tag{9}$$

La fonction $\lambda(x)$ étant concave de dessous, on a

$$\lambda(2^{n-1}) \geqq \frac{\lambda(1)+\lambda(2^n-1)}{2}$$

et comme de plus $\lambda(x) \leqq x$, on a nécessairement $\lambda'(x) \leqq 2$ pour x assez grands; par conséquent

$$\lambda(2^n)-\lambda(2^n-1) = \int\limits_{2^n-1}^{2^n} \lambda'(x)\,dx \leqq 2$$

si n est assez grand. Dans le cas où $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x) = \infty$ il en résulte que $\lambda(2^n-1) \geqq \frac{\lambda(2^n)}{2}$ et par suite $\lambda(2^{n-1}) \geqq \frac{\lambda(2^n)}{4}$ pour n assez grands. La dernière inégalité est valable évidement aussi dans le cas où $\lim\limits_{x\to\infty} \lambda(x) < \infty$. Il s'ensuit, vu la non-décroissance monotone de $\{\lambda(k)\}$ et la non-croissance de $\{q_k\}$:

$$\sqrt{\lambda(2^n)}\,q_{2^n} \leqq \sqrt{4\lambda(2^{n-1})}\,q_{2^n} \leqq 4\sqrt{\lambda(2^{n-1})}\,q_{2^n} \cdot \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k} \leqq 4 \cdot \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}\,q_k}{k}$$

d'où l'on obtient en vertu de (3) et (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b |s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|\,dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\sqrt{\lambda(k)}\,q_k}{k} < \infty.$$

La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |s_{2^{n+1}}(x)-s_{2^n}(x)|$ est donc presque partout convergente, par conséquent la suite des sommes partielles

$$s_{2^n}(x) = s_1(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [s_{2^{k+1}}(x)-s_{2^k}(x)]$$

l'est aussi. Le théorème I en est une conséquence immédiate, puisque la convergence presque partout de $\{s_{2^n}(x)\}$ équivaut, (2) étant rempli, à la sommabilité $(C, \alpha > 0)$ presque partout. (V. p. ex. [3], p. 188—190.)

On peut se débarrasser de l'hypothèse que la série (1) soit lacunaire en prenant $\lambda(x) = x$; car entre n et $2n$ il n'y a place que pour exactement $n = \lambda(n)$ coefficients. On obtient donc comme corollaire du théorème I le résultat suivant que nous avons déjà démontré ailleurs ([1]):

Si les coefficients de la série orthogonale (1) *sont tels que* $c_n = O(q_n)$ *où* $\{q_n\}$ *est une suite non-croissante de nombres positifs satisfaisant à la condition*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty, \tag{10}$$

la série (1) *est presque partout sommable* (C, α) *pour tout* $\alpha > 0$.

En effet, (10) n'est rien autre que la condition (3) avec $\lambda(n)=n$. Notre proposition devient donc un cas spécial du théorème I, si nous démontrons encore que (2) est une conséquence de (10). Or $\{n^{-\frac{1}{2}}q_n\}$ étant non-croissant, il s'ensuit de (10) que $q_n=o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$, par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n} q_k^2=\sum_{k=1}^{n-1} k(q_k^2-q_{k+1}^2)+nq_n^2=\sum_{k=1}^{n-1} k(q_k-q_{k+1})(q_k+q_{k+1})+nq_n^2=$$

$$=O(1)\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}(q_k-q_{k+1})+o(1)=O(1)\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{\sqrt{k}}+o(1)=O(1).$$

Remarquons que M. Tandori [5] a démontré que la condition (10) ne peut être améliorée non plus, c'est à dire que le dénominateur $\sqrt{n}$ ne peut pas être remplacé par $\sqrt{v(n)}$, si la suite non-décroissante $\{v(n)\}$ tend plus vite vers l'infini que $\{n\}$.

3. Convergence des séries orthogonales lacunaires.

Pour démontrer le théorème II, remarquons d'abord que les conditions (4) et (5) impliquent la convergence presque partout de la suite $\{s_{2^m}(x)\}$, parce que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda(n)}\,q_n}{n}=O(1)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{q_n\sqrt{\log^\beta n}}{\sqrt{n}\log n}=O(1)\left(\sum_{n=2}^{\infty}q_n^2\log^\beta n\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Ainsi, la condition (3) est satisfaite, (2) l'est aussi en vertu de (4), la série (1) est donc presque partout sommable $(C,\alpha>0)$ ou, ce qui revient au même, la suite $\{s_{2^m}(x)\}$ est presque partout convergente. Il nous reste à démontrer que $s_n(x)-s_{2^m}(x)=o(1)$ presque partout, si $2^m<n\leqq 2^{m+1}$. Remarquons à ce but que nous avons supposé $c_k=\gamma_k q_k$ où $\gamma_k=O(1)$. Soit donc n un indice compris entre 2^m et 2^{m+1}, et soient $c_{\nu_1^{(m)}}, c_{\nu_2^{(m)}},\ldots,c_{\nu_r^{(m)}}$ les coefficients non-nuls de rang compris entre 2^m et n, alors

$$s_n(x)-s_{2^m}(x)=\sum_{k=1}^{r} q_{\nu_k^{(m)}}\gamma_{\nu_k^{(m)}}\varphi_{\nu_k^{(m)}}(x).$$

En posant $\Delta q_{\nu_k^{(m)}}=q_{\nu_k^{(m)}}-q_{\nu_{k+1}^{(m)}}$ et $S_m(k,x)=\sum_{l=1}^{k}\gamma_{\nu_l^{(m)}}\varphi_{\nu_l^{(m)}}(x)$, il s'ensuit par une transformation d'Abel

$$s_n(x)-s_{2^m}(x)=\sum_{k=1}^{r-1}S_m(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}+q_{\nu_r^{(m)}}S_m(r,x).$$

Soit M_m le nombre de tous les coefficients non-nuls de rang compris entre

2^m et 2^{m+1}, alors

(11) $$|s_n(x)-s_{2^m}(x)|\leqq \sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}+q_{2^m}|S_m(r,x)|.$$

En ce qui concerne le premier terme du second membre, on obtient immédiatement

$$\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2\leqq \sum_{k=1}^{M_m}S_m^2(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\sum_{k=1}^{M_m}\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\leqq q_{2^m}\sum_{k=1}^{M_m}S_m^2(k,x)\Delta q_{\nu_k^{(m)}}.$$

Comme $k\leqq M_m\leqq\lambda(2^m)$, on a d'abord

$$\int_a^b S_m^2(k,x)dx=\sum_{l=1}^{k}\gamma^2_{\nu_l^{(m)}}=O(k)=O(\lambda(2^m))$$

d'où il s'ensuit en tenant compte de (4):

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2dx=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(2^m)q_{2^m}^2=$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}q_k^2<\infty.$$

Ainsi la série $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}\right)^2$ converge presque partout, on a donc pour presque tous les x:

(12) $$\sum_{k=1}^{M_m}|S_m(k,x)|\Delta q_{\nu_k^{(m)}}=o(1).$$

Quant au deuxième terme du second membre de (11), remarquons qu'il existe (v. p. ex. [3], p. 162) une fonction positive $\delta_{2^m}(x)$ telle que pour tout choix de n compris entre 2^m et 2^{m+1} on ait d'une part

$$|S_m(r,x)|\leqq\delta_{2^m}(x)$$

et d'autre part

$$\int_a^b\delta_{2^m}^2(x)dx=O(\log^2(M_m+1))\sum_{k=1}^{M_m}\gamma^2_{\nu_k^{(m)}}=O(\lambda(2^m))\log^2(\lambda(2^m)+1).$$

Il s'ensuit donc d'après (4) et (5)

$$\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\int_a^b\delta_{2^m}^2(x)dx=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\lambda(2^m)\log^2(\lambda(2^m)+1)=$$

$$=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}q_{2^m}^2\frac{2^m}{\log^{2-\beta}2^m}\log^2 2^m=O(1)\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m}q_k^2\log^\beta k<\infty.$$

La série $\sum_{m=2}^{\infty} q_{2^m}^2 \delta_{2^m}^2(x)$ est donc presque partout convergente, par conséquent

(13) $$q_{2^m}|S_m(r, x)| \leqq q_{2^m}\delta_{2^m}(x) = o(1)$$

pour presque tous les x. De (11), (12) et (13) on obtient $s_n(x) - s_{2^m}(x) = o(1)$ presque partout, c. q. f. d.

Si on ne fait aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur de $\lambda(n)$, on peut se référer à un théoreme de M. GÁL [2] d'après lequel la série (1) est presque partout convergente, si elle est $\lambda(n)$-lacunaire, presque partout sommable $(C, \alpha > 0)$ et si les coefficients satisfont à la condition $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(1 + \log^2\lambda(n)) < \infty$. Nous montrons maintenant, en nous basant sur le théorème I, que la majorabilité des coefficients par des suites non-croissantes convenables rend superflue l'hypothèse de la sommabilité $(C, \alpha > 0)$:

Théorème IV. *Si les coefficients de la série orthogonale $\lambda(n)$-lacunaire* (1) *satisfont à la condition $c_n = O(q_n)$ où $\{q_n\}$ est une suite non-croissante de nombres positifs tels que*

(14) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(1 + \log^2\lambda(n)) < \infty,$$

alors (1) *converge presque partout.*

Nous n'avons qu'à démontrer la sommabilité $(C, \alpha > 0)$ presque partout de la série (1), car le reste est une conséquence du théorème de M. GÁL. Or on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} \leqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(1 + \log^2\lambda(n)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2(1 + \log^2\lambda(n))} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

où la première série du second membre converge d'après (14). Mais puisque $\lambda(x) \leqq x$ et que la fonction $\dfrac{x}{1 + \log^2 x}$ est monotone croissante pour $x > 0$, on a

$$\frac{x}{1 + \log^2 x} \geqq \frac{\lambda(x)}{1 + \log^2\lambda(x)}.$$

On en obtient tout de suite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^2(1 + \log^2\lambda(n))} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \log^2 n)}.$$

La deuxième série est donc aussi convergente, par conséquent

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda(n)}\, q_n}{n} < \infty,$$

c'est-à-dire que la condition de sommabilité (3) est satisfaite et (2) l'est aussi en vertu de (14). La série (1) est donc presque partout sommable $(C, \alpha>0)$, c. q. f. d.

3. Démonstration du théorème III.

La condition (7) assure l'existence d'une suite croissante $\{m_n\}$ d'entiers positifs tels que $m_{n+2}-m_{n+1} \geqq m_{n+1}-m_n$ $(n=1,2,\ldots)$ et $w(3^k) \geqq n$ si $k \geqq m_n$. Soit alors $p(k)=(m_{n+1}-m_n)n^2$ si $k=m_n+1, m_n+2, \ldots, m_{n+1}$. On a

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \tag{15}$$

par contre

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} \frac{w(3^k)}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{w(3^k)}{p(k)} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \frac{1}{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \tag{16}$$

Désignons maintenant la somme $\sum_{k=1}^{n-1} [\lambda(3^k)]$ par $l(n)$ $(l(1)=0)$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α, et posons

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}}$$

pour $k=l(n)+1, l(n)+2, \ldots, l(n+1)$. La suite $\{a_n\}$ est non-croissante et on voit d'après (7) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n p(n)} \sum_{k=l(n)+1}^{l(n+1)} \log^2 k \geqq \\ &\geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(3^n)] \log^2 (l(n)+1)}{3^n p(n)} \geqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{w(3^n) \log^2 (l(n)+1)}{2p(n) \log^2 3^n} \end{aligned} \tag{17}$$

si N est assez grand tel que $[\lambda(3^n)] \geqq \frac{1}{2}\lambda(3^n)$ pour $n \geqq N$. Vu que $l(n) > \lambda(3^{n-1})$ on a

$$\frac{\log l(n)}{\log 3^n} > \frac{\log 3^{n-1} w(3^{n-1}) - 2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n} \geqq 1 - \frac{2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n},$$

pour n assez grands. Mais pour n assez grands on a

$$\frac{2 \log \log 3^{n-1}}{\log 3^n} \leqq \frac{1}{2},$$

par conséquent, pour n assez grands,

$$\frac{\log^2 (l(n)+1)}{\log^2 3^n} > \frac{1}{4}.$$

Il s'ensuit donc d'après (16) et (17) pour m assez grands:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 k \geqq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{w(3^n)}{4p(n)} = \infty.$$

Cette relation et la non-croissance de $\{a_n\}$ assure, grâce au théorème cité de M. TANDORI [4], l'existence d'un système $\{\Phi_n(x)\}$ de fonctions orthogonales et normées telles que la série orthogonale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

diverge partout.

Posons maintenant $\psi_{2.3^n+k}(x) = \Phi_{l(n)+k}(x)$ pour $k=2,3,\ldots,[\lambda(3^n)]$ et identifions les $\psi_m(x)$ pour les indices differents de $2\cdot 3^n+k$ tour à tour avec les fonctions $\Phi_{l(n)+1}(x)$ rangées en une suite. Définissons les coefficients c_n de la manière suivante: soit

$$c_{2.3^n+k} = a_{l(n)+k} = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \quad \text{si} \quad k=2,3,\ldots,[\lambda(3^n)]$$

et $c_m=0$ pour tout autre indice m. Il s'ensuit de cette définition des termes $c_n\psi_n(x)$ que la série (8) est de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{l(n)+1} \Phi_{l(n)+1}(x).$$

La première série du seconde membre diverge partout, tandis que la deuxième est presque partout convergente (même absolument), puisque

$$a_{l(n)+1} < \frac{1}{\sqrt{3^n}}.$$

La différence de ces deux séries, c'est-à-dire la série (8) est donc presque partout divergente et, en changeant convenablement les valeurs des fonctions $\psi_n(x)$ sur l'ensemble de mesure nulle de la convergence éventuelle, on peut aboutir à ce que la série (8) diverge partout.

Montrons que la série (8) est $\lambda(n)$-lacunaire, ce qui résulte du fait que tous les coefficients c_k de rang compris entre 3^ν et $2\cdot 3^{\nu+1}$ disparaissent à l'exception des coefficients de rang $k=2\cdot 3^\nu+2, 2\cdot 3^\nu+3, \ldots, 2\cdot 3^\nu+[\lambda(3^\nu)]$. Le nombre de ces coefficients est $[\lambda(3^\nu)]-1$, par conséquent le nombre des coefficients non-nuls de rang compris entre n et $2n$ est $<\lambda(3^\nu)$, si $3^\nu<n\leqq \leqq 3^{\nu+1}$. Or $\lambda(x)$ est une fonction croissante, on a donc $\lambda(3^\nu)<\lambda(n)$, c'est à dire que le nombre des coefficients non-nuls de rang compris entre n et $2n$ est $<\lambda(n)$: c'est justement la définition de la $\lambda(n)$-lacunarité de la série (8).

Montrons encore que les coefficients c_n de la série orthogonale (8) sont majorables par une suite non-croissante $\{q_n\}$ de nombres positifs satisfaisant à (6). Posons à ce but

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{3^n p(n)}} \qquad (k = 3^n + 1, 3^n + 2, \ldots, 3^{n+1}),$$

alors $\{q_n\}$ ne croît pas, on a $0 \leqq c_n \leqq q_n$, et il s'ensuit d'après (15) que

$$\sum_{n=3}^{\infty} q_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n p(n)} < \infty.$$

Toutes les conditions imposées à la série orthogonale (8) sont satisfaites, et pourtant elle diverge partout. C'était justement notre proposition.

Remarquons enfin que, d'après M. TANDORI [4], sa construction reste valide même si on suppose que les fonctions $\Phi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble. Notre construction étant basée sur une modification de l'ordre des termes de la série partout divergente de M. TANDORI, nous pouvons aussi supposer que les fonctions $\psi_n(x)$ figurant dans la série (8) sont bornées dans leur ensemble.

Ouvrages cités.

[1] ALEXITS, G., Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 5—9.

[2] GÁL, I. S., Sur les séries orthogonales (C, 1)-sommables et $\lambda(n)$-lacunaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 (1948), 1140—1142.

[3] KACZMARZ, S.—STEINHAUS, H., *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).

[4] TANDORI, K., Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 57—130.

[5] ——— Über die orthogonalen Funktionen. II, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 149—168.

(Reçu le 17 octobre 1957.)

Note on sums of almost orthogonal operators.

By BÉLA SZ.-NAGY in Szeged.

M. COTLAR has recently developed an interesting „unified theory" of Hilbert transforms and ergodic theorems [1]. He makes essential use of the following theorem:

Let $T_1+T_2+\cdots+T_n$ be a sum of permutable Hermitian operators in Hilbert space, satisfying the conditions

$$\|T_i\|\leqq 1, \qquad \|T_iT_j\|\leqq \varepsilon^{|j-i|} \qquad (1\leqq i,\ j\leqq n) \tag{1}$$

where $0\leqq\varepsilon<1$. Then we have

$$\|T_1+T_2+\cdots+T_n\|\leqq c(\varepsilon) \tag{2}$$

where $c(\varepsilon)$ is a finite constant not depending on n and the particular choice of the T_i.

In the case $\varepsilon=0$ we have $T_iT_j=O$ for $i\neq j$, i.e. the terms of the sum are "orthogonal". In the case $\varepsilon>0$ we may say that the terms are "almost orthogonal", the quantity ε being a measure for the discrepancy from strict orthogonality. Putting $S=T_1+T_2+\cdots+T_n$ we have, in the case $\varepsilon=0$, $S^k=T_1^k+T_2^k+\cdots+T_n^k$ for $k=1,2,\ldots$, thus

$$\|S^k\|\leqq n, \qquad \lim_{k\to\infty}\|S^k\|^{\frac{1}{k}}\leqq\lim_{k\to\infty}n^{\frac{1}{k}}=1.$$

Since S is hermitian, we have $\|S^k\|=\|S\|^k$, thus $\|S\|\leqq 1$, i.e. for $\varepsilon=0$ the theorem is true with $c(0)=1$, and this is obviously the best constant.

For a proof in the case $\varepsilon>0$ reference is made to a previous paper of the same author [2], where it is based on a rather complicated combinatorial problem. We shall give here a very simple proof by reducing the problem to the one-dimensional case i.e. to a problem on scalars.

This reduction is made possible by the following well-known representation theorem for commutative operator algebras (see f. i. [3]): Any commutative algebra A, with real scalars, of bounded Hermitian operators T in Hilbert space, may be mapped isomorphically and isometrically into the algebra of all real-valued continuous functions $u(M)$ on some compact Hausdorff space $\mathfrak{M}$, i.e. in such a way that if T, $T' \in A$ and

$$T \to u(M), \quad T' \to u'(M),$$

then $cT \to cu(M)$ for any real scalar c, $T+T' \to u(M)+u'(M)$, $TT' \to u(M)u'(M)$, and

$$\|T\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |u(M)|.$$

Choose in particular A as the (commutative) algebra with real scalars generated by the operators $T_1, \ldots, T_n$. If $T_i \to u_i(M)$ $(i = 1, \ldots, n)$, then the hypotheses (1) mean that

$$|u_i(M) \leqq 1, \quad |u_i(M) u_j(M)| \leqq \varepsilon^{|j-i|}$$

for all $M \in \mathfrak{M}$, and we have to show that these imply

$$|u_1(M) + \cdots + u_n(M)| \leqq c(\varepsilon)$$

for all $M \in \mathfrak{M}$.

We shall show even more, namely that for any sum

$$s = v_1 + \cdots + v_n$$

of real numbers with $|v_i| \leqq 1$, $|v_i v_j| \leqq \varepsilon^{|j-i|}$, we have $|s| \leqq c(\varepsilon)$.

For any real number $\lambda \geqq 0$ denote by $n(\lambda)$ the number of those terms v_i in this sum for which $|v_i| \geqq \lambda$. Then we have

$$\sum_1^n |v_i| = -\int_0^{1+0} \lambda \, dn(\lambda) = -[\lambda n(\lambda)]_0^{1+0} + \int_0^1 n(\lambda) d\lambda = \int_0^1 n(\lambda) d(\lambda),$$

because $n(\lambda) = 0$ for $\lambda > 1$. If, for a fixed λ, $n(\lambda)$ is $\geqq 1$, denote by i_1 and i_2 the first and the last indices i for which $|v_i| \geqq \lambda$; we have obviously

$$n(\lambda) \leqq 1 + i_2 - i_1.$$

On the other hand we have

$$\lambda^2 \leqq |v_{i_1} v_{i_2}| \leqq \varepsilon^{i_2 - i_1},$$

thus

$$i_2 - i_1 \leqq 2 \log \lambda / \log \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad i_2 - i_1 \leqq a(\lambda) = [2 \log \lambda / \log \varepsilon],$$

where $[\alpha]$ denotes the greatest integer $\leqq \alpha$.

So it results the inequality

$$n(\lambda) \leqq 1 + a(\lambda)$$

and this is valid for $0 \leqq \lambda \leqq 1$ obviously also if $n(\lambda) = 0$. Thus we have

$$|s| \leqq \sum_1^n |v_i| \leqq \int_0^1 (1 + a(\lambda)) d\lambda = 1 + \sum_1^\infty m \left(\varepsilon^{\frac{m}{2}} - \varepsilon^{\frac{m+1}{2}} \right),$$

since $a(\lambda)$ assumes the value m on the interval $\varepsilon^{\frac{m+1}{2}} < \lambda \leqq \varepsilon^{\frac{m}{2}}$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

This achieves the proof, yielding the following value of the constant:

$$c(\varepsilon) = 1 + (1 - \sqrt{\varepsilon}) \sum_1^\infty m(\sqrt{\varepsilon})^m = 1 + \frac{(1-\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon}}{(1-\sqrt{\varepsilon})^2} = \frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon}.$$

The problem of the best constant is left open. Considering the sums

$$S_{2n+1} = \sum_{\nu=-n}^{n} \varepsilon^{|\nu|} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - 2\frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$$

one sees, however, that the best constant $c^*(\varepsilon)$ must satisfy the inequality

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqq c^*(\varepsilon) \leqq \frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon},$$

in particular

$$3 \leqq c^*\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 2 + \sqrt{2} < 3{,}5.$$

$\Big($M. Cotlar shows only that $c^*\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 8.\Big)$

References.

[1] M. Cotlar, A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems, *Revista Mat. Cuyana*, **1** (1955), 105—167.

[2] M. Cotlar, A combinatorial lemma and its applications to L^2-spaces, *ibidem*, **1** (1955), 41—55.

[3] I. Gelfand, Normierte Ringe, *Mat. Sbornik*, **9** (51) (1941), 3—23.

(Received August 10, 1957.)

Metrische Charakterisierung der Finslerschen Räume mit verschwindender projektiver Krümmung.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

Einführung.

In einer früheren Arbeit [7] haben wir gezeigt, daß man die projektiv-ebenen Finslerschen Räume skalarer Krümmung durch eine Verallgemeinerung des Ebenenbegriffes des Riemannschen Raumes geometrisch charakterisieren kann. Bekanntlicherweise läßt sich eine, in den Finslerschen Raum eingebettete Hyperfläche entweder als der geometrische Ort der tangentialen Linienelemente, oder aber als die Transversalfläche der geodätischen Linien des Raumes definieren. Der erstere ist offenbar eine Linienelementmannigfaltigkeit, die zweite aber eine Punktmannigfaltigkeit. In der erwähnten Arbeit haben wir für den Fall solcher Hyperflächen Ebenen definiert, welche als geometrische Örter der tangentialen Linienelemente charakterisiert wurden.

In einen Finslerschen Raum eingebettete transversale Hyperflächen sind insbesondere durch M. WEGENER [10] und E. T. DAVIES [4] untersucht worden. In der Arbeit von M. WEGENER (S. 122—123) wird diejenige transversale Hyperfläche Hyperebene genannt, auf welcher die normalen Linienelemente im Sinne der Raummetrik parallel sind. Daselbst wird gezeigt, daß man in dem Falle, wo für den Finslerschen Raum $R_{0\,jk}^{\,i} = 0$ gilt, zu jedem Linienelement als Normalvektor eine transversale Hyperebene legen kann.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einem die Finslerschen Räume skalarer Krümmung in Allgemeinheit wesentlich übertreffenden Raumtypus, nämlich mit Finslerschen Räumen projektiver Krümmung Null (siehe [1], S. 762 u. f.). Der Hauptsatz unserer Arbeit besagt, daß ein Finslerscher Raum projektiver Krümmung Null dann und nur dann von konstanter Krümmung ist, falls man darin zu jedem Linienelement als Normalvektor eine transversale Hyperebene legen kann. In diesem Satze ist insbesondere eine weitgehend verschärfte Form des Wegenerschen Resultates enthalten.

Wir geben in der vorliegenden Arbeit auch ein Kriterium an, durch welches diejenigen Finslerschen Räume bestimmt werden, in die man zu jedem Linienelement als Normale eine transversale Hyperfläche einbetten kann, auf welcher die Metrik des Raumes eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung, bzw. eine Euklidische Metrik erzeugt.

Sämtliche auftretende Größen werden als regulär-analytisch vorausgesetzt.

§ 1.

Gegeben sei ein n-dimensionaler ($n \geqq 3$) Finslerscher Raum mit der Grundfunktion $L(x, v)$.[1])

Bekanntlich hat dieser Raum drei Krümmungstensoren und einen Torsionstensor. Im folgenden werden wir nur den Krümmungstensor R_{ijkl} gebrauchen, welcher die folgende explizite Gestalt hat[2]):

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^*_{ijk}}{\partial v^m} G^m_l + \frac{\partial \Gamma^*_{ijl}}{\partial v^m} G^m_k + \Gamma^*_{iml} \Gamma_j^{*m}{}_k - \Gamma^*_{jml} \Gamma_i^{*m}{}_k + \\ & + C_{ijm} \left(\frac{\partial G^m_k}{\partial x^l} - \frac{\partial G^m_l}{\partial x^k} - G^m_{kr} G^r_l + G^m_{lr} G^r_k \right), \end{aligned} \tag{1.1}$$

in (1. 1) ist

$$G^i = \frac{1}{4} g^{ih} \left(\frac{\partial^2 L^2}{\partial v^h \partial x^r} v^r - \frac{\partial L^2}{\partial x^h} \right), \tag{1.2}$$

$$G^i_h = \frac{\partial G^i}{\partial v^h}, \tag{1.3}$$

$$G^i_{kh} = \frac{\partial G^i_k}{\partial v^h}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^*_{ihj} = \frac{1}{2} \Bigg\{ & \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial v^r} G^r_j \right) + \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hj}}{\partial v^r} G^r_i \right) - \\ & - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^r} G^r_h \right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Der Torsionstensor des Raumes ist

$$A_{ijk} = L C_{ijk} = \frac{1}{2} L \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k} = \frac{1}{2} g_{ij\|k}, \tag{1.6}$$

wobei

$$f_{\|k} = L \frac{\partial f}{\partial v^k} \tag{1.7}$$

gesetzt wird.

---

[1]) Siehe z. B. [3], [5].

[2]) Siehe z. B. [3], S. 36.

Da für die kovarianten bzw. die kontravarianten Komponenten des, dem Linienelement gleichgerichteten Einheitsvektors

$$l^i = \frac{v^i}{L} \quad \text{und} \quad l_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} \tag{1.8}$$

gilt, so haben wir

$$l^i{}_{||k} = \delta^i_k - l^i l_k, \quad l_{i||k} = g_{ik} - l_i l_k, \tag{1.9}$$

$$L_{||k} = L l_k. \tag{1.10}$$

Wird ein Tensor mit dem Vektor l^i komponiert, so bezeichnen wir den entsprechenden Index mit o. Z. B. ist

$$T_{ij} l^j = T_{io}.$$

Für eine Größe, welche in v^i homogen 0-ten Grades ist, gilt offenbar

$$T_{||o} = 0.$$

Die Cartansche kovariante Ableitung eines Tensors $T^i{}_j$ definieren wir auf folgende Weise:

$$T^i{}_{j|k} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i{}_j}{\partial v^r} G^r_k + T^r{}_j \Gamma^{*i}_{r\ k} - T^i{}_r \Gamma^{*r}_{j\ k}. \tag{1.11}$$

Wie man leicht einsieht, ist

$$G^i_{hj} = \Gamma^{*i}_{h\ j} + A^i_{hj|o}. \tag{1.12}$$

L. Berwald[3]) führt im Finslerschen Raume auch noch sog. affine Krümmungsgrößen ein:

$$K^i{}_j = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_j}{\partial x^r} v^r + 2 G^i_{jr} G^r - G^i_r G^r_j, \tag{1.13}$$

$$K^i{}_{jk} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial K^i_k}{\partial v^j} - \frac{\partial K^i_j}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial G^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_k}{\partial v^j} + G^r_j G^i_{rk} - G^r_k G^i_{rj}, \tag{1.14}$$

$$K^i_{hjk} = \frac{\partial K^i_{jk}}{\partial v^h} = \frac{\partial G^i_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_{hk}}{\partial x^j} + G^r_{hj} G^i_{rk} - G^r_{hk} G^i_{rj} + G^r_j G^i_{rhk} - G^r_k G^i_{rhj}, \tag{1.15}$$

wo

$$G^i_{jkh} = \frac{\partial G^i_{jk}}{\partial v^h} \tag{1.16}$$

ist.

Es gelten die Relationen[4]):

$$L\, R_o{}^j{}_{kh} = K^j_{kh}, \tag{1.17}$$

$$L^2 R_o{}^j{}_{oh} = K^j_h, \tag{1.18}$$

---

[3]) Siehe [1], S. 759.

[4]) Siehe [1], S. 771—772.

$$(1.19)\qquad \frac{1}{2}(K_{ijkh}+K_{jikh})=A_{ijk|o|h}-A_{ijh|o|k}-A^m_{ij}R_{omkh},$$

$$(1.20)\qquad \frac{1}{2}(K_{ijkh}-K_{jikh})=R_{ijkh}+A^m_{ik|o}A_{jmh|o}-A^m_{ih|o}A_{jmk|o},$$

$$(1.21)\qquad R_o{}^p{}_{kh||i}=K_i{}^p{}_{kh}-l_iR_o{}^p{}_{kh},$$

$$(1.22)\qquad R_o{}^p{}_{oh||i}=R_o{}^p{}_{ih}-2l_iR_o{}^p{}_{oh}+R_i{}^p{}_{oh}-A^p_{im}R_o{}^m{}_{oh}-A^p_{ih|o|o},$$

$$(1.23)\qquad R_o{}^p{}_{op||h}=2R_o{}^p{}_{hp}-2l_hR_o{}^p{}_{op}-A_pR_o{}^p{}_{oh}A_{h|o|o}.$$

Bildet man zwei Finslersche Räume aufeinander bahntreu ab, so bleibt folgender, sog. projektiver Abweichungstensor invariant[5]):

$$(1.24)\qquad W^j_h=K^j_h-\frac{K^r_r}{n-1}\delta^j_h-\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial K^r_h}{\partial v^r}-\frac{1}{n-1}\frac{\partial K^r_r}{\partial v^h}\right)v^j.$$

L. Berwald definiert in dem Linienelement (x, v) die Größe

$$(1.25)\qquad R(x,v,\eta)=\frac{K_{ikhm}v^iv^h\eta^k\eta^m}{(g_{ih}g_{km}-g_{im}g_{hk})v^iv^h\eta^k\eta^m},$$

wo η^i einen in (x, v) definierten, von l^i linear unabhängigen Vektor bedeutet.[6])

Ist $R(x, v, \eta)$ von der Ebenenstellung (v, η) unabhängig, so sagen wir, daß der Raum von skalarer Krümmung ist. In diesem Falle ist

$$(1.26)\qquad R(x,v,\eta)\equiv R(x,v)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{n-1}R_o{}^r{}_{or}=\frac{1}{n-1}\frac{K^r_r}{L^2}.$$

Charakteristisch für die Räume skalarer Krümmung ist die Relation:

$$(1.27)\qquad R_o{}^j{}_{oi}=\frac{K^j{}_i}{L^2}=R(x,v)(\delta^j_i-l^jl_i).$$

Ist R konstant, so ist der Raum von konstanter Krümmung. Charakteristisch für die Finslerschen Räume konstanter Krümmung sind die Relationen:

$$(1.28a)\qquad R_o{}^j{}_{ik}=R(\delta^j_kl_i-\delta^j_il_k),$$

$$(1.28b)\qquad K_h{}^j{}_{ik}=R(\delta^j_kg_{hi}-\delta^j_ig_{hk}).$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Finslerscher Raum auf einen Finslerschen Raum von Krümmung Null bahntreu abbildbar ist, ist die Bedingung

$$(1.29)\qquad W^i_j=0,$$

---

5) Siehe [1], S. 763.

6) Siehe [1], S. 773.

oder die damit äquivalente Bedingung

$$n(K_{j|k}-K_{k|j})+(K_{jr|k}-K_{kr|j})v^r=0, \tag{1.30}$$

wo

$$K_j=K_j{}^r{}_r, \quad K_{hj}=K_h{}^r{}_{jr}. \tag{1.31}$$

ist.[7])

Wir bemerken, daß R_{ijkh} in den beiden ersten und den beiden letzten Indizes schiefsymmetrisch, $K_h{}^i{}_{jk}$ in den beiden letzten Indizes schiefsymmetrisch, in den unteren Indizes aber zyklisch symmetrisch ist.

§ 2. In den Finslerschen Raum eingebettete transversale Hyperflächen.[8])

Betrachten wir im n-dimensionalen Finslerschen Raum eine in Parameterdarstellung angegebene Hyperfläche[9])

$$x^i=x^i(u^1,\ldots,u^{n-1}). \tag{2.1}$$

Jedem Punkt der Hyperfläche (2.1) ordnen wir das auf die Hyperfläche transversale Linienelement zu. Die Hyperfläche ist somit die Transversalfläche der durch diese Linienelemente bestimmten geodätischen Linien.

Es sei

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}=\varphi^i_\alpha. \tag{2.2}$$

Offenbar gilt

$$l_i\varphi^i_\alpha=0. \tag{2.3}$$

Der Fundamentaltensor der durch die Projektionsmethode induzierten Flächenmetrik ist

$$g_{\alpha\beta}=g_{ik}\varphi^i_\alpha\varphi^k_\beta. \tag{2.4}$$

Der Koeffizient der zweiten Grundform der Hyperfläche kann in der Gestalt

$$a_{\varrho\sigma}=l_i\left[\frac{\partial\varphi^i_\varrho}{\partial u^\sigma}+\Gamma^{*i}_j{}_k\varphi^j_\varrho\varphi^k_\sigma\right] \tag{2.5}$$

geschrieben werden.

Bezeichnen wir die Koeffizienten der auf der Hyperfläche induzierten Parallelverschiebung durch $\gamma_\alpha{}^\varrho{}_\beta$, dann gilt

$$\gamma_{\varrho\sigma\tau}=g_{\sigma\varepsilon}\gamma_\varrho{}^\varepsilon{}_\tau=g_{rk}\varphi^r_\sigma\left(\frac{\partial\varphi^k_\varrho}{\partial u^\tau}+\Gamma^{*k}_i{}_j\varphi^j_\varrho\varphi^i_\tau+C^k_{ji}\frac{\omega^j}{\partial u^\varrho}\varphi^i_\tau\right). \tag{2.6}$$

7) Siehe [1], § 7.

8) Siehe z. B. [10], S. 115—123.

9) Im folgenden laufen die lateinischen Indizes von 1 bis n, die griechischen Indizes von 1 bis $n-1$.

Die Hyperfläche hat eine Krümmungs- und einen Torsionstensor. Der Krümmungstensor ist durch

$$B_{\varrho\sigma\varkappa\lambda} = \frac{\partial \gamma_{\sigma\varrho\lambda}}{\partial u^{\varkappa}} - \frac{\partial \gamma_{\varrho\sigma\varkappa}}{\partial u^{\lambda}} + \gamma_{\varrho\tau\lambda}\gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\varkappa} - \gamma_{\varrho\tau\varkappa}\gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\lambda}, \tag{2.7}$$

der Torsionstensor durch

$$T_{\varkappa}{}^{\varrho}{}_{\lambda} = \gamma_{\varkappa}{}^{\varrho}{}_{\lambda} - \gamma_{\lambda}{}^{\varrho}{}_{\varkappa} \tag{2.8}$$

gegeben.

Das Differentialgleichungssystem der Hyperfläche (2. 1) kann in der Gestalt

$$\frac{\partial l^i}{\partial u^{\alpha}} + l^k \Gamma^{*i}_{k\ h} \varphi^h_{\alpha} = -a^{\lambda}{}_{\alpha}\varphi^i{}_{\lambda}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \varphi^i_{\varrho}}{\partial u^{\tau}} + \Gamma^{*i}_{k\ h} \varphi^k_{\varrho}\varphi^h_{\tau} = (\gamma_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\alpha} + A_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\lambda} a^{\lambda}{}_{\tau})\varphi^i_{\sigma} + a_{\varrho\tau} l^i \tag{2.10}$$

angegeben werden. Die Integrabilitätsbedingungen für (2. 9) und (2. 10), d. h. die CODAZZI'schen und die GAUß'schen Formeln der Hyperfläche sind:

$$\begin{aligned} B_{\varrho\tau\varkappa\lambda} - (a_{\varrho\varkappa} a_{\tau\lambda} - a_{\varrho\lambda} a_{\tau\varkappa}) &= R_{\varrho\tau\varkappa\lambda} + (P_{\varrho\tau\varkappa\sigma} a^{\sigma}{}_{\lambda} - P_{\varrho\tau\lambda\sigma} a^{\sigma}{}_{\varkappa}) + S_{\varrho\tau\nu\sigma} a^{\nu}{}_{\varkappa} a^{\sigma}{}_{\lambda}, \\ a_{\varrho\varkappa(\lambda)} - a_{\varrho\lambda(\varkappa)} + a_{\varrho\sigma} T_{\varkappa}{}^{\sigma}{}_{\lambda} &= R_{o\varrho\varkappa\lambda} + (P_{o\varrho\varkappa\sigma} a^{\sigma}{}_{\lambda} - P_{o\varrho\lambda\sigma} a^{\sigma}{}_{\varkappa}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

wo

$$P_{\varrho\varkappa\sigma\lambda} = P_{ijkl}\varphi^i_{\varrho}\varphi^j_{\varkappa}\varphi^k_{\sigma}\varphi^l_{\lambda}, \quad S_{\varrho\varkappa\sigma\lambda} = S_{ijkl}\varphi^i_{\varrho}\varphi^j_{\varkappa}\varphi^k_{\sigma}\varphi^l_{\lambda}$$

die Projektionen der Raumtensoren P_{ijkl} und S_{ijkl} auf die Hyperfläche sind, $a_{\varrho\varkappa(\lambda)}$ aber die kovariante Ableitung von $a_{\varrho\varkappa}$ bezüglich der induzierten Metrik bedeutet.

Sind die Normal-Einheitsvektoren entlang der Hyperfläche im Sinne der Raummetrik parallel, so wird die Hyperfläche eine Hyperebene genannt. Dafür ist auf Grund von (2. 9) die Bedingung

$$a_{\varrho\sigma} = 0 \tag{2.12}$$

notwendig und hinreichend. Im Falle einer Hyperebene reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen (2. 11) und (2.12) auf

$$R_{o\varrho\varkappa\sigma} = 0, \tag{2.13}$$

und

$$B_{\varrho\varkappa\sigma\lambda} = R_{\varrho\varkappa\sigma\lambda}. \tag{2.14}$$

Aus (2. 6) folgt dann, daß $\gamma_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\tau}$ in ϱ und in τ symmetrisch ist, und folglich

$$T_{\varrho}{}^{\sigma}{}_{\tau} = 0 \tag{2.15}$$

gilt.

Wie man leicht einsieht, ist

$$(2.16)\qquad \gamma_{\varrho\sigma\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial u^{\varrho}}+\frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial u^{\tau}}-\frac{\partial g_{\varrho\tau}}{\partial u^{\sigma}}\right),$$

d. h. die Raummetrik induziert auf der Hyperebene eine Riemannsche Metrik.

§ 3. Finslersche Räume, in welchen man zu jedem Linienelement als Normalvektor eine Hyperebene stellen kann.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß man in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum zu jedem Linienelement $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ eine transversale Hyperebene stellen kann, in dessen Punkt $\left(\underset{(0)}{x}\right)$ der Normaleinheitsvektor gleich $\underset{(0)}{l^i}$ ist, ist das Erfülltsein der Bedingung*[10])

$$(3.1)\qquad R_{o\ jk}^{\ i}=R_{o\ ok}^{\ i}\, l_j-R_{o\ oj}^{\ i}\, l_k.$$

Beweis. Aus der Integrabilitätsbedingung (2. 13) folgt, daß im Falle, wo man zu jedem Linienelement eine transversale Hyperebene stellen kann, in jedem Linienelement des Raumes

$$(3.2)\qquad R_{oijk}\lambda^i\mu^j\nu^k=0,$$

mit

$$(3.3)\qquad \lambda_i l^i=\mu_i l^i=\nu_i l^i=0$$

gilt.

Betrachten wir jetzt eine solche normierte n-Bein-Darstellung von R_{oijk}, bei welcher einer der Vektoren des n-Beins l^i ist. Die Einheitsvektoren des n-Beins seien $\underset{(j)}{l^i}$, wo $\underset{(n)}{l^i}=l^i$ ist. Dann ergibt sich

$$(3.4)\qquad R_{oijk}=\overset{(\alpha\beta\gamma)}{T}\underset{(\alpha)}{l_i}\,\underset{(\beta)}{l_j}\,\underset{(\gamma)}{l_k}+\overset{(n\beta\gamma)}{T}l_i\,\underset{(\beta)}{l_j}\,\underset{(\gamma)}{l_k}+\overset{(\alpha n\gamma)}{T}\underset{(\alpha)}{l_i}\,l_j\,\underset{(\gamma)}{l_k}+\overset{(\alpha\gamma n)}{T}\underset{(\alpha)}{l_i}\,\underset{(\gamma)}{l_k}\,l_j.$$

Da nun R_{oijk} in den beiden ersten und auch in den beiden zweiten Indizes schiefsymmetrisch ist, und auch (3. 2) gilt, erhalten wir

$$(3.5)\qquad \overset{(\alpha\beta\gamma)}{T}=0,\quad \overset{(\alpha n\gamma)}{T}\underset{(\alpha)}{l_i}\,\underset{(\gamma)}{l_k}=-\overset{(\alpha\gamma n)}{T}\underset{(\alpha)}{l_i}\,\underset{(\gamma)}{l_k}=R_{oiok},$$

und somit wegen (3. 4)

$$(3.6)\qquad R_{oijk}=R_{oiok}\,l_j-R_{oioj}\,l_k.$$

Aus (3. 6) folgt nun trivialerweise, daß die Bedingung

$$(3.7)\qquad R_{oijk}\mu^j\nu^k=0$$

mit der Bedingung (3. 2) äquivalent ist.

---

10) Siehe [6], S. 78.

Dafür, daß man in einem Finslerschen Raum der Dimension $n \geqq 3$ zu jedem Linienelement eine transversale Hyperebene stellen kann, ist somit die Bedingung (3. 6) notwendig.

Die Bedingung (3. 6) ist aber auch hinreichend. In einem Raum der erwähnten Eigenschaft ist nämlich das Differentialgleichungssystem

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial l^i}{\partial x^k}\varphi_\alpha^k + \Gamma^{*i}_{o\ k}\varphi_\alpha^k = 0, & l_i \dfrac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial u^\beta} + l_i \Gamma^{*i}_{j\ k}\varphi_\alpha^j \varphi_\beta^k = 0, \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \varphi_\alpha^i, & \dfrac{\partial \varphi_\alpha^i}{\partial u^\beta} = \dfrac{\partial \varphi_\beta^i}{\partial u^\alpha} \end{cases}$$

vollständig integrabel, weil die nichttriviale Integrabilitätsbedingung des Systems, d. h.

$$(3.9) \qquad R_{o\ jk}^{\ i}\varphi_\alpha^j \varphi_\beta^k = 0,$$

wegen (3. 6) erfüllt ist. Ist nun $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ ein beliebiges Linienelement, so bedeutet die Integrierbarkeit von (3. 8) auf Grund von (2. 5), (2. 6), (2. 9) und (2. 10), daß es eine transversale Hyperebene gibt, welche im Punkte $\left(\underset{(0)}{x}\right)$ den Normalvektor $\underset{(0)}{l^i}$ hat.

Diejenigen Finslerschen Räume, in welchen (3. 6) erfüllt ist, werden wir Räume quasikonstanter Krümmung nennen. Für solche Räume gelten die folgenden Relationen:

Aus (1. 14), (1. 17) und (1. 18) ergibt sich:

$$(3.10) \qquad R_{o\ jk}^{\ i} = R_{o\ ok||j}^{\ i} - R_{o\ oj||k}^{\ i},$$

und aus (2. 21), (3. 10) und (3. 6) durch eine einfache Rechnung

$$(3.11) \qquad K_{i\ kh}^{\ p} = R_{o\ oh||i}^{\ p} l_k - R_{o\ ok||i}^{\ p} l_h + R_{o\ oh}^{\ p} g_{ik} - R_{o\ ok}^{\ p} g_{ih}.$$

Indem wir jetzt auf (3. 11) die Formel (1. 22) anwenden, ergibt sich

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} K_{ipkh} = R_{ophk} l_i + R_{ipoh} l_k - R_{ipok} l_h + A_{pim} R_{o\ hk}^{\ m} + A_{pik|o|o} l_h - A_{pih|o|o} l_k + \\ + R_{opoh} g_{ki} - R_{opok} g_{hi}, \end{aligned}$$

und wegen (3. 12) und (1. 20)

$$(3.13) \quad \begin{aligned} R_{ipkh} = A_{ih|o}^m A_{mpk|o} - A_{ik|o}^m A_{mph|o} + \frac{1}{2}[R_{opoh}(g_{ki} - l_k l_i) - R_{opok}(g_{hi} - l_h l_i) - \\ - R_{oioh}(g_{kp} - l_k l_p) + R_{oiok}(g_{hp} - l_h l_p)] + R_{ipoh} l_k - R_{ipok} l_h. \end{aligned}$$

Aus (3. 12) und (1. 19) folgt nun

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A_{pik|o|h} - A_{pih|o|k} = A_{pik|o|o} l_h - A_{pih|o|o} l_k + \frac{1}{2}[R_{opoh}(g_{ik} - l_k l_i) - \\ - R_{opok}(g_{hi} - l_h l_i) + R_{oioh}(g_{kp} - l_k l_p) + R_{oiok}(g_{hp} - l_h l_p)]. \end{aligned}$$

Indem wir nun in (3. 14) nach p und k verjüngen, erhalten wir

$$R_{oioh} = R(g_{ih} - l_i l_h) + \frac{2}{n-1} A_{i|o|h} - A_{i|o|o} l_h - A_i{}^r{}_{h|o|r}], \tag{3.15}$$

wobei wir die Bezeichnung

$$(n-1)R = R_o{}^r{}_{or} \tag{3.16}$$

eingeführt haben.

Durch Einsetzung von (3. 6) in (1. 23) ergibt sich jetzt

$$(n-1)R_{||h} = -A_p R_o{}^p{}_{oh} - A_{h|o|o}. \tag{3.17}$$

Verjüngung von (1. 22) nach p und i und Einsetzung von (3. 6) und (3. 17) führt jetzt zu

$$R_o{}^p{}_{oh||p} = -(n-1) R l_h + (n-1) R_{||h}. \tag{3.18}$$

Indem wir jetzt (3. 10) nach i und k, (3. 11) aber nach p und h verjüngen und auf (1. 17), (3. 17) und (3. 18) Rücksicht nehmen, ergibt sich unter Anwendung der Bezeichnungen (1. 31)

$$K_i = L R_o{}^p{}_{ip} = (n-1) L R l_i, \tag{3.19}$$

$$K_{ik} = (n-1) R_{||i} l_k + (n-1) R g_{ik}, \tag{3.20}$$

$$-K_r{}^r{}_{hj} = K_{hj} - K_{jh} = (n-1)[R_{||h} l_j - R_{||j} l_h] \tag{3.21}$$

Wenn wir jetzt noch (1. 18) und (3. 16) in (1.24) einsetzen und auf (3. 18) Rücksicht nehmen, so ergibt sich

$$W_h^j = L^2 \left[R_o{}^j{}_{oh} - R(\delta_h^j - l^j l_h) - \frac{n-2}{n+1} R_{||h} l^j \right]. \tag{3.22}$$

S a t z 2. *Ist ein Finslerscher Raum quasikonstanter Krümmung von skalarer Krümmung, so ist dieser Raum von konstanter Krümmung.*

B e w e i s. Für einen Finslerschen Raum skalarer Krümmung ergibt sich aus (1. 28) und (1. 14) durch Verjüngung

$$R_o{}^p{}_{ip} = \frac{n-2}{3} R_{||i} + (n-1) R l_i. \tag{3.23}$$

Aus (3. 19) und (3. 23) folgt, daß in einem Raume quasikonstanter Krümmung

$$R_{||i} = 0 \tag{3.24}$$

ist. Aus (3. 24) und aus der von L. BERWALD herrührenden Verallgemeinerung des Schurschen Satzes[11]) folgt nun

$$R = \text{const.}, \tag{3.25}$$

was zu beweisen war.

---

[11]) Siehe [1], S. 777—778.

Satz 3. *Ist in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum quasikonstanter Krümmung die projektive Krümmung gleich Null, so ist der Raum von konstanter Krümmung.*

Beweis. Es sei

$$W^j_h = 0. \tag{3.26}$$

Indem wir (3. 22) mit l_j kontrahieren, ergibt sich wegen (3. 26)

$$R_{||h} = 0. \tag{3.27}$$

Aus den Gleichungen (3. 26) und (3. 27) folgt

$$R_o{}^j{}_{oh} = R(\delta^j_h - l^j l_h), \tag{3.28}$$

d. h. der Raum ist von skalarer Krümmung. Satz 3 folgt somit aus Satz 2.

Satz 4. *Ist in einem Raum quasikonstanter Krümmung*

$$R_{|j} = 0, \tag{3.29}$$

so ist der Raum von konstanter Krümmung.

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß in einem Raum quasikonstanter Krümmung, welcher der Bedingung (3. 29) genügt, auch die Integrabilitätsbedingung (1. 30) erfüllt ist.

Wegen (3. 19) und (3. 20) nimmt (1. 30) in Räumen quasikonstanter Krümmung die Gestalt

$$(n^2-1)[R_{|k} l_j - R_{|j} l_k] + (n-1)[R_{||j|k} - R_{||k|j}] = 0 \tag{3.30}$$

an. Indem wir jetzt auf das zweite Glied von (3. 30) die Vertauschungsformel

$$R_{|i||k} - R_{||k|i} = -R_{||r} A^r_{ik|o} \tag{3.31}$$

anwenden, ergibt sich

$$(n^2-1)[R_{|k} l_j - R_{|j} l_k] + (n-1)[R_{|k||j} - R_{|j||k}] = 0. \tag{3.32}$$

Auch die Gleichungen (3. 32) sind wegen (3.29) erfüllt. Ist also in einem Raum quasikonstanter Krümmung (3. 29) erfüllt, so kann dieser Raum bahntreu auf einen Finslerschen Raum von Krümmung Null abgebildet werden, d. h. es gilt in diesem Raume

$$W^j_h \equiv 0. \tag{3.33}$$

Aus (3. 33) und aus Satz 3 folgt unsere Behauptung.

Hauptsatz. *Damit man in einem n-dimensionalen ($n \geqq 3$) Finslerschen Raum von der projektiven Krümmung Null zu jedem Anfangslinienelement $\left(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}\right)$ eine transversale Hyperebene legen kann, ist notwendig und hinreichend daß der Raum von konstanter Krümmung sei.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 3.

Die in einem Raum konstanter Krümmung zu einem Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ gehörige Hyperebene kann man z. B. auf folgende Weise charakterisieren.

In einem Raum konstanter Krümmung ist das folgende Differentialgleichungssystem vollständig integrabel:

$$d\varphi = l_i dx^i = 0, \qquad dl^i = -\Gamma_o^{*i}{}_k dx^k - \varphi R \delta_k^i dx^k \tag{3.34}$$

Die nichttriviale Integrabilitätsbedingung von (3.34) ist nämlich

$$R_o{}^i{}_{jk} = R(\delta_k^i l_j - \delta_j^i l_k), \tag{3.35}$$

und diese Bedingung ist in einem Raum konstanter Krümmung erfüllt.

Für die Anfangswerte $\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{l^i}$, und $\underset{(0)}{\varphi} = 0$ hat (3.34) die Lösung

$$\varphi(x^1, \ldots x^n) = 0, \qquad l^i = l^i(x),$$

und wegen (3.34), (2.9) und (2.12) ist dies offenbar die Gleichung einer Hyperebene, welche im Punkt $\underset{(0)}{x^i}$ den Normaleinheitsvektor $\underset{(0)}{l^i}$ hat.

Satz 5. *Sind in einem Finslerschen Raum konstanter Krümmung die Gleichungen*

$$A_i{}^m{}_{k|o} A_{jmh|o} - A_i{}^m{}_{h|o} A_{jmk|o} = 0 \tag{3.36}$$

erfüllt, so gibt es auf jeder in den Raum eingebetteten Hyperebene eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (1.28b), (1.20), (2.4) und (2.14).

Satz 6. *Ist in einem Finslerschen Raum von der Krümmung Null* (3.36) *erfüllt, so gibt es auf jeder in den Raum eingebetteten Hyperebene eine Euklidische Metrik.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.

Satz 7. *Kann man in einen Finslerschen Raum eine Hyperebene einbetten, so liegen die zu einem beliebigen Normalvektor dieser Ebene gehörigen, auf diesen Vektor orthogonalen quasigeodätischen Kurven*[12] *in der Hyperebene, und diese Kurven sind die geodätischen Kurven der Hyperebene.*

Beweis. Das Differentialgleichungssystem der quasigeodätischen Kurven kann in der Gestalt

$$\frac{dl^i}{ds} = -\Gamma_o^{*i}{}_k \frac{dx^k}{ds}, \tag{3.37a}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma_j^{*i}{}_k \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{3.37b}$$

geschrieben werden.

[12]) Siehe [8].

Auf Grund von (2. 9), (2. 16) und (2. 12) sind die Gleichungen der geodätischen Linien einer Hyperebene

(3. 38) $$\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^{*\,i}_{o\,k}\varphi^k_\alpha\frac{du^\alpha}{ds},$$

(3. 39) $$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} = -\gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}.$$

Indem wir jetzt (3. 39) in (2. 10) einsetzen und (2. 12) berücksichtigen, erhalten wir

(3. 40) $$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^{*\,i}_{j\,k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Das System (3. 38), (3. 40), d. h. das Differentialgleichungssystem der Geodätischen der Hyperfläche ist mit (3. 37a), (3. 37b) identisch, d. h. im Falle gleicher Anfangsbedingungen fallen die Geodätischen der Hyperebene mit der zum Normaleinheitsvektor gehörigen orthogonalen quasigeodätischen Kurvenschar zusammen, was zu beweisen war.

S a t z 8. *Kann man in einem Finslerschen Raum zu einem Linienelement* $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ *eine Hyperebene legen, so hat die betreffende Hyperebene in demjenigen Normalkoordinatensystem*[13]*), welches zum Koordinatensystem mit*

(3. 41) $$l_\alpha = 0, \qquad l_n \neq 0$$

und zum Anfangslinienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ *gehört, die Gleichung*

(3. 42) $$\bar{x}^n = 0.$$

B e w e i s. Im betreffenden Normalkoordinatensystem nimmt die Gleichung der auf das Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ orthogonalen quasigeodätischen Kurven wegen (3. 41) die Gestalt

(3. 43) $$\bar{x}^\alpha = \underset{(0)}{\xi^\alpha}(s-s_0), \qquad \bar{x}^n = 0$$

an. Unsere Behauptung folgt aus Satz 7 und aus (3. 43).

Aus (3. 42), (2. 5) und (2. 12) folgt, daß in diesem Normalkoordinatensystem der Hyperebene entlang

(3. 44) $$\bar{l}_i\bar{\Gamma}^{*\,i}_{\alpha\,\beta}(\bar{x}, \bar{v}(\bar{x}) = 0$$

gilt.

13) Siehe [8].

Literaturverzeichnis.

[1] L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, 48 (1947), 755—781.

[2] L. Berwald, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Zeitschrift*, 25 (1926), 40 73.

[3] E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Actualités scientifiques et industrielles, 79 (Paris, 1934).

[4] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.*, (2) 49 (1947), 19—39.

[5] P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (Dissertation Göttingen, 1918).

[6] S. Kikuchi, On the theory of subspace in a Finsler space, *Tensor* (New series), 2 (1952), 67—79.

[7] A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung, und projektiv-ebene Räume, *Acta Math. Hungarica*, 8 (1957), 1—18.

[8] O. Varga, Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois* (Budapest, 1952), 131—146.

[9] O. Varga, Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math.*, 6 (1941), 192—212.

[10] J. M. Wegener, Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 44 (1936), 115—130.

(Eingegangen am 7. Mai 1957.)

A theorem on algebraic operators in the most general sense.

By ANDRÁS ÁDÁM in Szeged.

Let be given the sets H and $\mathfrak{H}$. Let be defined an operation $a\alpha$ ($a \in H$, $\alpha \in \mathfrak{H}$) with values in H (i. e. a function which assignes to each pair of elements $a \in H$, $\alpha \in \mathfrak{H}$ an element of H).

For any subset $\mathfrak{G}$ of $\mathfrak{H}$ we denote by $S(\mathfrak{G})$ the set of elements of H which remain fixed by all elements of $\mathfrak{G}$.

Let be chosen a subset $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{H}$. For any subset G of H we denote by $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G)$ the set of elements of $\mathfrak{A}$ which leave fixed all the elements of G.[1])

The proof of our theorem will be simplified if we anticipate some statements about the concepts already exposed. (Some of these statements are well known in Galois theory in particular cases.)

α) For each $G (\subseteqq H)$ and $\mathfrak{A} (\subseteqq \mathfrak{H})$ we have $G \subseteqq S(\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G))$.

β) $\mathfrak{A} \supseteqq \mathfrak{G}$ implies[2]) $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(S(\mathfrak{G})) \supseteqq \mathfrak{G}$.

γ) $\mathfrak{G}_1 \supseteqq \mathfrak{G}_2$ implies $S(\mathfrak{G}_1) \subseteqq S(\mathfrak{G}_2)$.

δ) $G_1 \supseteqq G_2$ implies $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G_1) \subseteqq \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G_2)$.

ε) $\mathfrak{A} \supseteqq \mathfrak{B}$ implies $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G) \supseteqq \mathfrak{S}_{\mathfrak{b}}(G)$.

η) $\mathfrak{B} \supseteqq \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G)$ implies $\mathfrak{S}_{\mathfrak{b}}(G) \supseteqq \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G)$.

These statements require no proofs, exceptly perhaps η) which can be verified by intersecting both sides of the supposition by $\mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}(G)$.

D e f i n i t i o n 1. The subset G of H is $\mathfrak{A}$-replete if $G = S(\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G))$ holds.

D e f i n i t i o n 2. The subset $\mathfrak{G}$ of $\mathfrak{H}$ is $\mathfrak{A}$-replete if $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(S(\mathfrak{G}))$ holds.[3])

---

[1]) Hence we have $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}(G) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}(G) \subseteqq \mathfrak{A}$ for any $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{H}$ and $G \subseteqq H$.

[2]) We denote always the subsets of H by Roman capital letters and the subsets of $\mathfrak{H}$ by German capital ones. (The letters S and $\mathfrak{S}$ serve other purpose.)

[3]) Compare these definitions to the similar ones in the paper G. BIRKHOFF, On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 31 (1935), 433–454, especially p. 435.

Theorem. *Let be given the subsets $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{H}$ for which we have $\mathfrak{A}\supseteqq\mathfrak{B}$. In this case the following four statements are true:*

1. *If G is $\mathfrak{B}$-replete, then G is $\mathfrak{A}$-replete.*

2. *If G is $\mathfrak{A}$-replete and $\mathfrak{B}$ is $\mathfrak{A}$-replete and $G\supseteqq S(\mathfrak{B})$, then G is $\mathfrak{B}$-replete.*

3. *If $\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{A}$-replete and $\mathfrak{G}\subseteqq\mathfrak{B}$, then $\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{B}$-replete.*

4. *If $\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{B}$-replete and $\mathfrak{B}$ is $\mathfrak{A}$-replete, then $\mathfrak{G}$ is $\mathfrak{A}$-replete.*

Proof. 1. We have

$$G\subseteqq S(\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(G))\subseteqq S(\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(G))=G.$$

The first inclusion is the statement α), the second one is implied by ε) and γ), and the equality by the supposition.

2. The supposed inclusion and δ) imply $\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(G)\subseteqq\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{B}))$. Hence, $\mathfrak{B}$ being $\mathfrak{A}$-replete, we have $\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(G)\subseteqq\mathfrak{B}$. Therefore, by ε) and η) we have $\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(G)=\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(G)$, thus $S(\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(G))=S(\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(G))=G$.

3. We have

$$\mathfrak{G}\subseteqq\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(S(\mathfrak{G}))\subseteqq\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{G}))=\mathfrak{G}.$$

The first inclusion is implied by the statement β), the second one by ε), and the equality by the supposition.

4. We get

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{G}))\subseteqq\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{B}))$$

applying γ) and δ) to the inclusion $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(S(\mathfrak{G}))\subseteqq\mathfrak{B}$. Owing to $\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{B}))=\mathfrak{B}$ we can apply η) for $G=S(\mathfrak{G})$, hence and by ε) we have the equality

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{a}(S(\mathfrak{G}))=\mathfrak{S}_\mathfrak{B}(S(\mathfrak{G}))=\mathfrak{G}.$$

Remark. (On November 28, 1957.) Let be defined the mappings $\mathfrak{G}\to S_A(\mathfrak{G})$ $(=S(\mathfrak{G})\cap A)$ for any subset A of H, and the mapping $G\to\mathfrak{S}(G)$ $(=\mathfrak{S}_\mathfrak{H}(G))$. In this case we can deduce results which are in duality relation to the above ones.

(Received July 4, 1957.)

Systems of equations over modules.

By A. KERTÉSZ in Debrecen.

To Professor Alexander Kurosh on his 50th birthday.

§ 1. Introduction.

Let R be an arbitrary ring and G an arbitrary R-module.[1]) If x_α $(\alpha \in A)$ is a set of unknowns, then the most general system of equations in these unknowns over G can be written in the form

$$a_{\beta 1} x_{\alpha 1} + \cdots + a_{\beta k_\beta} x_{\alpha k_\beta} + n_{\beta 1} x_{\alpha 1} + \cdots + n_{\beta k_\beta} x_{\alpha k_\beta} = g_\beta \quad (\in G, \beta \in B)$$

with $a_{\beta j} \in R$ and $n_{\beta j}, k_\beta$ rational integers. It is our purpose in this paper to investigate such equation systems over arbitrary operator-modules.

In our investigations the concept of a *compatible system of equations* over a module plays a fundamental role. In § 3 of this paper we also give a "coördinate-free" definition of this concept. By this definition a compatible system of equations over an arbitrary R-module G is a well-defined R-homomorphism φ of a submodule of some free R-module F into G and the solvability of this system is equivalent to the extensibility of the mapping φ to an R-homomorphism $\bar{\varphi}$ of the whole module F into G. This definition turns out to be of a great usefulness in our investigations.

In his paper [18], published in 1950, T. SZELE builds up a theory for abelian groups which is analogous to the Steinitz theory of fields. In this theory the „algebraically closed groups“ coincide with the so-called divisible abelian groups.[2]) A valuable contribution to the theory of algebraically closed groups was given by S. GACSÁLYI, who succeeded in showing that for an algebraically closed abelian group G any compatible system of equations (containing arbitrarily many unknowns and consisting of an arbitrary set of

---

[1]) By a ring we shall always mean in this paper an associative ring and by an R-module always a *left* R-module.

[2]) An abelian group G is *divisible* if $G = nG$ for every integer $n (\neq 0)$. For particulars about these groups see e. g. [9]. In conformity with the terminology of SZELE, the divisible abelian groups will be called *algebraically closed* groups in this paper.

equations) over G is solvable in G [7]. In § 4 we generalize for modules with a completely arbitrary ring as domain of operators the theory of algebraically closed abelian groups. It is surprising that even in this most general case many of the results on algebraically closed abelian groups retain their validity. Our method has also the advantage of generalizing some results already known for unitary injective operator-modules, which in this way find their natural place in the frame of a broader theory and by a suitable choice of the logical order also simpler proofs of these results can be obtained.

In § 5 we raise the problem of determining all algebraically closed modules. As a small step towards the solution of this apparently difficult problem we describe all algebraically closed R-modules G for which $RG=0$ holds.

In the last section of our paper (§ 6) we consider the problem of determining all rings R for which any R-module is the direct sum of its maximal trivial submodule[3]) and of an algebraically closed R-module. The solution of this problem leads to the class of semi-simple rings in the classical sense. Moreover, we show that if R is a semi-simple ring and G_1 an arbitrary unitary R-module, then all solutions of any compatible system of equations over G_1 can be obtained with the aid of a suitable set of formulae.

In the special case if the ring R itself being considered as an R-module, our considerations on systems of equations over modules lead to an investigation of systems of linear equations over the ring R. Thus, as a corollary to the results of § 6 we obtain the result that the classical theory of systems of linear equations over skew fields which has been generalized by GACSÁLYI and SZELE for the case of arbitrarily many equations and unknowns carries over to the case when instead of being a skew field the fundamental domain is an arbitrary semi-simple ring. Moreover, the semi-simple rings form the largest class of rings for which the classical theory of linear equations holds.

Some of the results of the present paper have been published without proofs in [12].

§ 2. Preliminaries.

Let R be an arbitrary ring. By an R-module we understand an additively written abelian group which has the ring R as left operator domain. By a submodule resp. by a homomorphism we shall in this paper always mean an R-submodule and an R-homomorphism respectively, i. e. submodu-

[3]) For the terminology see § 2.

les and homomorphisms admissible with respect to the domain of operators. — The ring of rational integers will be denoted by I.

By a *unitary module* we mean a module furnished with an operator domain which is a ring containing a unit element 1 such that 1 acts as the identity operator on the module [2]. Let A be an arbitrary set of elements of the R-module G and let us denote by RA the set of all finite sums with summands of the form ra $(r \in R, a \in A)$. RA is a submodule of G, and of A too, in case A is a submodule of G. If $RG=0$, we say that G is a *trivial R-module.* Any R-module G contains a unique *maximal trivial submodule,* namely the set of all elements $x(\in G)$ such that $Rx=0$.

We denote by $\{S\}$ the submodule of the R-module G generated by the system of elements S of G, i. e. the smallest submodule of G which contains all elements of S. A module generated by a single element is said to be *cyclic.* If $g \in G$, then $\{g\}$ is the set of all elements of the form $rg+ng$ $(r \in R, n \in I)$. If G is a unitary R-module, then the submodule $\{g\}$ consists of the elements of the form $rg\,(r \in R)$.

By a direct sum of modules we shall always mean a *discrete* direct sum, which will be denoted by $+$ or by Σ, respectively. In some cases we shall also need the „complete" direct sum, which however will always be explicitly termed so. If $G=A+B$, we say that A (and of course also B) is a direct summand of the module G. If A is a submodule of G, such that for any submodule M of G which is maximal with respect to the property $M \cap A=0$ the direct decomposition $G=A+M$ holds, then A will be called a *strictly direct summand* of the module G.[4])

Let x denote an indeterminate element, and H a submodule of the R-module G. Then the most general system of equations which can be written down with this unknown has the form

$$r_\nu x+n_\nu x=h_\nu \qquad (r_\nu \in R,\ n_\nu \in I,\ h_\nu \in H,\ \nu \in \Delta) \tag{1}$$

where Δ denotes an arbitrary (non void) set of indices. If there exists an element $x(\in G)$ for which the system of equations (1) is fulfilled, then we say that the system of equations (1) is solvable in G and has x as a solution. A submodule H of the R-module G will be called a *pure submodule* in G, if the solvability in G of a system of equations (1) in one unknown always implies its solvability also in H. The fundamental results on pure submodules are given in [11].

So far unitary modules have been given most attention in the literature, and the fundamental concepts of module theory, such as that of the order of

4) A criterion for a direct summand of an abelian group to be a strictly direct summand was given earlier by L. Fuchs [5].

an element, of a free R-module, of the independence of a system of elements etc. have been established in accordance with this (see e. g. [13]). In the general case however these concepts do not prove satisfactory [5]), and it is necessary to modify them. In what follows we shall make a remark by which it becomes possible to carry over in a natural way to the general case the concepts and methods which have proved so useful in investigating unitary modules.

Let G be an arbitrary R-module. We consider the well-known extension with unit element R^* of the domain of operators R, due to DORROH [3]. The ring R^* consists of all pairs $\langle r, n\rangle$ $(r \in R, n \in I)$, with the operations

$$\left.\begin{array}{l}\langle r, n\rangle + \langle s, m\rangle = \langle r+s, n+m\rangle \\ \langle r, n\rangle \langle s, m\rangle = \langle rs+mr+ns, nm\rangle\end{array}\right\} r, s \in R;\ \ n, m \in I.$$

It is easy to see that in virtue of the definition

$$\langle r, n\rangle g = rg + ng \qquad (g \in G)$$

the module G becomes an R^*-module, and indeed a unitary R^*-module, since for the unit element $\langle 0,1\rangle$ of the ring R^*

$$\langle 0,1\rangle g = 0 \cdot g + 1 \cdot g = g$$

holds with any element $g (\in G)$.

Now it is clear that if the structure of the module G is being envisaged, this may be considered indifferently as an R-module or as an R^*-module, and thus, in investigating many problems concerning operator-modules we may restrict ourselves without loss of generality to the case of unitary modules. Besides, in introducing the necessary concepts in the general theory of operator-modules, it is covenient to consider the arbitrary R-module G in the above manner as an R^*-module, and so to give the definitions to be used in the case of unitary modules. In the sequel only the concept of a free R-module will be defined in such a way, for this is the only concept we shall need.

We stipulate that for an arbitrary ring R, R^* shall always denote in the present paper the Dorroh extension with unit element of R, and that if we consider the R-module G as an R^*-module, this shall always mean that the ring R^* corresponds to the module G in the above standard way as a domain of operators. To be more explicit, for a given R-module G, the product

$$\langle r, n\rangle g \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*, g \in G)$$

[5]) Let us mention but one example for this. In the literature (see e.g. [9] and [13]) an R-module is called free if it is a direct sum of copies of R considered as an R-module. If, however R is a ring with unit element, then only the unitary R-modules can be obtained as factor modules of such free R-modules.

shall always denote in the sequel the element $rg+ng (\in G)$. If, however, in some particular context the ring R is a priori known to have a unit element and all R-modules considered are unitary ones, the introduction of the domain of operators R^* is, of course, completely superfluous.

Let R be an arbitrary ring and S a system of symbols x_α, where α runs through an index-set A of cardinality $\mathfrak{m} (>0)$. Consider the set F of formal sums

$$f=\sum_{i=1}^{k} \langle r_i, n_i\rangle x_{\alpha_i} \quad (\langle r_i, n_i\rangle \in R^*)$$

(with a finite number of terms), the indices α_i $(i=1,\dots,k)$ being pairwise different. An expression of this form will be called a *linear form over* R. If for all i's $\langle r_i, n_i\rangle = \langle 0, 0\rangle$ holds, we write $f=0$. Two linear forms

$$f_1=\sum_{i=1}^{k_1} \langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}} \quad \text{and} \quad f_2=\sum_{j=1}^{k_2} \langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$$

will be considered equal, if for any pair of indices i, j, for which $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$ holds, one has the equality $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle = \langle r_{2j}, n_{2j}\rangle$ and for indices i to which no index j with $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$ corresponds one has $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle = \langle 0, 0\rangle$, and similarly for the j's. The set F becomes an R-module by introducing the operations

$$sf=\sum_{i=1}^{k} \langle sr_i+n_i s, 0\rangle x_{\alpha_i} \quad (s \in R)$$

and

$$f_1+f_2=\sum_{i=1}^{k_1} \langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}+\sum_{j=1}^{k_2} \langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}, \tag{2}$$

the expression (2) being converted into a linear form by carrying out all possible „simplifications". (More explicitly, if for some pair of indices i, j the equality $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$ holds, then the sum $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}+\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$ must be replaced in (2) by $\langle r_{1i}+r_{2j}, n_{1i}+n_{2j}\rangle x_{\alpha_{1i}}$.)

The R-module F so obtained will be called a *free R-module.* Since the free R-module F is essentially uniquely determined by the ring R and by the cardinal number $\mathfrak{m}$, we shall denote it by the symbol $R(\mathfrak{m})$. Making the identification $\langle 0, 1\rangle x_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha \in A)$ we obtain $x_\alpha \in F$ and thus the system S of the elements x_α $(\alpha \in A)$ generates the module F. The system of elements S will be called a *free base* of the module F.

Let R_1 be a ring with a unit element 1, F_1 a unitary R-module and X a subset of F_1. We shall say that F_1 is a *free unitary R_1-module* with X as a *free base* if every element f of F_1 can be written uniquely as a finite sum $\Sigma r_i x_i$ $(r_i \in R, x_i \in X)$. It is easy to see that F_1 is isomorphic to a direct sum of R-modules, any of which is isomorphic to the ring R considered as an R-module.[6])

Finally we list the more important notations used throughout this paper:

I: the ring of rational integers;
R^*: the Dorroh extension with unit element of the ring R;
$L_{(R)}$: if R is a subring of the ring S and L a left ideal of R, then we denote by $L_{(R)}$ the additive group of L considered as R-module, where the product rl $(r \in R,\ l \in L)$ coincides with the product rl defined in S;[7])
G/H: the factor module of G with respect to H;
$+, \Sigma$: for elements their sum, for modules their direct sum;
$\oplus$: the ring-theoretical direct sum of rings;
$H_1 \subseteqq H_2$: H_1 is a subset of H_2;
$H_1 \subset H_2$: H_1 is a proper subset of H_2;
$\{\ldots, f_\beta, \ldots\}_{\beta \in B}$: the submodule generated by all elements f_β $(\beta \in B)$;
$R(\mathfrak{m})$: the free R-module generated by a free base of cardinality $\mathfrak{m}$.

§ 3. Compatible systems of equations over modules.

Let R be an arbitrary ring, G an arbitrary R-module and x an unknown. The most general equation over G in this unknown has the form

$$rx + nx = g \qquad (r \in R;\ n \in I;\ g \in G). \tag{3}$$

If there exists an element $x (\in G)$ for which the equation (3) holds, we say that the equation (3) is solvable in G and has x as a solution.

Let us consider the following example: Let $R = I \oplus I$. (We denote the elements of the ring R by pairs of elements (n, m).) The equation $(0,1)(x, y) = (1,0)$ over $R_{(R)}$ is not solvable in $R_{(R)}$, nor in any extension of $R_{(R)}$,[8]) for if we multiply both sides of this equation e. g. by $(1,0)$, we obtain zero on the left-hand side, and $(1,0)$, which is different from zero, on the right-hand side. This example shows how essential the question of compatibility

---

[6]) We remark that the concept of a *free R-module* is not a generalization, but only an analogue of the concept of a *free unitary R-module*. The two concepts are in the same relation as e. g. „free group" and „free abelian group".

[7]) More exactly, we ought to introduce a notation which would express that we are dealing with a substructure of S. This however would make the notation very cumbersome, and in the cases considered the simpler notation above can be used without fear of confusion.

[8]) I. e. in an R-module having $R_{(R)}$ as a submodule.

is even in the case of a single equation in one unknown. In order to be able to investigate equations over modules, we must first of all define the concept of a compatible system of equations.

Let R be an arbitrary ring, A an arbitrary set of indices of cardinality $\mathfrak{m}\,(>0)$ and S the system of the symbols x_α $(\alpha \in A)$. Let us consider, over an R-module G, the system of equations

$$f_\beta = g_\beta \qquad (\beta \in B,\ g_\beta \in G) \tag{4}$$

where B is an arbitrary (non-void) set of indices and f_β an element of the free R-module $R(\mathfrak{m})$ having the free base x_α $(\alpha \in A)$, i. e.

$$f_\beta = \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\alpha 1} + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle x_{\alpha k_\beta} \qquad (\langle a_{\beta j}, n_{\beta j}\rangle \in R^*) \tag{5}$$

is a linear form over R^*. We say that the system of elements

$$x_\alpha = h_\alpha\ (\in G,\ \alpha \in A) \tag{6}$$

is a solution of the system of equations (4) in G, if (6) satisfies all equations of the system (4). Obviously, the following is a trivial necessary condition for the solvability of the system (4): every relation for a finite number of f_β's, obtained by a linear combination over R^*, must be satisfied also by the corresponding constants g_β on the right-hand sides of our system of equations. In other words, every relation of the form

$$\langle s_1, m_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle s_i, m_i\rangle f_{\beta_i} = 0$$

must imply

$$\langle s_1, m_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle s_i, m_i\rangle g_{\beta_i} = 0.$$

We call this requirement the *condition of compatibility.*

Let now be (4) a system of equations satisfying the condition of compatibility. Now the system of equations (4) yields a well-defined R-homomorphism φ into G of the submodule M of the free R-module $R(\mathfrak{m})$ generated by all linear forms f_β $(\beta \in B)$, as follows:

$$(\langle t_1, l_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle t_k, l_k\rangle f_{\beta_k})\varphi = \langle t_1, l_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle t_k, l_k\rangle g_{\beta_k}.$$

Then in particular $f_\beta \varphi = g_\beta$ $(\beta \in B)$ holds. (The mapping is single-valued: this is assured by the compatibility of the system (4).) — Conversely: a given R-homomorphism φ of a submodule M of $R(\mathfrak{m})$ into G yields always compatible systems (4) of equations over G; in any of these systems the left-hand sides f_β form a generating system of M and the corresponding right-hand sides are by $b_\beta = f_\beta \varphi$ defined. — If two systems of equations over G satisfying the condition of compatibility spring in the above way from the same R-homomorphism φ of the same submodule M of $R(\mathfrak{m})$, then we call these systems *equivalent.* Obviously, two systems of equations over G are equivelent if and only if each equation of the one system can be obtained as a (left-)linear combination over R^* of a finite number of equations of the other system, and conversely. Also it is clear that the solutions of two equivalent systems of equations (satisfying the condition of compatibility) coincide. Since equivalent systems of equations can thus be considered as being essentially the same, we are led to the following

Definition. *The compatible system $[M, \varphi]$ of equations in $\mathfrak{m}$ unknowns over an arbitrary R-module G is the given R-homomorphism φ of the submodule M of the free R-module $R(\mathfrak{m})$ into G. The system $[M, \varphi]$ of equations is called homogeneous, if $M\varphi = 0$.*

Making use of a valuable remark by G. Pollák, we are able to complete our definition in the following way:

The compatible system $[M, \varphi]$ of equations over G is solvable in G if and only if the R-homomorphism φ of the submodule M can be extended to an R-homomorphism $\overline{\varphi}$ of the whole free R-module $R(\mathfrak{m})$ into G. The solutions of the system $[M, \varphi]$ of equations are in one-to-one correspondence with the extensions $\overline{\varphi}$ of the homomorphism φ, and so by a solution of the system $[M, \varphi]$ of equations we always mean the corresponding extension $\overline{\varphi}$ of the homomorphism φ.

As a matter of fact, let us suppose that the system of elements (6) is a solution of the system of equations (4). The mapping $x_\alpha \to h_\alpha$ $(\alpha \in A)$ induces a homomorphism $\overline{\varphi}$ of the whole module $R(\mathfrak{m})$ into G. Now

$$f_\beta\overline{\varphi} = \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle(x_{\alpha 1}\overline{\varphi}) + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle(x_{\alpha k_\beta}\overline{\varphi}) =$$
$$= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle h_{\alpha 1} + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle h_{\alpha k_\beta} = g_\beta = f_\beta \varphi$$

and thus $\overline{\varphi}$ is a suitable extension of the mapping φ. — Conversely, suppose that the R-homomorphism φ induced by the system of equations (4) can be extended to an R-homomorphism $\overline{\varphi}$ of the whole module $R(\mathfrak{m})$ into G. Let in particular be $x_\alpha\overline{\varphi} = h_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Then

$$f_\beta\overline{\varphi} = (\langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\alpha 1} + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle x_{\alpha k_\beta})\overline{\varphi} =$$
$$= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle(x_{\alpha 1}\overline{\varphi}) + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle(x_{\alpha k_\beta}\overline{\varphi}) =$$
$$= \langle a_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle h_{\alpha 1} + \cdots + \langle a_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle h_{\alpha k_\beta}.$$

On the other hand, since on M the mapping $\overline{\varphi}$ coincides with φ, we have by the definition of φ

$$f_\beta\overline{\varphi} = f_\beta\varphi = g_\beta.$$

Thus we have shown that $x_\alpha = h_\alpha$ $(\alpha \in A)$ is a solution of the system (4) of equations in G.

Let us consider an *arbitrary* system of equations

$$(7) \qquad f_\beta = g_\beta \qquad (f_\beta \in R(\mathfrak{m}),\ g_\beta \in G,\ \beta \in B)$$

over the R-module G. We denote by $G(\mathfrak{m})$ the direct sum of the modules G and $R(\mathfrak{m})$:

$$G(\mathfrak{m}) = G + R(\mathfrak{m}). \tag{8}$$

Then we have the following

Theorem 1. *For the system* (7) *of equations over the R-module G the following conditions are equivalent:*

α) the system (7) *of equations is compatible;*

β) the set of all elements $f_\beta - g_\beta$ ($\beta \in B$) generates in the module $G(\mathfrak{m})$ a submodule H, such that $G \cap H = 0$;

γ) the system (7) *of equations is solvable in some extension of G.*[9]

Proof. *α) implies β).* Suppose

$$\langle r_1, n_1\rangle(f_{\beta_1} - g_{\beta_1}) + \cdots + \langle r_j, n_j\rangle(f_{\beta_j} - g_{\beta_j}) = g \in G.$$

This implies

$$(\langle r_1, n_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle r_j, n_j\rangle f_{\beta_j}) - (\langle r_1, n_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle r_j, n_j\rangle g_{\beta_j}) = g.$$

In view of the direct decompositions (8), $\langle r_1, n_1\rangle f_{\beta_1} + \cdots + \langle r_j, n_j\rangle f_{\beta_j} = 0$, and thus α) implies $\langle r_1, n_1\rangle g_{\beta_1} + \cdots + \langle r_j, n_j\rangle g_{\beta_j} = 0$ and therefore $g = 0$.

β) implies γ). Consider the factor module $\overline{G(\mathfrak{m})} = G(\mathfrak{m})/H$. In this factor module the elements $\bar{g}$ ($g \in G$) form, in view of condition β), an R-module isomorphic to G, and therefore $\overline{G(\mathfrak{m})}$ may be considered as an extension of G. The mapping $f \to \bar{f}$ ($f \in R(\mathfrak{m})$) is an R-homomorphism of the module $R(\mathfrak{m})$ into $\overline{G(\mathfrak{m})}$, which extends the R-homomorphism induced by the system of equations

$$f_\beta = \bar{g}_\beta \qquad (\beta \in B)$$

to the whole of $R(\mathfrak{m})$. Consequently, the system (7) of equations admits a solution in $\overline{G(\mathfrak{m})}$.

γ) implies α). Let $\bar{\varphi}$ be an R-homomorphism of $R(\mathfrak{m})$ into some extension G' of G for which $f_\beta \bar{\varphi} = g_\beta$ ($\beta \in B$) holds. The existence of such a homomorphism $\bar{\varphi}$ is assured by γ). Then it is clear that the mapping φ into G of the submodule $M = \{\ldots, f_\beta, \ldots\}_{\beta \in B}$ of the module $R(\mathfrak{m})$ induced by the mapping $f_\beta \to g_\beta$ ($\beta \in B$) concides with $\bar{\varphi}$ on the submodule M, i. e. it is an R-homomorphism. This proves the validity of property α), completing at the same time the proof of the theorem.

---

[9]) The equivalence of the ring-theoretical analoga of the conditions β) and γ) is established in [17] and [20].

§ 4. Algebraically closed modules.

Let R be an arbitrary ring and G an R-module. The module G is called *algebraically closed*, if every compatible system of equations in one unknown over G is solvable in G.

First of all we remark that in this definition the condition of the solvability of any compatible *system* of equations in one unknown cannot be replaced by the condition of the solvability of any compatible (single) *equation* in one unknown. This is shown by the following example:

Let K be the complete direct sum of an infinite number of fields K_ν $(\nu \in N)$. The discrete direct sum K_0 of the fields K_ν is an ideal in K, so that K_0 can be regarded as a K-module. The ring K is a regular ring with unit element in the sense of J. VON NEUMANN,[10]) and so, by a theorem of NEUMANN (see [15], vol. 2, ch. 2.) any principal ideal of K is a direct summand. From this it follows that any compatible (single) *equation* in one unknown over the K-module K_0 is solvable in K_0. On the other hand, let us consider the *system* of equations consisting of all equations $k_\beta x = k_\beta$ $(k_\beta \in K_0)$. This system is obviously compatible, but it is not solvable in K_0, for K_0 has no unit element.

Several important characteristic properties of algebraically closed modules are expressed by the following

Theorem 2.[11]) *For an arbitrary R-module G the following conditions are equivalent:*

a) *G is algebraically closed;*

b) *if G is a direct summand of the R-module D, then it is a strictly direct summand of D;*

c) *to every left ideal $L_{(R)}$ of R^* and to every R-homomorphism ψ of $L_{(R)}$ into G there exists some element $g_0 (\in G)$ so that $\langle s, m\rangle\psi = \langle s, m\rangle g_0$ for every element $\langle s, m\rangle$ in $L_{(R)}$;*

d) *if φ is a homomorphism of some submodule A of an arbitrary R-module B into G, then φ can be extended to a homomorphism of the whole B into G;*

e) *every compatible system of equations over G admits a solution in G;*

f) *if G is a submodule of the R-module D, then it is a direct summand of D;*

---

10) A ring R is called *regular* if for each element $r (\in R)$ there exists an element $x (\in R)$ such that $rxr = r$ [14].

11) This theorem shows that in the special case of unitary modules the algebraically closed modules coincide with the *complete modules* introduced by R. BAER and with the *injective modules* of homological algebra. The results of this section generalize some results already known for unitary injective modules. (See [1] and [4].)

g) *if G is a submodule of the R-module D, then it is a pure submodule in D.*

As immediate consequences of this theorem we have the following corollaries:

Corollary 1. *If any compatible system of linear equations in a single unknown over the ring R is solvable in R, then any compatible system of linear equations (with arbitrarily many unknowns and equations) over R is also solvable in R.*

Corollary 2. (S. Gacsályi [8].) *Any compatible system of linear equations over a skew field F possesses a solution in F.*

Proof of the theorem. a) *implies* b).[12]) Let G be a submodule of the R-module D and H another submodule of D, which is maximal with respect to the property $G \cap H = 0$. (The existence of such a H is assured by Zorn's lemma.) We show that

$$D = G \dotplus H. \tag{9}$$

Adopting the notation $K = G \dotplus H$, let us suppose that $K \subset D$. Then there exists an element $d (\in D)$ for which $d \notin K$. The set of all elements $\langle s_\nu, m_\nu \rangle$ $(\in R^*)$ for which $\langle s_\nu, m_\nu \rangle d \in K$ is a left ideal L of the ring R^*. (Because of the maximality of H, $L \neq 0$.) By the construction of K there exist for each element $\langle s_\nu, m_\nu \rangle$ $(\in L)$ uniquely determined elements g_ν and h_ν in G and H respectively, so that

$$\langle s_\nu, m_\nu \rangle d = g_\nu + h_\nu .$$

Obviously the system of equations

$$\langle s_\nu, m_\nu \rangle x = g_\nu$$

is compatible, and therefore by condition a) there exists in G an element g_0 so that

$$\langle s_\nu, m_\nu \rangle g_0 = g_\nu$$

for every $\langle s_\nu, m_\nu \rangle$ in L. Let us consider the element $d' = d - g_0$. This element satisfies the relations $d' \notin K$,

$$\langle s_\nu, m_\nu \rangle d' = h_\nu \in H \quad \text{if} \quad \langle s_\nu, m_\nu \rangle \in L \tag{10}$$

and

$$\langle r, n \rangle d' \notin K \quad \text{if} \quad \langle r, n \rangle \notin L.$$

Since H is a greatest submodule of D for which $G \cap H = 0$ and since $d' \notin K$,

---

[12]) We are, in fact, proving more than what has been asserted: by the well-known method of Baer (see [1]) we show that if G is a submodule of D, then it is also a strictly direct summand of D.

we have $\{H, d'\} \cap G \neq 0$. Therefore there exist h_0 $(\in H)$ and $\langle r_0, n_0 \rangle$ $(\in R^*)$ such that

$$h_0 + \langle r_0, n_0 \rangle d' = g \neq 0 \qquad (g \in G).$$

Since $\langle r_0, n_0 \rangle d' = g - h_0 \in K$, it follows that $\langle r_0, n_0 \rangle \in L$ and so by (10) $\langle r_0, n_0 \rangle d' \in H$ i. e. $g \in H$. This however contradicts the construction of H and the choice of g. This contradiction proves the stated decomposition (9) of D.

b) *implies* c). Let ψ be an R-homomorphism into G of some left ideal $L_{(B)}$ of the ring R^*, put

$$D = G + R(1), \tag{11}$$

and let x be some free generating element of the free R-module $R(1)$. Then the set of all elements $\langle s, m \rangle \psi - \langle s, m \rangle x$ $(\langle s, m \rangle \in L_{(B)})$ is a submodule M_0 of D, for which $M_0 \cap G = 0$ holds. (By the decomposition (11) the relation $\langle s, m \rangle \psi - \langle s, m \rangle x = g$ $(\in G)$ evidently implies $g = 0$.) Let now M be a submodule of D, maximal with respect to the properties $M_0 \subseteq M$ and $M \cap G = 0$. By condition b),

$$D = G + M, \tag{12}$$

and so there exist uniquely determined elements $g_1 (\in G)$ and $g_2 (\in M)$ for which $x = g_1 + g_2$. This yields for all elements $\langle s, m \rangle (\in L_{(B)})$

$$\langle s, m \rangle x = \langle s, m \rangle g_1 + \langle s, m \rangle g_2. \tag{13}$$

On the other hand

$$\langle s, m \rangle x = \langle s, m \rangle \psi - (\langle s, m \rangle \psi - \langle s, m \rangle x), \tag{14}$$

with

$$\langle s, m \rangle \psi - \langle s, m \rangle x \in M_0.$$

Since the components of the element $\langle s, m \rangle x$ in the decomposition (12) are uniquely determined, we obtain by (13) and (14)

$$\langle s, m \rangle \psi = \langle s, m \rangle g_1$$

for any $\langle s, m \rangle$ $(\in L_{(B)})$, and this proves our assertion.

c) *implies* d). Let φ be a homomorphism of some submodule A of an arbitrary R-module B into G. Let us suppose, moreover, that condition c) is satisfied. Then we have the following

Lemma 1. *If b is an arbitrary element of B, then φ can always be extended to a homomorphic mapping of the module $\{A, b\}$ into G.*

Proof. 1. If $\{b\} \cap A = 0$, then $\{A, b\} = A + \{b\}$, and the possibility of extending φ is evident.

2. Let $\{b\} \cap A \neq 0$ and let L be the left ideal generated by all those elements $\langle s, m\rangle$ of the ring R^* for which $\langle s, m\rangle b \in A$ holds. The mapping

$$\langle s, m\rangle \to (\langle s, m\rangle b)\varphi \qquad (\langle s, m\rangle \in L)$$

is an R-homomorphism of $L_{(R)}$ into G, and consequently there exists an element $g_0 (\in G)$, such that

$$(\langle s, m\rangle b)\varphi = \langle s, m\rangle g_0 \tag{15}$$

holds for any element $\langle s, m\rangle$ $(\in L)$. We show that the mapping

$$a + \langle r, n\rangle b \to a\varphi + \langle r, n\rangle g_0 \qquad (a \in A;\ \langle r, n\rangle \in R^*) \tag{16}$$

is an R-homomorphism of the module $\{A, b\}$ into G, representing an extension of the homomorphism φ. One clearly has $a \to a\varphi$ for any element a $(\in A)$, and on the other hand the image of the sum of two elements is equal to the sum of the images of the two elements. Thus we have only to show that the mapping is single-valued. Suppose an equality of the form

$$a_1 + \langle r_1, n_1\rangle b = a_2 + \langle r_2, n_2\rangle b \qquad (a_1, a_2 \in A;\ \langle r_1, n_1\rangle, \langle r_2, n_2\rangle \in R^*) \tag{17}$$

holds. From this

$$(\langle r_2, n_2\rangle - \langle r_1, n_1\rangle) b = a_1 - a_2 \in A,$$

and consequently

$$\langle r_2, n_2\rangle - \langle r_1, n_1\rangle = \langle s_0, m_0\rangle \in L \tag{18}$$

follows. By the mapping (16)

$$a_1 + \langle r_1, n_1\rangle b \to a_1\varphi + \langle r_1, n_1\rangle g_0$$

and

$$a_2 + \langle r_2, n_2\rangle b \to a_2\varphi + \langle r_2, n_2\rangle g_0.$$

We show that $a_1\varphi + \langle r_1, n_1\rangle g_0 = a_2\varphi + \langle r_2, n_2\rangle g_0$. Indeed, by the equalities (17), (18) and (15) we have

$$\begin{aligned} a_1\varphi + \langle r_1, n_1\rangle g_0 &= (a_2 + \langle r_2, n_2\rangle b - \langle r_1, n_1\rangle b)\varphi + \langle r_1, n_1\rangle g_0 = \\ &= a_2\varphi + (\langle s_0, m_0\rangle b)\varphi + \langle r_1, n_1\rangle g_0 = a_2\varphi + \langle s_0, m_0\rangle g_0 + \\ &\quad + \langle r_1, n_1\rangle g_0 = a_2\varphi + \langle r_2, n_2\rangle g_0. \end{aligned}$$

This completes the proof of Lemma 1.

We are going to prove the implication c) $\to$ d) with the aid of Lemma 1:

Let us consider the (evidently non-void) set of all pairs of elements (H_μ, φ_μ), for which H_μ is a submodule containing the submodule A of B, and φ_μ a homomorphism of H_μ into G extending the homomorphism φ. This set is partially ordered with respect to the following relation: $(H_\lambda, \varphi_\lambda) \leqq (H_\mu, \varphi_\mu)$ if $H_\lambda \subseteq H_\mu$ and φ_μ is an extension of φ_λ. Since this partially ordered set is inductive, there exists by Zorn's lemma a maximal pair of elements (H_0, φ_0). Now, by our lemma, H_0 must coincide with B, and thus φ_0 is a homomorphism extending the homomorphism φ of the whole module B into G.

d) *implies* e). As a matter of fact, if d) holds for any B, then, in particular, it holds also in the case when B is a free R-module, and consequently any compatible system of equations over G is solvable in G.[13])

e) *implies* f). In the proof we make use of a part of the assertion of the following lemma, which is of some interest also for its own sake:

Lemma 2. *A submodule A of an arbitrary R-module H is a direct summand of H if and only if any system of equations over A, solvable in H, is solvable also in A.*[14])

Proof. Suppose that

$$H = A + B \tag{19}$$

and that the system of equations

$$f_\beta(\ldots, x_\nu, \ldots) = c_\beta \ (\in A) \tag{20}$$

is solvable in H. If $\ldots, h_\nu, \ldots$ $(\in H)$ is a solution of the system (20), then from the unique decomposition

$$h_\nu = a_\nu + b_\nu \qquad (a_\nu \in A, b_\nu \in B)$$

implied by (19) we obtain

$$f_\beta(\ldots, h_\nu, \ldots) = f_\beta(\ldots, a_\nu, \ldots) + f_\beta(\ldots, b_\nu, \ldots) = c_\beta \ (\in A),$$

and so

$$f_\beta(\ldots, a_\nu, \ldots) = c_\beta.$$

Thus the system of elements $\ldots, a_\nu, \ldots$ is a solution in A of the system of equations (20).

Suppose that, conversely, any system of equations over A, solvable in H, is solvable also in A. Let $\ldots, x_\mu, \ldots$ be a system of elements of H, such that

$$H = \{A, \ldots, x_\mu, \ldots\}. \tag{21}$$

---

13) Here is still another proof of the implication d)$\to$e). Let

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g_\beta \tag{$*$}$$

be an arbitrary compatible system of equations over G. Then, by Theorem 1, there exists an R-module K, which has G as a submodule and in which the system of equations $(*)$ is solvable. Let $\ldots, x_\alpha, \ldots$ $(\in K)$ be an arbitrary solution. Since $g\varphi = g$ is a homomorphic mapping of the submodule G of the module K onto G, it can be extended by d) to a homomorphism $\overline{\varphi}$ of the whole of K onto G. Then

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha \overline{\varphi}, \ldots) = [f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots)]\overline{\varphi} = g_\beta \overline{\varphi} = g_\beta \varphi = g_\beta,$$

i. e. the system of elements $\ldots, (x_\alpha \overline{\varphi}), \ldots$ $(\in G)$ is a solution in G of the system of equations $(*)$.

14) In the case of ordinary abelian groups this lemma is due to Gacsályi [8]. The proof too is a suitable modification of that given by Gacsályi.

Now consider all valid relations of the form

(22) $$\langle r_1, n_1\rangle x_{\mu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle x_{\mu_k} = a(\in A;\ \langle r_i, n_i\rangle \in R^*).$$

The system of these relations may be considered as a system of equations over A, having the system of elements $\ldots, x_\mu, \ldots$ as a solution. By our hypothesis this system of equations is satisfied also by some system $\ldots, y_\mu, \ldots$ of elements of A, i. e.

$$\langle r_1, n_1\rangle y_{\mu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle y_{\mu_k} = a.$$

We show that

(23) $$H = A + B$$

with

$$B = \{\ldots, x_\mu - y_\mu, \ldots\}.$$

As a matter of fact, the modules A and B together generate the whole module H, since $\{A, B\}$ contains all elements x_μ and (21) holds. On the other hand let

$$\langle r_1, n_1\rangle (x_{\mu_1} - y_{\mu_1}) + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle (x_{\mu_k} - y_{\mu_k}) = a' \ (\in A)$$

be an arbitrary element of the intersection $A \cap B$. This is one of the relations (22), satisfied, by our hypothesis, also for $\ldots, x_\mu = y_\mu, \ldots$ so that $a' = 0$, i. e. $A \cap B = 0$. This proves the relation (23) and thus also Lemma 2.

Let us now suppose that G is a submodule of the R-module D. Since any system of equations over G solvable in D is compatible and so by e) must have a solution in G, we can apply Lemma 2, which shows that G is a direct summand of the module D.

f) *implies* g). This is clear, since a direct summand is always a pure submodule.

g) *implies* a). Let

(24) $$f_\beta(x) = g_\beta$$

be a compatible system of equations in one unknown over G. Then, by Theorem 1, there exists an R-module K, having G as a submodule, in which the system of equations (24) is solvable. Since by g) G is a pure submodule in K, the system of equations (24) is solvable also in G, so that G is an algebraically closed R-module.

This completes the proof of Theorem 2.

If the R-module A is a submodule of the R-module K, we say that K is an *extension of* A. If $A \subset K$, we speak of a proper extension. Let $0 \neq x \in K$. We say that the element x is *algebraic over* A, if it is the solution of some equation $\langle r, n\rangle x = a$ ($\langle r, n\rangle \in R^*$; $0 \neq a \in A$) over A. In the contrary case we say that x is a *transcendental element over* A. The module K is an *algebraic* *extension* of A, if every nonzero element of K is algebraic over A. Otherwise we say that K is a *transcendental extension* of A.

Lemma 3. *Let the R-module K be an extension of the R-module A. The module K is an algebraic extension of A if and only if for any submodule H of K the relation $H \cap A = 0$ implies $H = 0$.*

Proof. Let us suppose that K is an algebraic extension of A, and that $H \subset K$ and $A \cap H = 0$. Then for any element $(0 \neq) h$ $(\in H)$ there exists an $\langle r, n \rangle$ $(\in R^*)$ such that $0 \neq \langle r, n \rangle h \in A$. Since, on the other hand, $\langle r, n \rangle h \in H$ we must have $H = 0$. — Conversely, if for any submodule H of K, $H \cap A = 0$ implies $H = 0$, then for the element $(0 \neq) x$ $(\in K)$ the relation $\{x\} \cap A \neq 0$ holds, and so there exists an $\langle r, n \rangle$ $(\in R^*)$ such that $\langle r, n \rangle x = a$ $(\neq 0, a \in A)$ is fulfilled.

Lemma 4. *Let A $(\neq 0)$ and B be submodules of the R-module K. If $A \cap B = 0$ and B is maximal with respect to this property, then the module K/B is an algebraic extension of the module $(A+B)/B$.*

Proof. Let indeed $k + B$ $(k \notin B)$ be an arbitrary nonzero element of K/B. Then, by the choice of B, one has $(\{k, B\} \cap (A+B)) \subseteq\mathrel{|}\!\!\!\!= B$, so that $k + B$ is an element of K/B algebraic over $(A+B)/B$.

Theorem 3. *An R-module A is algebraically closed if and only if it has no proper algebraic extensions.*

Proof. Let K be an extension of the algebraically closed module A. Then, by Theorem 2 there exists a submodule H of K such that $K = A \dotplus H$. If K is a proper extension, then $H \neq 0$ and a nonzero element of H cannot be algebraic over A. — Conversely, let us suppose that A has no proper algebraic extension, and let K be an arbitrary submodule containing A. We show that A is a direct summand of K, which, by Theorem 2, amounts to proving our assertion. If $A = 0$, we have nothing to show. Therefore we suppose $A \neq 0$. Let H be a submodule of K which is maximal with respect to the property $A \cap H = 0$. Then, by Lemma 4, K/H is an *algebraic* extension of the module $(A+H)/H$ which is isomorphic to A, and by our hypothesis this is only possible if $A + H = K$.

Let K be an arbitrary extension of the R-module A. We call an arbitrary finite set $h_1, \ldots, h_k$ of nonzero elements in K *algebraically independent over A*, if a relation

$$\langle r_1, n_1 \rangle h_1 + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle h_k = a \ (\in A)$$

always implies

$$\langle r_1, n_1 \rangle h_1 = \cdots = \langle r_k, n_k \rangle h_k = 0.$$

A system of arbitrary cardinality of elements of K is algebraically independent over A, if any of its finite subsystems has this property.[15]) We say that K is a *purely transcendental extension* of A, if the module K is generated by A and by a system S of elements algebraically independent over A.

Theorem 4. *Any extension K of an arbitrary R-module A can be obtained as the result of a purely transcendental extension followed by an algebraic extension.*

Proof. Let S be a system of elements of K, maximal algebraically independent over A. (The existence of such a system of elements S follows from Zorn's lemma.) Then $\{A, S\}$ is a purely transcendental extension of A. Let be $(0 \neq)$ $g \in K$ and $g \notin \{A, S\}$. By the maximality of the system S a relation of the form

$$\langle r, n\rangle g + \langle r_1, n_1\rangle h_1 + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle h_k = a \quad (\in A)$$

holds, with $h_1, \ldots, h_k \in S$ and $\langle r, n\rangle g \neq 0$. Thus

$$0 \neq \langle r, n\rangle g = a - (\langle r_1, n_1\rangle h_1 + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle h_k) \in \{A, S\},$$

so that g is an algebraic element over $\{A, S\}$. This fact proves our theorem.

Two extensions of the R-module G will be called equivalent, if it is possible to establish between them an isomorphism, by which the elements of G remain fixed.

We prove the following theorem on the algebraic closure of modules:

Theorem 5. *Let R be an arbitrary ring.*

α) *Any R-module G has algebraically closed extensions.*

β) *For any R-module G_0 the following assertions are equivalent:*

β_1) *G_0 is a maximal algebraic extension of G;*

β_2) *G_0 is an algebraically closed algebraic extension of G;*

β_3) *G_0 is a minimal algebraically closed extension of G.*

γ) *Any R-module G has one, and up to equivalence only one extension G_0, having of the properties β_1), β_2), β_3).*[16])

Proof. *Proof of α).* Let τ be a limit-ordinal number, whose cardinal number is greater than the number of elements of R^*. We define the R-modules G_ν for any ordinal ν $(0 \leqq \nu \leqq \tau)$ in the following way:

---

[15]) If $A = 0$, then algebraic independence over A coincides with ordinary independence.

[16]) I am indebted to J. Szendrei for kindly having called my attention to the fact that the theorem of Baer [1] and Eckmann and Schopf [4] on the existence and unicity of the minimal injective extension has been generalized recently from the case of unitary modules to the case of arbitrary modules by R. E. Johnson. (Structure theory of faithful rings II. Restricted rings, *Transactions Amer. Math. Soc.*, 84 (1957), 523—544, Theorem 7. 1.)

1. $G_0 = G$.

2. If $\nu - 1$ exists, then let us consider an arbitrary compatible system $[L, \varphi]$ of equations in one unknown over $G_{\nu-1}$. There exists an R-module $G'_{\nu-1}$, in which this system of equations is solvable. By repeated (possibly transfinitely many) uses of this construction we arrive at a module G_ν, which contains $G_{\nu-1}$ as a submodule, and in which every compatible system of equations in one unknown ower $G_{\nu-1}$ is solvable.

3. For limit-ordinals ν the module G_ν is the union of all modules G_μ for $\mu < \nu$.

Now we show that $A = G_\tau$ is an algebraically closed extension of G. Let $[M, \psi]$ be an arbitrary compatible system of equations in one unknown over A. This is a homomorphism ψ into A of the submodule M of the free R-module $R(1)$ (resp. of the left ideal M of the ring R^*). Then there exists an ordinal number σ $(< \tau)$ such that $M\psi \subseteq G_\sigma$. The system of equations $[M, \psi]$ is therefore solvable in $G_{\sigma+1}$ and consequently also in A. Thus A is an algebraically closed module.

Proof of β). Let us suppose that β_1) is fulfilled. Since any algebraic extension of G_0 is an algebraic extension also of G, G_0 has, by our hypothesis, no proper algebraic extension. Thus (by Theorem 3) G_0 is algebraically closed.

Let us suppose that β_2) is fulfilled, and let G_1 be an algebraically closed extension of G, for which $G \subseteq G_1 \subset G_0$. Now this implies $G_0 = G_1 + K$, $K \neq 0$ and so G_0 cannot be an algebraic extension of G. This contradiction proves that G_0 is a minimal algebraically closed extension of G.

Let us suppose that β_3) is fulfilled. Then G_0 has no proper algebraic extension. If, therefore, G_0 is an algebraic extension of G, it must be a maximal algebraic extension of G. Thus we have only to show that G_0 is an algebraic extension of G. Consider an algebraic extension H of G which is maximal in G_0 (Zorn's lemma!). We prove that $H = G_0$. Suppose that H' is an arbitrary algebraic extension of H. Then the identical mapping of H into G_0 can be extended to a homomorphism into G_0 of the whole of H'. Since for the kernel N of this mapping $N \cap H = 0$ holds, we have by the algebraic character of this extension $N = 0$, and so the imbedding of H into G_0 can be extended also to H'. Thus we necessarily have $H' = H$. The module H has therefore no proper algebraic extension, so H is algebraically closed and by our hypothesis $H = G_0$ holds.

Proof of γ). First we show that G has an extension G_0 with property β_2). Let G' be an algebraically closed extension of G (such an extension surely exists in view of α)), and let us consider in G' a maximal algebraic extension H of G. As we have seen in the preceding paragraph, H is algebraically closed, and so $G_0 = H$ is an extension with property β_2) of the module G.

Let us fix G_0, and let $\overline{G}$ be an arbitrary minimal algebraically closed extension of G. Since G_0 is an algebraic extension of G and $G \subseteq \overline{G}$, making use of the method employed in proving the implication $\beta_3) \rightarrow \beta_1$), we can imbed G_0 into $\overline{G}$ so that $\overline{G}$ contains an extension $\overline{G_0}$ of G, equivalent to G_0. Now since G_0 is algebraically closed and $\overline{G}$ is a minimal algebraically closed extension of G, we must have $\overline{G_0} = \overline{G}$. So G_0 and $\overline{G}$ are equivalent minimal algebraically closed extensions of G.

This completes the proof of Theorem 5.

In what follows, we shall make a few additional remarks on algebraically closed modules. It is easy to see that the following statements are valid:

Any direct summand of an algebraically closed module is also algebraically closed.

A submodule of an algebraically closed module is a pure submodule, if and only if it is algebraically closed.

The complete direct sum of algebraically closed modules is also algebraically closed.

Let us now consider the following example:

Let R be the discrete direct sum of the infinitely many rings $S^1, S^2, \ldots$:

$$R = \Sigma S^i,$$

where every ring S^i has at least two elements. Since S^i is an ideal in R, it may be regarded as an R-module. Let us imbed all modules $S^i_{(R)}$ in corresponding algebraically closed R-modules A^i, and consider the direct sum

(25) $$A = \Sigma A^i.$$

We show that A is not an algebraically closed R-module. The set of all equations

$$rx = r \qquad (r \in R)$$

forms evidently a compatible system of equations over A. Nevertheless, this system of equations can have no solution in A, for any element x ($\in A$) has in the direct decomposition (25) only a finite number of nonzero components, and so for any x there exists an index i, such that the equality $r_0 x = r_0$ cannot be valid for any nonzero element $r_0 \in S^i$.

From this example we are able to gather the following facts:

The discrete direct sum of algebraically closed modules is not, in general, algebraically closed.

The union of an ascending chain of algebraically closed modules is not, in general, algebraically closed.

§ 5. A description of the algebraically closed trivial modules.

The following problem seems to be very difficult:

Let R be an arbitrary ring; to determine all algebraically closed R-modules.

In this section we give a modest contribution to this problem, by giving a complete description of the algebraically closed trivial modules.

Let r be an arbitrary element of the ring R, and let us consider the set N of all numbers $m(\in I)$, for which there exists a $t(\in R)$ such that $tr = mr$. N is an ideal in the ring I, and let n be the nonnegative generating element of this ideal. We shall call the number n the *exponent* of the element r, and denote it by $n = E(r)$.

Theorem 6. *For an arbitrary ring R the trivial R-module G with at least two elements is algebraically closed if and only if R has no element of exponent* 0, *and G, as an ordinary abelian group, satisfies the following conditions:*

1. *G is algebraically closed,*

2. *the order of any element of G having positive order, and the exponent of any element of R are relatively prime.*[17])

Proof. Let G be an algebraically closed trivial R-module. If r is an element of exponent 0 of the ring R, then the equation $rx = a(\neq 0, a \in G)$ is compatible, for $\langle t, m\rangle rx = 0$ implies $(tr + mr)x = 0$, $tr = -mr$ and thus $m = 0$, and so $\langle t, m\rangle a = 0$ holds too. The equation $rx = a(\neq 0)$ is however not solvable in G, and consequently R has no element of exponent 0. — Let us consider now the equation

$$nx = c \tag{26}$$

over G with arbitrary $(0 \neq)$ n $(\in I)$ and c $(\in G)$. This is a compatible equation, for the left-hand side of it is being annuled only by elements of the form $\langle r, 0\rangle$ of R^*, and these always annul the right-hand side too. Thus the equation (26) is solvable in G, and so G, as an ordinary abelian group is algebraically closed. — Suppose that the exponent $E(r)$ of some element $r(\in R)$ and the positive order of some element $g(\in G)$ are not relative prime. Then G has an element $g'(\neq 0)$ such that $E(r)g' = 0$. The equation $rx = g'$ is compatible. Indeed, if $\langle t, m\rangle rx = 0$, then $(tr + mr)x = 0$, $tr = -mr$ and consequently $m = m' \cdot E(r)$ for a suitable $m'(\in I)$, and thus

$$\langle t, m\rangle g' = tg' + mg' = mg' = m' \cdot E(r)g' = 0.$$

---

17) We shall call element of order 0 what is called in the literature often element of infinite order. We shall denote the order of the element g by $O(g)$.

On the other hand, the equation $rx = g'(\neq 0)$ can have no solution in the trivial R-module G, and, since G is algebraically closed, if $O(g) > 0$, then $(E(r), O(g)) = 1$ for every element $r(\in R)$.

Conversely, let us suppose that R has no element of exponent 0, that G is a trivial R-module and that G, as an ordinary abelian group, satisfies conditions 1) and 2). We show that G is an algebraically closed R-module. Consider the compatible system of equations

(27) $$\langle r_\nu, n_\nu\rangle x = g_\nu (\in G)$$

over G, supposing (of course without loss of generality) that the elements $\langle r_\nu, n_\nu\rangle$ actually run through some left ideal L of R^*. Of course, the elements of the form $\langle r_\mu, 0\rangle$ of the left ideal L also form a left ideal in R^*, and if we consider of the system (27) only the corresponding equations

(28) $$\langle r_\mu, 0\rangle x = g_\mu$$

then we get a system of equations, which, as a subsystem of a compatible system, is clearly also compatible. Let $s_\mu(\in R)$ be an element for which $s_\mu r_\mu = E(r_\mu)\cdot r_\mu$. Then one has

$$\langle s_\mu, -E(r_\mu)\rangle \langle r_\mu, 0\rangle x = 0,$$

and in view of the compatibility of the system (28)

$$\langle s_\mu, -E(r_\mu)\rangle g_\mu = s_\mu g_\mu - E(r_\mu) g_\mu = -E(r_\mu) g_\mu = 0.$$

Since $E(r_\mu) > 0$, also $O(g_\mu) > 0$ holds, and so in view of $(E(r_\mu), O(g_\mu)) = 1$ the equation $g_\mu = 0$ must hold.

Consider now the system of equations

(29) $$n_\nu x = g_\nu$$

obtained from the system (27). The set of all elements n_ν is an ideal J of the ring I. Let n_{ν_0} be the nonnegative generating element of the ideal J. Then the equation

(30) $$n_{\nu_0} x = g_{\nu_0}$$

has a solution $x = g$ in G, namely if $n_{\nu_0} \neq 0$ then by condition 1), and if $n_{\nu_0} = 0$ then by the preceding paragraph $g_{\nu_0} = 0$, and so e. g. $g = 0$ is clearly a solution. We show that the solution $x = g$ of the equation (30) is a solution also of the system of equations (29). Let indeed be

$$n_\nu x = g_\nu$$

an arbitrary equation of the system (29). Then for a suitable $l(\in I)$ the equation $n_\nu = l n_{\nu_0}$ holds. It is clearly sufficient to show that $g_\nu = l g_{\nu_0}$. Considering the system of equations (27) we obtain

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle x - l\langle r_{\nu_0}, n_{\nu_0}\rangle x = \langle r_\nu - l r_{\nu_0}, n_\nu - l n_{\nu_0}\rangle x =$$
$$= \langle r_\nu - l r_{\nu_0}, 0\rangle x = g_\nu - l g_{\nu_0}$$

and so by the preceding paragraph $g_\nu - l g_{\nu_0} = 0$ i. e. $g_\nu = l g_{\nu_0}$. So the element $x = g (\in G)$ is a solution of (29) and it is also a solution of the system of equations (27), as indeed

$$\langle r_\nu, n_\nu \rangle g = r_\nu g + n_\nu g = n_\nu g = g_\nu$$

holds. This completes the proof of our theorem.

As immediate consequences of Theorem 6 we have

Corollary 1. *If R has an element of exponent 0, then there exists only one algebraically closed trivial R-module, namely the R-module with only one element. If the exponent of any element of R is positive, then all algebraically closed trivial R-modules are given by those trivial R-modules, which, as ordinary abelian groups, are direct sums of groups isomorphic to the additive group of rational numbers and of Prüfer quasicyclic groups which belong to primes relatively prime to the exponents of all elements of the ring R. — In particular, if all elements of R have exponent 1, then any algebraically closed ordinary abelian group is algebraically closed also if taken to be a trivial R-module.*

Corollary 2. *An arbitrary ring R has the property that any algebraically closed ordinary abelian group is algebraically closed also as a trivial R-module, if and only if for any element r of R there exists an element s in R, such that $sr = r$. — In particular, if R is a ring with a left unit element, then any algebraically closed ordinary abelian group is also algebraically closed if considered as a trivial R-module.*

Corollary 3. *If for any element r of the ring R there exists an element s of R such that $sr = r$, then the minimal algebraically closed extension of an arbitrary trivial R-module G can be obtained by taking the minimal algebraically closed extension of G, considered as an ordinary abelian group, and by taking this extension to be a trivial R-module.*

§ 6. Semi-simple rings as operator domains.

In investigating any class of operator-modules, one can raise the question whether there exist, and, in the affirmative case, which are all the rings R, for which any R-module belongs to the class of modules considered. We now raise this question for algebraically closed modules. We have seen in § 5 that for a trivial R-module to be algebraically closed, it is necessary that it be algebraically closed also as an ordinary abelian group. Now, since an abelian group can be considered as a trivial R-module for any ring R, there exist no ring R, for which every R-module is algebraically closed. Therefore we investigate the problem of determining those rings R, for which every R-module is the direct sum of its maximal trivial submodule and of an algebraically closed R-module. The solution of this problem leads to the class of semi-simple rings (in the classical sense).

By a semi-simple ring we mean a ring containing no nonzero nilpotent left ideal and satisfying the descending chain condition for left ideals. According to the well-known Wedderburn-Artin structure theorem such a ring is isomorphic to a direct sum of a finite number of rings, each of which is isomorphic to the complete ring of linear transformations in a suitable finite dimensional vector space over a skew field. By another characterization, *a ring R is semi-simple if and only if every left ideal of R contains a right unit element* (see [6]). Besides this second characterization of semi-simple rings, we make use in our proof also of the following characterization, due to E. NOETHER [16]: *an arbitrary ring is semi-simple if and only if it has a unit element and can be decomposed into the direct sum of minimal left ideals.*

As is shown by the results of our paper [11], the semi-simple rings have interesting properties also as operator domains. Further results in this direction are given by the following theorems:

Theorem 7. *An arbitrary ring R is semi-simple if and only if every R-module G admits a representation in the form of a direct sum*

$$G = G_0 + G_1, \tag{31}$$

where G_0 is the maximal trivial submodule of G and G_1 an algebraically closed R-module.

Theorem 8. *If R is a semi-simple ring, then the compatible system of equations*

$$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g_\beta (\in G_1) \tag{32}$$

over the arbitrary unitary R-module G_1 possesses a solution in G_1 and all solutions in G_1 can be obtained by the system of formulae

$$x_\alpha = c_\alpha + \sum_{\delta \in D} d'_{\alpha\delta} h_\delta, \tag{33}$$

where the h_δ are parameters freely chosen from G_1, and the constants c_α $(\in G_1)$ are (finite) linear conbinations over R of the elements g_β standing on the right-hand side of the system of equations (32).

Corollary 1. *An arbitrary compatible system of linear equations over a semi-simple ring is solvable in the ring, and all solutions are yielded by the „classical“ system of formulae* (33) [10].

C o r o l l a r y 2. *If R is a semi-simple ring, then a compatible system of equations over an arbitrary unitary R-module G_1 admits exactly one solution in G_1 if and only if the linear forms on the left-hand sides of the system generate the whole free unitary R-module which is spanned by all unknowns as indeterminates.*

C o r o l l a r y 3. *If R is a semi-simple ring, then an arbitrary (not necessarily compatible) system of equations over an arbitrary unitary R-module G_1 admits a solution in G_1 if and only if every finite subsystem has a solution in G_1.*

C o r o l l a r y 4. *If R is a semi-simple ring, then every system of equations over an arbitrary unitary R-module contains a maximal solvable subsystem.*

C o r o l l a r y 5. *Let R be a semi-simple ring. Then the arbitrary R-module is algebraically closed if and only if its maximal trivial submodule, considered as an ordinary abelian group, is algebraically closed.*

C o r o l l a r y 6. *Let R be a semi-simple ring and G an arbitrary R-module. Consider the decomposition $G = G_0 \dotplus G_1$ of G into the direct sum of its maximal trivial submodule G_0 and of a unitary module G_1. Let the abelian group A be the minimal algebraically closed extension of G_0, considered as an ordinary abelian group. Take A to be a trivial R-module. Then $A \dotplus G_1$ is the minimal algebraically closed extension of the module G.*

Since Corollaries 1—5 are immediate consequences of Theorems 7 and 8, we prove only Corollary 6. Let $\bar{G}$ be a minimal algebraically closed extension of G. Since, by Theorem 7, G_1 is algebraically closed, a direct decomposition $\bar{G} = \bar{A} \dotplus G_1$ holds with $G_0 \subseteq \bar{A}$. The module $\bar{A}$, as a direct summand of an algebraically closed module, is algebraically closed, and is evidently a minimal algebraically closed extension of G_0. Now, since R is a ring with unit element, $\bar{A}$ is a trivial R-module, by Corollary 3 of Theorem 6, and considered as an ordinary abelian group, it is a minimal algebraically closed extension of the abelian group G_0.

P r o o f o f T h e o r e m s 7 a n d 8. First let us suppose that for an arbitrary ring R any R-module G is of the form (31), and let us consider accordingly the module $R^*_{(R)}$:

$$R^*_{(R)} = A_0 \dotplus A_1.$$

Let, by this decomposition,

$$\langle 0, 1 \rangle = e_0 + e_1 \qquad (e_0 \in A_0,\, e_1 \in A_1).$$

If L is an arbitrary left ideal in R, then for each $l (\in L)$ the relation

$$\langle l, 0 \rangle = l \langle 0, 1 \rangle = l e_0 + l e_1 = l e_1 \in A_1$$

holds, i. e. the set H of the elements $\langle l, 0\rangle$ $(l \in L)$ is a submodule of the module A_1. The maximal trivial submodule of H is 0, so H is algebraically closed. Consider now the, evidently compatible, system of equations

$$\langle l, 0\rangle x = \langle l, 0\rangle \qquad (l \in L)$$

over H, with l running trough all elements of L. Let $\langle e, 0\rangle$ $(e \in L)$ be some solution in H of this system of equations. Then for any $l(\in L)$ the relation $\langle l, 0\rangle\langle e, 0\rangle = \langle l, 0\rangle$ i. e. $le = l$ holds. Thus the element e is the right unit element of the left ideal L. Since L was an arbitrary left ideal of R, the ring R is semi-simple.

Conversely, let R be a semi-simple ring and G an arbitrary R-module. Making use of the Peirce decomposition, we represent G as a direct sum of its maximal trivial submodule G_0 and of a unitary R-module G_1:

$$G = G_0 + G_1.$$

The proof of the remaining part of Theorem 7 as well as the proof of Theorem 8 is based on the following

Lemma 5. *If R is a semi-simple ring, then for every submodule M of the free unitary R-module F generated by the free system of generators x_α $(\alpha \in A)$ there holds a direct representation*

$$F = M + N, \tag{34}$$

where N has the form

$$N = \sum_{\delta \in D} \{s_\delta x_\delta\} \qquad (s_\delta \in R) \tag{35}$$

D being a subset of the index set A.

In order to prove this lemma, let us consider some direct decomposition

$$R = L_1 + L_2 + \cdots + L_m$$

of the semi-simple ring R, where $L_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ are minimal left ideals in R, the existence of such a decomposition being assured by the abovementioned theorem of Noether. For the unit element 1 of the ring R we accordingly get the representation

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m. \tag{36}$$

By the minimality of L_i we have $Re_i = L_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Consider now the free unitary R-module F. Making the identification $1 \cdot x_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha \in A)$ we may suppose that $x_\alpha \in F$. By the decomposition (36) of the element 1 we have

$$\{x_\alpha\} = \{e_1 x_\alpha\} + \{e_2 x_\alpha\} + \cdots + \{e_m x_\alpha\}, \tag{37}$$

i. e.

$$F = \sum_{\alpha \in A} \{x_\alpha\} = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{m} \{e_i x_\alpha\}.$$

By Zorn's lemma we select a maximal subset X of the set of all elements $e_i x_\alpha (\alpha \in A, i=1,\dots,m)$ such that for the submodule $\{X\}$ generated by the set X

$$M \cap \{X\} = 0.$$

We prove the validity of (34) with $N=\{X\}$. For this purpose we have only to show that $e_j x_\lambda \in M+\{X\}$ for all $\lambda \in A$ and $j=1,\dots,m$, for in this case $x_\lambda \in M+\{X\}$ holds by (37) for any $\lambda(\in A)$. Now by the maximality of the set X we have

$$\{e_j x_\lambda\} \cap (M+\{X\}) \neq 0.$$

But since $\{e_j x_\lambda\}$ is a minimal submodule of F, this implies

$$\{e_j x_\lambda\} \subseteq (M+\{X\}),$$

i. e. $e_j x_\lambda \in (M+\{X\})$. So we have proved (34) with $N=\{X\}$. As $\{X\}$ is a direct sum of submodules of the form $\{e_i x_\alpha\}$ the representation (35) holds, and, in addition, we see that each s_δ is a sum of some e_i's. (Namely e. g. $\{e_1 x_\delta\}+\{e_2 x_\delta\}=\{(e_1+e_2)x_\delta\}$ holds.) Thus the proof of the lemma is complete.

In order to conclude the proof of Theorem 7, let $[M, \varphi]$ be an arbitrary compatible system of equations over the unitary R-module G_1. We show that the mapping φ can be extended to an R-homomorphism $\overline{\varphi}$ of the whole module F into $M\varphi$. By virtue of (34) this extension is indeed immediate: for an arbitrary element $f(\in F)$ we have by (34) the unique representation

$$f=f'+f'' \qquad (f' \in M, f'' \in N)$$

and we define

$$f\overline{\varphi}=f'\varphi \qquad (f \in F).$$

This completes the proof of Theorem 7.

Suppose now that the system of equations $[M, \varphi]$ has the „coordinate" form (32). Then the solution $\overline{\varphi}$ considered can be written in the form

(38) $$x_\alpha = c_\alpha \quad (\in M\varphi,\ \alpha \in A).$$

c_α being a linear combination over R of a finite number of the g_β's standing on the right-hand side of the system of equations (32).

Consider now the homogeneous system of equations $[M, \psi]$ corresponding to the system $[M, \varphi]$, i. e. let $M\psi=0$. In order to get all solutions of this system we construct all possible extensions $\overline{\psi}$ of ψ. In view of the relations (34) and (35) all R-homomorphisms into G_1 of the free unitary module F for which

(39) $$M\overline{\psi}=0$$

holds, are determined by the images

(40) $$x_\delta \overline{\psi} = h_\delta \quad (\in G_1, \delta \in D)$$

of the elements x_δ figuring in (35), and, on the other hand, an arbitrary system of prescribed elements $h_\delta(\in G_1, \delta \in D)$ induces by (40), (35), (34) and (39) a well-defined extension $\overline{\psi}$ of ψ. Since, moreover, by (34) and (35) in particular for the elements $x_\alpha(\in F, \alpha \in A)$ the representation

$$x_\alpha = m_\alpha + \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta}(s_\delta x_\delta) \qquad (m_\alpha \in M)$$

holds, it follows by (40) and (39) that all solutions in G_1 of the homogeneous system of equations $[M, \psi]$ are obtained from the formulae

$$b_\alpha = x_\alpha \overline{\psi} = \sum_{\delta \in D} (d_{\alpha\delta} s_\delta) h_\delta = \sum_{\delta \in D} d'_{\alpha\delta} h_\delta \qquad (\alpha \in A),$$

where the values of the parameters h_δ are to be freely chosen from the elements of the module G_1. Taking now into account that (38) is one of the solutions of the system of equations $[M, \varphi]$, we obtain the solving formulae (33). This completes the proof of Theorem 8.

Bibliography.

[1] R. Baer, Abelian groups that are direct summand of every containing abelian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800—806.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, I. Partie, Livre II: *Algèbre* (Paris, 1947).

[3] J. L. Dorroh, Concerning adjunctions to algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 85—88.

[4] B. Eckmann—A. Schopf, Über injektive Moduln, *Archiv der Math.*, **4** (1953), 75—78.

[5] L. Fuchs, On a useful lemma for abelian groups, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 134—138.

[6] L. Fuchs—T. Szele, Contribution to the theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 235—239.

[7] S. Gacsályi, On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 292—296.

[8] S. Gacsályi, On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 89—92.

[9] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups* (Ann Arbor, 1954).

[10] A. Kertész, The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 79—86.

[11] A. Kertész, Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8**. (1957), 235—257.

[12] A. Kertész, Über die allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R.*, in the press.

[13] А. Г. Курош, Теория групп (2-е изд.) (Москва, 1953).

[14] J. von Neumann, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **22** (1936), 707—713.

[15] J. von Neumann, *Continuous geometry* (Princeton, 1937).

[16] E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Math. Zeitschrift*, **30** (1929), 641—692.

[17] G. Pollák, Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 87—88.

[18] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 167—192.

[19] T. Szele, On arbitrary systems of linear equations, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 297—299.

[20] O. Villamayor, Sur les équations et les systèmes linéaires dans les anneaux associatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **240** (1955), 1681—1683.

(Received July 10, 1957.)

Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern.

Von O. STEINFELD in Budapest.

§ 1.

Wir verstehen nach [3] unter einem *Quasiideal* einer Halbgruppe H eine nicht-leere Untermenge $\mathfrak{a}$ von H mit der Eigenschaft

(1) $$H\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}H \subseteq \mathfrak{a}.$$

Der nicht-leere Durchschnitt $\mathfrak{k}$ aller zweiseitiger Ideale einer Halbgruppe H wird *Suschkewitsch-Kern* von H genannt, und es wird immer mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Nach dem Vorbild bei ŠT. SCHWARZ [2] führen wir die folgenden Begriffe ein. Wir sagen, daß *H eine Halbgruppe mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern* (kurz eine Halbgruppe m. e. S.-K.) ist, wenn $\mathfrak{k}$ existiert und von H verschieden ist. (Z. B. ist eine Halbgruppe ($\neq 0$) mit Nullelement eine Halbgruppe m. e. S.-K.) Wir nennen ein Quasiideal $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ *relativ minimal,* wenn $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$ gilt und H kein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ enthält. Ähnlich können die relativ minimalen ein- und zweiseitigen Ideale definiert werden.

Im folgenden Paragraphen besprechen wir als Vorbereitung einige Lemmas.

In § 3 beschäftigen wir uns mit den relativ minimalen Quasiidealen einer Halbgruppe m. e. S.-K. Um diese Ergebnisse zu formulieren, schicken wir zwei Definitionen voraus.

Definition 1. Eine Teilhalbgruppe U der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ von der Eigenschaft $U^2 \subseteq \mathfrak{k} \subseteq U$ wird eine *$\mathfrak{k}$-Halbgruppe* genannt.

Insbesondere ist $\mathfrak{k}$ selbst eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe. Im Falle $\mathfrak{k} = 0$ stimmen die $\mathfrak{k}$-Halbgruppen mit den sogenannten Zero-Halbgruppen überein.

Definition 2. Eine Teilhalbgruppe V der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ nennen wir eine *Gruppe mit* $\mathfrak{k}$, wenn $\mathfrak{k} \subset V$ gilt, und für jedes Elementepaar

α, β $(\in V - \mathfrak{k})$ die Gleichungen[1]) $\alpha\xi = \beta$ und $\eta\alpha = \beta$ mit ξ, η $(\in V - \mathfrak{k})$ lösbar sind.

Ähnlich wie bei dem Begriff der Gruppe kann man einsehen, daß Definition 2 mit folgender Definition äquivalent ist:

Definition 2'. Eine Teilhalbgruppe V einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ nennen wir eine *Gruppe mit* $\mathfrak{k}$, wenn $\mathfrak{k} \subset V$ gilt und für jedes Element α $(\in V - \mathfrak{k})$ ein Element ε $(\in V - \mathfrak{k})$ mit $\varepsilon\alpha = \alpha$ (linksseitiges Einselement) und ein Element α' $(\in V - \mathfrak{k})$ mit $\alpha'\alpha = \varepsilon$ gibt.

Es ist leicht einzusehen, daß aus Definition 2, oder aus Definition 2' für jedes Elementepaar α, β $(\in V - \mathfrak{k})$ auch die Bedingung $\alpha\beta \in V - \mathfrak{k}$ folgt. Das bedeutet, daß $V - \mathfrak{k}$ eine Gruppe ist und der Begriff der Gruppe mit $\mathfrak{k}$ als eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffs der Gruppe mit Nullelement zu betrachten ist.

A. H. CLIFFORD [1] hat bewiesen: Ist $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein minimales Linksideal bzw. Rechtsideal einer Halbgruppe H, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ bildet eine Gruppe. In [3] wurde ferner bewiesen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ ein minimales Quasiideal[2]) von H und jedes minimale Quasiideal eine Gruppe ist

Wir gewinnen analoge Sätze über die relativ minimalen Quasiideale: Ist $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Linksideal und $\mathfrak{r}$ ein relativ minimales Rechtsideal einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder gleich $\mathfrak{k}$ oder ein relativ minimales Quasiideal von H. Sowohl ein relativ minimales Quasiideal von H, als auch das Produkt $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ sind entweder $\mathfrak{k}$-Halbgruppen oder Gruppen mit $\mathfrak{k}$. Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ und zugleich ein relativ minimales Quasiideal von H.

Außerdem beweisen wir, daß die Halbgruppen $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ alle drei gleichzeitig $\mathfrak{k}$-Halbgruppen oder keine $\mathfrak{k}$-Halbgruppen sind.

§ 2.

Lemma 1. *Ist G eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ in einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so hat G als Halbgruppe kein Quasiideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a} \subset G$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Quasiideal von G mit der Eigenschaft $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a} \subseteqq G$. Es bezeichne α ein Element von $\mathfrak{a} - \mathfrak{k}$. Nach Definition 2 sind für jedes γ $(\in G - \mathfrak{k})$ die Gleichungen

(2) $$\gamma = \alpha\xi, \quad \gamma = \eta\alpha \qquad (\gamma, \xi, \eta \in G - \mathfrak{k},\ \alpha \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$$

---

[1]) Mit $M - N$ $(N \subseteqq M)$ bezeichnen wir die Differenzmenge von M und N, d. h. die Menge derjenigen Elemente von M, die in N nicht enthalten sind.

[2]) Ein Quasiideal (Linksideal, Rechtsideal) $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H heißt *minimal*, wenn in H kein Quasiideal (Linksideal, Rechtsideal) $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ gibt.

lösbar, deshalb ist γ in $\mathfrak{a}G$ und $G\mathfrak{a}$ enthalten. γ ist also nach (1) ein Element des Quasiideals $\mathfrak{a}$, woraus $\mathfrak{a}=G$ folgt.

Lemma 2. (Siehe Lemma 5 von [3]). *Es sei ε ein idempontentes Element, $\mathfrak{l}$ ein Linksideal, $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal der Halbgruppe H. Dann sind $\varepsilon\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}\varepsilon$ Quasiideale von H.*

Aus der Definition des Suschkewitsch-Kerns $\mathfrak{k}$ bekommt man unmittelbar:

(3) $$\mathfrak{k}^2=\mathfrak{k}.$$

Aus (3) folgt trivialerweise:

Lemma 3. *Sind M und N zwei den Suschkewitsch-Kern enthaltende Teilmengen der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist*

(4) $$\mathfrak{k}\subseteqq MN.$$

Lemma 4. *Ist ε ein idempotentes Element einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so gilt:*

(5) $$(\mathfrak{k},\varepsilon H\varepsilon)=(\mathfrak{k},H\varepsilon)\cap(\mathfrak{k},\varepsilon H).$$

Beweis. Die linke Seite von (5) ist offenbar in der rechten Seite enthalten. Wir haben also nur $(\mathfrak{k},H\varepsilon)\cap(\mathfrak{k},\varepsilon H)\subseteqq(\mathfrak{k},\varepsilon H\varepsilon)$ zu beweisen. Es sei α ein Element der rechten Seite. Ist α ein Element von $\mathfrak{k}$, so ist die Behauptung richtig. Im anderen Fall gilt

(6) $$\alpha=\varrho\varepsilon=\varepsilon\sigma \qquad (\varrho,\sigma\in H).$$

Da ε ein idempotentes Element ist, so folgt aus (6)

(6′) $$\varrho\varepsilon^2=\varrho\varepsilon=\varepsilon\sigma\varepsilon,$$

woraus man die Richtigkeit unserer Behauptung sieht.

Lemma 5. *Ist $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathfrak{m}$ ein Quasiideal einer Halbgruppe H, so ist die Menge $(\mathfrak{a},\mathfrak{m})$ ein Quasiideal von H.*

Beweis. Nach (1) haben wir

(1′) $$H(\mathfrak{a},\mathfrak{m})\cap(\mathfrak{a},\mathfrak{m})H=(H\mathfrak{a},H\mathfrak{m})\cap(\mathfrak{a}H,\mathfrak{m}H)\subseteqq(\mathfrak{a},\mathfrak{m})$$

zu beweisen. Da $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist, sind die Durchschnitte $H\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}H$, $H\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}H$, $H\mathfrak{m}\cap\mathfrak{a}H$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Nach (1) gilt außerdem $H\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}H\subseteqq\mathfrak{m}$, also ist (1′) richtig.

§ 3.

Satz 1. *Der Durchschnitt eines relativ minimalen Links- und Rechtsideals einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$ ist entweder gleich $\mathfrak{k}$ oder ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt eines relativ minimalen Linksideals $\mathfrak{l}$ und eines relativ minimalen Rechtsideals $\mathfrak{r}$ von H und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{k}$. Offenbar ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{k}$ enthaltendes Quasiideal. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ im Widerspruch zu unserer Behauptung nicht relativ minimal ist; dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Wegen Lemma 3 und der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$ gilt entweder $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ oder $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$. Im Fall $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{k}$ wäre $\mathfrak{a}'$ ein Linksideal mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{l}$, was aber wegen der Definition von $\mathfrak{l}$ unmöglich ist. Folglich ist $H\mathfrak{a}' = \mathfrak{l}$.

Ebenso kann man einsehen, daß $\mathfrak{a}'H = \mathfrak{r}$ gilt. Daraus folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = H\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'H \subseteqq \mathfrak{a}'$, was der Bedingung $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ widerspricht. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Rechtsideal bzw. ein relativ minimales Linksideal der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ entweder eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe, oder eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$. Im zweiten Falle ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, und deshalb ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Im Falle $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ ist unsere Behauptung richtig. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ gilt, weshalb nach Lemma 3 auch $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}$ besteht. Es bezeichne ϱ ein beliebiges Element von $\mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$. Wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ ist ϱ in $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{r}$ enthalten. Wegen der Definition von $\mathfrak{l}$ ist das Linksideal $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\varrho)$ entweder $\mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}$ gleich.

Trifft für mindestens ein ϱ der erste Fall zu, so bilden die Elemente ξ $(\in \mathfrak{r})$ mit $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\xi) \subseteqq \mathfrak{k}$ ein Rechtsideal $\mathfrak{r}^*$, welches die Bedingung $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}^* \subseteqq \mathfrak{r}$ erfüllt. Wegen der relativen Minimalität des Rechtsideals $\mathfrak{r}$ muß $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$ bestehen, woraus $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{k}$ bzw. wegen Lemma 3 auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ folgt. So sieht man, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$ gilt, d. h. $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist.

Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ keine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe, so muß folglich für jedes Element ϱ $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ der zweite Fall $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}\varrho) = \mathfrak{l}$ bestehen. Daraus folgt nach Lemma 3

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{k}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}\varrho) = (\mathfrak{k}, \mathfrak{r}\mathfrak{l}\varrho) = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \qquad (\varrho \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}). \tag{7}$$

Ähnlich folgt, daß für jedes $\varrho (\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ auch

$$(\mathfrak{k}, \varrho\mathfrak{r}\mathfrak{l}) = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \qquad (\varrho \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}). \tag{8}$$

besteht. Die Bedingungen (7) und (8) bedeuten, daß für jedes Elementepaar $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine ϱ, α $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ die Gleichungen

$$\xi\varrho = \alpha, \quad \varrho\eta = \alpha \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{t}) \tag{9}$$

lösbar sind. Damit haben wir infolge der Voraussetzung $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l}$ bewiesen, daß $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist.

Es sei ε $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k})$ ein linksseitiges Einselement von $\mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$. Da ε ein idempotentes Element von $\mathfrak{l} - \mathfrak{k}$ ist, besteht $\mathfrak{k} \subset (\mathfrak{k}, H\varepsilon) \subseteqq \mathfrak{l}$, woraus wegen der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$

(10) $$(\mathfrak{k}, H\varepsilon) = \mathfrak{l}$$

folgt. Ebenso sieht man ein:

(11) $$(\mathfrak{k}, \varepsilon H) = \mathfrak{r}.$$

Aus (10) und (11) bekommen wir $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}\mathfrak{l} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H)(\mathfrak{k}, H\varepsilon) = (\mathfrak{k}, \varepsilon H^2 \varepsilon) \subseteqq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$, woraus wegen Lemmas 2, 5 und Satz 1 die Behauptung $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ folgt, womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{l}$ ein relativ minimales Linksideal, $\mathfrak{r}$ ein relativ minimales Rechtsideal der Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{k}$, so sind die drei Halbgruppen $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder lauter $\mathfrak{k}$-Halbgruppen, oder ist keine von ihnen eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe.*

Beweis.[3]) Es sei zuerst $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe. Ist dabei $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, weshalb jetzt die Behauptung richtig ist.

Ist dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist entweder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$.

Aus $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ folgt die Existenz eines Elementes ϱ $(\in \mathfrak{r}\mathfrak{l} - \mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{l}\varrho \subseteqq \mathfrak{k}$. Daraus sieht man, daß die Elemente $\xi (\in \mathfrak{r})$ mit $\mathfrak{l}\xi \subseteqq \mathfrak{k}$ ein Rechtsideal $\mathfrak{r}^*$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{r}^* \subseteqq \mathfrak{r}$ bilden. Wegen der relativen Minimalität des Rechtsideals $\mathfrak{r}$ muß $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$ bestehen. Es gilt also $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, woraus auch $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) = \mathfrak{k}$ folgt. Wieder ist die Behauptung richtig.

Der zweite Fall $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ ist unmöglich, denn wegen der Voraussetzung muß $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l}$ bestehen, woraus wegen der relativen Minimalität von $\mathfrak{l}$ die Gleichung $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ folgt. Dies führt aber wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ zum Widerspruch $\mathfrak{k} = \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r}\mathfrak{l}$.

Jetzt setzen wir voraus, daß $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist. Ist $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, so gilt $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$.

Es sei dann $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$; es ist entweder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$.

Der Fall $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ ist wieder unmöglich, da aus $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ wieder $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$ und daraus der Widerspruch $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{l}\mathfrak{r}$ folgt.

Der Fall $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gibt zwei Möglichkeiten: $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$. Ist $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$, so ist $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) \subseteqq \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$.

Wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gilt, bekommen wir wieder — wie oben — $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$, was der Voraussetzung $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \neq \mathfrak{k}$ widerspricht.

Zuletzt bestehe die Voraussetzung, daß $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ eine $\mathfrak{k}$-Halbgruppe ist. Wenn $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ ist, so ist wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ auch $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ gültig, woraus auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{k}$ folgt.

[3]) Da $\mathfrak{k} \subseteqq \mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ gilt, können wir nach Lemma 3 statt $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \subseteqq \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteqq \mathfrak{k}$ u.s.w. $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{k}$; $\mathfrak{l}\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{k}$ u.s.w. schreiben.

Es sei dann $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r} \neq \mathfrak{f}$ und $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r})(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}) = \mathfrak{f}$. Man sieht, daß jetzt wegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ auch $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$ gilt. Ist außerdem $\mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$, so ist auch $\mathfrak{l}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{l}\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{f}$ gültig. Wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{l} = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{l} \neq \mathfrak{f}$ ist, läßt sich der Beweis wie oben beenden[4]).

Satz 4. *Ein relativ minimales Quasiideal $\mathfrak{a}$ einer Halbgruppe H m. e. S.-K. $\mathfrak{f}$ ist entweder eine $\mathfrak{f}$-Halbgruppe, oder eine Gruppe mit $\mathfrak{f}$, die in der Form $(\mathfrak{f}, \varepsilon H \varepsilon)$ darstellbar ist, wo mit ε das (linksseitige) Einselement der Gruppe mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet wird.*

Beweis. Wenn für jedes Elementepaar α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$

$$H\beta \cap \alpha H = \mathfrak{f} \tag{12}$$

gilt, so ist wegen $\alpha\beta \in H\beta \cap \alpha H$ jedes Produkt $\alpha\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ in $\mathfrak{f}$ enthalten. Da offenbar auch jedes Produkt $\varrho\sigma$ $(\varrho, \sigma \in \mathfrak{a};\ \varrho$ oder $\sigma \in \mathfrak{f})$ ein Element von $\mathfrak{f}$ ist, so bildet jetzt $\mathfrak{a}$ eine $\mathfrak{f}$-Halbgruppe.

Wenn dagegen ein Elementepaar α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ existiert, wofür (12) nicht erfüllt ist, so besteht wegen der Definition von $\mathfrak{a}$

$$(\mathfrak{f}, H\beta) \cap (\mathfrak{f}, \alpha H) = \mathfrak{a} \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f}). \tag{13}$$

Nach (13) kann ~~man~~ jedes Element ξ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ in der Form

$$\xi = \varrho\beta = \alpha\sigma \qquad (\alpha, \beta, \xi \in \mathfrak{a} - \mathfrak{f};\ \varrho, \sigma \in H) \tag{14}$$

schreiben. Insbesondere bestehen für die Elemente α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{f})$ die Gleichungen

$$\alpha = \gamma_1 \beta = \alpha \gamma_2 \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in H), \tag{15}$$

$$\beta = \lambda_1 \beta = \alpha \lambda_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in H), \tag{16}$$

aus denen wegen $\beta\alpha = \lambda_1 \beta\alpha = \beta\alpha\gamma_2$

$$\beta\alpha \in H\beta\alpha \cap \beta\alpha H \tag{17}$$

folgt.

Ist $\beta\alpha \in \mathfrak{f}$, so sieht man aus (14), daß das Produkt zweier beliebiger Elemente von $\mathfrak{a} - \mathfrak{f}$ ein Element von $\mathfrak{f}$ ist. Da die Produkte $\varrho\sigma$ $(\varrho, \sigma \in \mathfrak{a};\ \varrho$ oder $\sigma \in \mathfrak{f})$ auch in $\mathfrak{f}$ enthalten sind, bildet $\mathfrak{a}$ wieder eine $\mathfrak{f}$-Halbgruppe.

Im restlichen Fall ist $\beta\alpha \notin \mathfrak{f}$. Dann gilt wegen (17) und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$

$$(\mathfrak{f}, H\beta\alpha) \cap (\mathfrak{f}, \beta\alpha H) = \mathfrak{a}. \tag{18}$$

---

[4]) Aus dem Beweis sieht man, daß Satz 3 das folgende ringtheoretische Analogon hat: Sind $\mathfrak{l}$ bzw. $\mathfrak{r}$ ein minimales Linksideal bzw. ein minimales Rechtsideal eines Ringes R, so sind die Unterringe $\mathfrak{r}\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{r}$ entweder lauter Zero-Ringe, oder ist keiner von ihnen ein Zero-Ring.

Aus (18) folgt, daß α, β $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ auch in der Form

(19) $$\alpha = \eta_1 \beta \alpha = \beta \alpha \eta_2, \quad \beta = \nu_1 \beta \alpha = \beta \alpha \nu_2 \qquad (\eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2 \in H)$$

darstellbar sind.

Betrachten wir jetzt das Element $\eta_1 \beta \alpha \nu_2$. Dieses kann man nach (19) auch in der Form

(20) $$\eta_1 \beta \alpha \nu_2 = \alpha \nu_2 = \eta_1 \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k};\ \eta_1, \nu_2 \in H)$$

schreiben. Aus (19_2) und $\beta \notin \mathfrak{k}$ folgt, daß $\alpha \nu_2 \notin \mathfrak{k}$. Wegen (20) und (13) ist $\alpha \nu_2$ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Ferner besteht wieder wegen (20) auch $\alpha \nu_2 \cdot \alpha \nu_2 = \eta_1 \beta \cdot \alpha \nu_2 = \alpha \nu_2$. Folglich ist $\alpha \nu_2 (\notin \mathfrak{k})$ ein idempotentes Element von $\mathfrak{a}$. Bezeichnen wir es der Einfachheit halber mit ε $(= \alpha \nu_2)$. Aus $\varepsilon \in H\varepsilon \cap \varepsilon H$ $(\varepsilon \notin \mathfrak{k})$ und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$ folgt

(21) $$(\mathfrak{k}, H\varepsilon) \cap (\mathfrak{k}, \varepsilon H) = \mathfrak{a} \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k}).$$

Da wir nach Lemma 4 $(\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon)$ statt der linken Seite von (21) schreiben können, ist auch

(22) $$\mathfrak{a} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon) \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$$

richtig. Wir zeigen, daß $\mathfrak{a}$ eine Gruppe mit $\mathfrak{k}$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{a} = (\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon)$ eine Halbgruppe mit $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$, weshalb wir nur die übrigen Bedingungen der Definition 2′ für $\mathfrak{a}$ zu beweisen haben. Nach (22) ist ε ein Einselement von $\mathfrak{a} - \mathfrak{k}$. Wir brauchen noch einzusehen, daß es zu jedem Element $\varepsilon \varrho \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ ein Element $\varepsilon \sigma \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ mit $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon$ gibt. Da einerseits das Element $\varepsilon \varrho \varepsilon$ $(\in \mathfrak{a} - \mathfrak{k})$ in $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon$ enthalten ist, ist $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon \neq \mathfrak{k}$. Andererseits gilt $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon \subseteqq \varepsilon H \varepsilon$, also muß wegen Lemmas 2, 5 und der relativen Minimalität von $\mathfrak{a}$

(23) $$(\mathfrak{k}, \varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon) = \mathfrak{a}$$

erfüllt sein. Wegen ε $(\in \mathfrak{a}, \notin \mathfrak{k})$ und (23) ist ε ein Element von $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon$, woraus die Existenz eines Elementes $\varepsilon \sigma \varepsilon$ $(\in \varepsilon H \varepsilon \subseteqq \mathfrak{a})$ mit $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon$ folgt. $\varepsilon \sigma \varepsilon$ ist kein Element von $\mathfrak{k}$. $\mathfrak{k}$ ist nämlich ein Ideal von H und aus $\varepsilon \sigma \varepsilon \in \mathfrak{k}$ würde $\varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \varepsilon \varrho \varepsilon = \varepsilon \in \mathfrak{k}$ folgen, was wegen $\varepsilon \notin \mathfrak{k}$ falsch ist. Damit haben wir Satz 4 bewiesen.

Ein Teil vom Satz 4 läßt sich umkehren:

Satz 5. *Wenn ein Quasiideal* $\mathfrak{a}$ *einer Halbgruppe* H *m.e.S.-K.* $\mathfrak{k}$ *eine Gruppe mit* $\mathfrak{k}$ *ist, so ist* $\mathfrak{a}$ *ein relativ minimales Quasiideal von* H.

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{a}$ nicht relativ minimal ist. Dann gibt es ein Quasiideal $\mathfrak{a}'$ mit

(24) $$\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{a}'$ wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \subseteqq H\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'H \subseteqq \mathfrak{a}'$ ein Quasiideal von H ist, widerspricht (24) dem Lemma 1, was den Beweis beendet.

Lemma 2 wird durch den folgenden Satz verschärft:

Satz 6. (Vgl. SCHWARZ [2] Satz 6. 2.) *Ist* $\mathfrak{l}$ *(bzw.* $\mathfrak{r}$*) ein relativ minimales Linksideal (bzw. Rechtsideal) und* $\varepsilon \in \mathfrak{l}-\mathfrak{f}$ *(bzw.* $\varepsilon \in \mathfrak{r}-\mathfrak{f}$*) ein idempotentes Element der Halbgruppe H m. e. S.-K.* $\mathfrak{f}$, *so ist* $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ *(bzw.* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{r}\varepsilon)$*) eine Gruppe mit* $\mathfrak{f}$, *und zugleich ein relativ minimales Quasiideal von H.*

Beweis. Es genügt unsere Behauptung bezüglich $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ nachzuweisen. Da $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ nach Lemmas 2 und 5 ein Quasiideal von H ist, haben wir wegen Satz 5 einzusehen, daß $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ eine Gruppe mit $\mathfrak{f}$ ist. Da $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ eine Halbgruppe mit $\mathfrak{f} \subset (\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})$ ist, genügt es die Erfülltheit der übrigen Bedingungen der Definition 2' zu beweisen. Offenbar ist ε $(\in \mathfrak{l}-\mathfrak{f})$ ein linksseitiges Einselement von $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})-\mathfrak{f}$. Es sei $\varepsilon\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{l})$ ein beliebiges Element von $(\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})-\mathfrak{f}$. Wegen $\varepsilon, \lambda \in \mathfrak{l}$ und $\varepsilon^2 = \varepsilon$ gilt $\mathfrak{f} \subset (\mathfrak{f}, \mathfrak{l}\cdot\varepsilon\lambda) \subseteq \mathfrak{l}$, woraus wegen der relativen Minimalität des Linksideals $\mathfrak{l}$

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}\cdot\varepsilon\lambda) = \mathfrak{l}$$

folgt. Hiernach gilt

$$\varepsilon(\mathfrak{f}, \mathfrak{l}\cdot\varepsilon\lambda) = (\varepsilon\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l}\cdot\varepsilon\lambda) = \varepsilon\mathfrak{l}. \tag{25}$$

Da das Element ε $(\in \varepsilon\mathfrak{l})$ in $\varepsilon\mathfrak{f}$ $(\subseteq \mathfrak{f})$ nicht enthalten ist, so muß ε nach (25) ein Element von $\varepsilon\mathfrak{l}\cdot\varepsilon\lambda$ sein. Daraus sieht man, daß es für jedes Element $\varepsilon\lambda$ $(\in (\mathfrak{f}, \varepsilon\mathfrak{l})-\mathfrak{f})$ mindestens ein Element $\varepsilon\lambda'(\in \varepsilon\mathfrak{l})$ mit $\varepsilon\lambda'\cdot\varepsilon\lambda = \varepsilon$ gibt. $\mathfrak{f}$ enthält das Element $\varepsilon\lambda'(\in \varepsilon\mathfrak{l})$ nicht. Aus $\varepsilon\lambda' \in \mathfrak{f}$ würde nämlich $\varepsilon\lambda'\cdot\varepsilon\lambda = \varepsilon \in \mathfrak{f}$ folgen, was unserer Voraussetzung $\varepsilon \in \mathfrak{l}-\mathfrak{f}$ widerspricht. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Literatur.

[1] A. H. CLIFFORD, Semigroups containing minimal ideals, *Amer. Journal Math.*, **70** (1948), 521—526.

[2] ŠT. SCHWARZ, On semigroups having a kernel, *Czechoslovak Math. Journal*, **1** (76) (1951), 229—264.

[3] O. STEINFELD, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publicationes Math. Debrecen*, **4** (1956), 262—275.

(Eingegangen am 23. September 1957.)

Some remarks on set theory. VI.

By P. ERDŐS in Budapest and G. FODOR in Szeged.

Let E be a given non countable set of power $\mathfrak{m}$ and suppose that there exists a relation R between the elements of E. For any $x \in E$, let $R(x)$ denote the set of the elements $y \in E$ for which xRy holds. Two distinct elements of E, x and y, are called *independent*, if $x \notin R(y)$ and $y \notin R(x)$. A subset F of E is called *free* if F has only one element or if F has more elements and any two of them being independent. Let $\mathbf{B}$ be a system of subsets of E; then a non empty system $\mathbf{I} \subset \mathbf{B}$ is called a $\mathfrak{p}$-additive ideal, $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}$, if the sum of any system of power smaller than $\mathfrak{p}$, of elements of $\mathbf{I}$, is again a set of $\mathbf{I}$, and if $X \in \mathbf{I}$, $Y \in \mathbf{B}$, $Y \subset X$ imply $Y \in \mathbf{I}$.

We assume that $\{x\} \in \mathbf{B}$ and $\{x\} \in \mathbf{I}$ for every $x \in E$, and one of the following conditions holds for the sets $R(x)$:

(A) There is a cardinal number $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ such that, for every $x \in E$, $\overline{\overline{R(x)}} < \mathfrak{n}$,

(B) E is a metric space and $d(x, R(x)) > 0$, where $d(x, R(x))$ denotes the distance of the point x from the set $R(x)$.

We deal in this paper first with the following question:

(i) *If* $\mathbf{A}$ *is a system of sets of* $\mathbf{B} - \mathbf{I}$, *does there exist a free subset* E' *of* E *such that for every* $X \in \mathbf{A}$, $X \cap E' \in \mathbf{B} - \mathbf{I}$?

This question has been studied previously in the following special cases:

a) $\mathfrak{m}$ is regular, condition (A) holds, $\mathbf{B}$ is the set of all subsets of E, $\mathbf{I}$ is the set of all subsets of E, of power less than $\mathfrak{m}$, and $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = 1$ (then $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$). (See [1].)

b) $E = [0,1]$, with the ordinary metric, condition (B) holds, $\mathbf{B}$ is the set of all subsets of E, $\mathbf{I}$ is the set of all subsets of measure zero in the Lebesgue sense, and $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = 1$.

(The answer to this question is affirmative, see [2].)

c) The same hypotheses as in b), with the only difference that $\mathbf{B}$ is the set of all subsets of $[0,1]$ measurable in the Lebesgue sense.

(The answer to this question is generally in the negative. The answer is affirmative if $g(x)=d(x, R(x))$ is a measurable function in the Lebesgue sense, see [3], [4].)

d) $E=[0,1]$ with the ordinary metric d, $\mathbf{B}$ is a Boolean σ-algebra of subsets of $[0,1]$ containing all subintervals of $[0,1]$, and $\mathbf{I}$ is the set of the sets X of $\mathbf{B}$ such that $\mu(X)=0$, where μ is a measure on $\mathbf{B}$.[1])

(If μ is not identically zero and if there exists a function f measurable with respect to $\mathbf{B}$ and such that $0<f(x)\leqq g(x)=d(x, R(x))$ for all $x\in[0,1]$, then there exists a free set F in $\mathbf{B}$ such that $\mu(F)>0$ (i. e. $F\notin\mathbf{I}$). This theorem is due to P. HALMOS.[2]))

In section I first we prove making use of a method of ULAM [6] the following theorem (Theorem 1): If E is a set of power $\aleph_\gamma$ with $\aleph_\gamma$ greater than $\aleph_0$ and less than the first aleph inaccessible in the weak sense, $\mathbf{I}$ is a proper $\aleph_{\lambda+1}$-additive ideal of subsets of E such that $\{x\}\in\mathbf{I}$ for every $x\in E$, and $F\notin\mathbf{I}$, then F may be decomposed into the sum of a sequence of the type $\omega_{\lambda+1}$, of mutually disjoint subsets F_ξ of E, such that $F_\xi\notin\mathbf{I}$.

We use this theorem in the proof of theorem 3.

In sections I and II a number of results is given with respect to question (i). For instance we shall prove that the answer to the problem is affirmative in the following cases:

1) If $\mathfrak{m}>\aleph_0$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, $\mathbf{B}$ is the set of all subsets of E, $\mathbf{I}$ is a $\aleph_{\gamma+1}$ additive ideal ($\aleph_{\gamma+1}\leqq\mathfrak{m}$), $\bar{\bar{\mathbf{A}}}=\aleph_0$, and $\overline{\overline{R(x)}}<\aleph_0$ for every $x\in E$.

2) If E is a metric space which contains a dense subset, the power of which is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, $\mathbf{B}$ is the set of all Borel sets of E, $\mathbf{I}$ is the σ-ideal of all sets of μ-measure zero of $\mathbf{B}$, where μ is a measure on $\mathbf{B}$, $\bar{\bar{\mathbf{A}}}=1$, the condition (B) is satisfied, and also the following condition (C) holds:

(C) there is a real number $i>0$ such that the set $\{x: g(x)\geqq i\}$ contains in $\mathbf{B}$ a subset of positive measure, where $g(x)=d(x, R(x))$.

If, for every $x\in E$, the set $R(x)$ is the complement of a sphere of E whose center is at x, then the condition (C) is not only sufficient, but also necessary for the existence of a free subset of E in $\mathbf{B}$.

Finally, in the section III, we deal with the following question:

(ii) *Let* $\mathbf{K}$ *be a class of subsets of* E. *When does there exist a relation*

---

[1]) We use the terminology of P. R. HALMOS [11].

[2]) See his review of the paper [3] in *Math. Reviews*, 12 (1951), p. 398.

R for which the condition (A) *holds and there is no free subset $X \in \mathbf{K}$ with respect to R?*

For instance we shall prove that if $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \mathfrak{m}$ and every element of $\mathbf{K}$ is of power $\mathfrak{m}$, then there exists a relation R, with $\overline{\overline{R(x)}} \leqq 1$ for every $x \in E$, for which there is no free set in $\mathbf{K}$.

This result shows that the answer to the problem (i) is always negative if $\overline{\overline{\mathbf{B}-\mathbf{I}}} = \mathfrak{m}$ and every element of $\mathbf{B}-\mathbf{I}$ is of power $\mathfrak{m}$.

Notation and definitions. Throughout this paper, the symbols $\overline{\overline{F}}$ and $\bar{\beta}$ denote the cardinal number of the set F and of the ordinal number β, respectively. For any $x \in E$, let $R^{-1}(x) = \{y : x \in R(y)\}$. For any subset F of E let

$$R[F] = \bigcup_{x \in F} R(x) \qquad \text{and} \qquad R^{-1}[F] = \bigcup_{x \in F} R^{-1}(x).$$

For any cardinal number $\mathfrak{r}$ we denote by $\varphi_{\mathfrak{r}}$ the initial number of $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^*$ the smallest cardinal number for which $\mathfrak{r}$ is the sum of $\mathfrak{r}^*$ cardinal numbers each of which is smaller than $\mathfrak{r}$, by $\mathfrak{r}^+$ the cardinal number immediately following $\mathfrak{r}$. We say that $\mathfrak{r}$ is regular if $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$ and singular if $\mathfrak{r}^* < \mathfrak{r}$. $\mathfrak{r} = \aleph_\gamma > \aleph_0$ is called inaccessible in the weak sense, if γ is a limit number and $\mathfrak{r}$ is regular.

I.

We assume in this section that the sets $R(x)$ satisfy condition (A) and $\mathbf{B}$ is the set of all subsets of E. We shall use the following

Lemma. *Let T be a set of power $\aleph_{\alpha+1}$ (where α is a given ordinal number $\geqq 0$). There exists a system $\{A_\eta^\xi\}_{\eta < \omega_{\alpha+1}}^{\xi < \omega_\alpha}$ of subsets of T such that*

1) $T = \bigcup_{\eta < \omega_{\alpha+1}} A_\eta^\xi$ *for every* $\xi < \omega_\alpha$,

2) $A_\eta^\xi \cap A_\zeta^\xi = 0$ *for* $\xi < \omega_\alpha$ *and* $\eta < \zeta < \omega_{\alpha+1}$,

3) *the power of the set* $T - \bigcup_{\xi < \omega_\alpha} A_\eta^\xi$ *is* $\leqq \aleph_\alpha$ *for every* $\eta < \omega_{\alpha+1}$. (See S. ULAM [6] p. 143.)

We prove now the following

Theorem 1. *Let E be a set of power $\aleph_\gamma$ with $\aleph_\gamma$ greater than $\aleph_0$ and less than the first aleph inaccessible in the weak sense, and let $\mathbf{I}$ be a proper $\aleph_{\lambda+1}$-additive ideal of subsets of E such that $\{x\} \in \mathbf{I}$ for every $x \in E$. If $B \subseteq E$ and $B \notin \mathbf{I}$, then there exists a sequence $\{B_\xi\}_{\xi < \omega_{\lambda+1}}$ of type $\omega_{\lambda+1}$, of subsets of E, such that*

(i) $B_\xi \notin \mathbf{I}$ *for every* $\xi < \omega_{\lambda+1}$,

(ii) $B_\xi \cap B_\zeta = 0$ *for* $\xi < \zeta < \omega_{\lambda+1}$,

(iii) $B = \bigcup_{\xi < \omega_{\lambda+1}} B_\xi$.

Proof[3]). We use transfinite induction. First we prove that our theorem is true for $\gamma=\lambda+1$. Let $\overline{\overline{E}}=\aleph_{\lambda+1}$ and $B\notin\mathbf{I}$. It is obvious that $\overline{\overline{B}}=\aleph_{\lambda+1}$. By the lemma ($\alpha=\lambda$ and $T=B$) there is a system $\{A_\eta^\xi\}_{\eta<\omega_{\lambda+1}}^{\xi<\omega_\lambda}$ of subsets of B for which 1), 2) and 3) hold. Since $B\notin\mathbf{I}$ and, by 3) $B-\bigcup_{\xi<\omega_\lambda}A_\eta^\xi\in\mathbf{I}$ for every $\eta<\omega_{\lambda+1}$, there exists for every $\eta<\omega_{\lambda+1}$ an ordinal number $\xi(\eta)<\omega_\lambda$ such that $A_\eta^{\xi(\eta)}\notin\mathbf{I}$. It follows that there is an ordinal number $\xi_0<\omega_\lambda$ and a sequence $\{\eta_\nu\}_{\nu<\omega_{\lambda+1}}$ of type $\omega_{\lambda+1}$, of the ordinal numbers $\varrho<\omega_{\lambda+1}$, such that $\xi(\eta_\nu)=\xi_0$ and $A_{\eta_\nu}^{\xi_0}\notin\mathbf{I}$ for every $\nu<\omega_{\lambda+1}$. Let $A=\{\eta:\eta<\omega_{\lambda+1}$ and $\eta\neq\eta_\nu$ if $\nu<\omega_{\lambda+1}\}$ and

$$B_\nu=\begin{cases}A_{\eta_0}^{\xi_0}\cup\left(\bigcup_{\eta\in A}A_\eta^{\xi_0}\right) & \text{for } \nu=0,\\ A_{\eta_\nu}^{\xi_0} & \text{for } 0<\nu<\omega_{\lambda+1}.\end{cases}$$

Obviously the set $\{B_\nu\}_{\nu<\omega_{\lambda+1}}$ satisfies the conditions (i), (ii) and (iii).

Let now β be a given ordinal number, $\beta>\lambda+1$, such that $\aleph_\beta$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, and suppose that the theorem is true for every $\alpha<\beta$. Let $\overline{\overline{E}}=\aleph_\beta$ and $B\notin\mathbf{I}$ $(B\subseteq E)$.

If $\overline{\overline{B}}<\aleph_\beta$, then the theorem is true by the induction hypothesis. (Let $I_1\in\mathbf{I}_1$ if and only if $I_1=B\cap I$, where $I\in\mathbf{I}$. Obviously $\mathbf{I}_1$ is an $\aleph_{\lambda+1}$-additive ideal in B.)

If $\overline{\overline{B}}=\aleph_\beta$, then there are two possibilities:

a) β is an ordinal number of the first kind, i. e. $\beta=\alpha+1$,

b) β is an ordinal number of the second kind.

Case a). By the lemma ($\beta=\alpha+1$ and $T=B$) there is a system $\{A_\eta^\xi\}_{\eta<\omega_{\alpha+1}}^{\xi<\omega_\alpha}$ of subsets of B for which 1), 2) and 3) hold.

We have two subcases:

a$_1$) if $B=\bigcup_{\zeta<\omega_\alpha}C_\zeta$ is an arbitrary decomposition of B into the sum of $\aleph_\alpha$ subsets, then there is an ordinal number $\zeta_0<\omega_\alpha$ such that $C_{\zeta_0}\notin\mathbf{I}$,

a$_2$) B has a decomposition $B=\bigcup_{\zeta<\omega_\alpha}C_\zeta$ into the sum of $\aleph_\alpha$ subsets such that, for every $\zeta<\omega_\alpha$, $C_\zeta\in\mathbf{I}$.

Subcase a$_1$). For every $\eta<\omega_{\alpha+1}$ there is an ordinal number $\xi(\eta)<\omega_\alpha$ such that $A_\eta^{\xi(\eta)}\notin\mathbf{I}$. It follows that there is an ordinal number $\xi_0<\omega_\alpha$ and a sequence $\{\eta_\nu\}_{\nu<\omega_{\alpha+1}}$ of type $\omega_{\alpha+1}$, of ordinal numbers $\varrho<\omega_{\alpha+1}$, such that $\xi(\eta_\nu)=\xi_0$ and $A_{\eta_\nu}^{\xi_0}\notin\mathbf{I}$ for every $\nu<\omega_{\alpha+1}$. Let $A=\{\eta:\eta<\omega_{\alpha+1}$ and $\eta\neq\eta_\nu$

[3]) We make use of a method of Ulam [6].

if $\nu < \omega_{\lambda+1}\}$, and

$$B_\nu = \begin{cases} A^{\xi_0}_{\eta_0} \cup \left(\bigcup_{\eta \in A} A^{\xi_0}_\eta \right) & \text{for } \nu = 0, \\ A^{\xi_0}_{\eta_\nu} & \text{for } 0 < \nu < \omega_{\lambda+1}. \end{cases}$$

Subcase a$_2$). Let $B = \bigcup_{\zeta < \omega_\alpha} C_\zeta$ be a decomposition of B into the sum of $\aleph_\alpha$ subsets such that $C_{\zeta_1} \cap C_{\zeta_2} = 0$ for $\zeta_1 < \zeta_2 < \omega_\alpha$ and $C_\zeta \in \mathbf{I}$ for every $\zeta < \omega_\alpha$. Consider the set $D = \{C_\zeta\}_{\zeta < \omega_\alpha}$. We define an $\aleph_{\lambda+1}$-additive ideal $\mathbf{I}'$ in D as follows: Let $F \in \mathbf{I}'$ if and only if $F \subset D$ and $\bigcup_{C \in F} C \in \mathbf{I}$. Since $\overline{\overline{D}} = \aleph_\alpha < \aleph_\beta$ and $D \notin \mathbf{I}'$, there is, by the induction hypothesis, a decomposition

$$D = \bigcup_{\eta < \omega_{\lambda+1}} F_\eta$$

of D into the sum of $\aleph_{\lambda+1}$ subsets such that $F_{\eta_1} \cap F_{\eta_2} = 0$ if $\eta_1 \neq \eta_2$ and $F_\eta \notin \mathbf{I}'$ for every $\eta < \omega_{\lambda+1}$. Let

$$B_\eta = \bigcup_{C \in F_\eta} C.$$

Obviously $B_{\eta_1} \cap B_{\eta_2} = 0$ if $\eta_1 \neq \eta_2$, $B_\eta \notin \mathbf{I}$ for every $\eta < \omega_{\lambda+1}$, and

$$B = \bigcup_{\eta < \omega_{\lambda+1}} B_\eta.$$

Case b). Since $\aleph_\beta$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, B has a decomposition $B = \bigcup_{\xi < \omega_\eta} C_\xi$ into the sum of $\aleph_\eta < \aleph_\beta$ subsets such that $\aleph_\lambda < \overline{\overline{C_\xi}} < \aleph_\beta$ and $C_{\xi_1} \cap C_{\xi_2} = 0$ if $\xi_1 \neq \xi_2$.

If there is an ordinal number $\xi_0 < \omega_\eta$ for which $C_{\xi_0} \notin \mathbf{I}$, then there is, by the induction hypothesis, a decomposition

$$C_{\xi_0} = \bigcup_{\zeta < \omega_{\lambda+1}} D_\zeta$$

of C_{ξ_0} such that $D_{\zeta_1} \cap D_{\zeta_2} = 0$ for $\zeta_1 \neq \zeta_2$ and $D_\zeta \notin \mathbf{I}$ for every $\zeta < \omega_{\lambda+1}$. Let

$$B_\zeta = \begin{cases} D_0 \cup \left(\bigcup_{\substack{\xi < \omega_\eta \\ \xi \neq \xi_0}} C_\xi \right) & \text{for } \zeta = 0, \\ D_\zeta & \text{for } 0 < \zeta < \omega_{\lambda+1}. \end{cases}$$

Obviously the set $\{B_\zeta\}_{\zeta < \omega_{\lambda+1}}$ satisfies the conditions (i), (ii), and (iii).

The proof of the case, when $C_\xi \in \mathbf{I}$ for every $\xi < \omega_\eta$, is similar to that of case a$_2$). Theorem 1 is proved.

Corollary 1. *If $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{m} > \aleph_0$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, then every finite measure μ,*[4] *defined for all subsets of E and vanishing for all one-point sets, vanishes identically.* (See S. ULAM [6].)

[4]) We call a measure every extended real valued, non negative, countably additive set function $\mu(X)$ defined in a ring of subsets of E. A ring of sets is a non empty class $\mathbf{R}$ of sets such that if $E \in \mathbf{R}$ and $F \in \mathbf{R}$, then $E \cup F \in \mathbf{R}$ and $E - F \in \mathbf{R}$.

P r o o f. The set of all subsets F of E for which $\mu(F)=0$ is an $\aleph_1$-additive ideal **I** containing all one-point subsets of E. If μ is not identically zero, then there exists a subset F of E such that $\mu(F)\neq 0$; i. e. **I** is a proper ideal. By Theorem 1 there exists a sequence $\{F_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ of type ω_1, of subsets of E, satisfying the conditions (i), (ii), (iii). Let H_n be the set of the ordinal numbers $\xi<\omega_1$ for which $\mu(F_\xi)>\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$. It follows that there is a natural number n_0 such that $\overline{\overline{H}}_{n_0}=\aleph_0$. Let $\{i_n\}_{n<\omega}$ be an enumeration of H_{n_0}. By the σ-additivity of μ we have

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{i_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_{i_n})\geqq\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}+\cdots+\frac{1}{n_0}+\cdots=\infty,$$

which is impossible since μ is finite.

C o r o l l a r y 2. *If $2^{\aleph_0}$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, then for every subset F of the second category of the set of real numbers E there is a sequence $\{F_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ of type ω_1, of mutually disjoint subsets of E of the second category, such that*

$$F=\bigcup_{\xi<\omega_1}F_\xi.$$

P r o o f. The set **I** of all subsets of the first category of E is a σ-ideal (i. e. an $\aleph_1$-additive ideal). (See W. SIERPIŃSKI [8] p. 176.)

C o r o l l a r y 3. *If $2^{\aleph_0}$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense and $\mu^*(F)$ is an outer measure*[5]) *not identically zero on the set of all subsets of the set E of real numbers such that $\mu^*(\{x\})=0$ for every $x\in E$, then for every subset F of E for which $\mu^*(F)\neq 0$, there is a sequence $\{F_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ of the type ω_1, of mutually disjoint subsets F_ξ of E such that $\mu^*(F_\xi)\neq 0$ and*

$$F=\bigcup_{\xi<\omega_1}F_\xi.$$

P r o o f. The set **I** of all subsets F of E for which $\mu^*(F)=0$ is a σ-ideal. (See W. SIERPIŃSKI [8] p. 109, Proposition C_{54}.)

T h e o r e m 2. *Let $\overline{\overline{E}}=\aleph_\gamma>\aleph_0$ and suppose that there exists a relation R between the elements of E, such that for any $x\in E$, the power of the set $R(x)=\{y: xRy\}$ is smaller than $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$. Let furthermore **I** be an $\mathfrak{n}^+$-additive proper ideal of E, such that $\{x\}\in$ **I** for any $x\in E$. Then there exists a free subset E' of E, such that $E'\notin$ **I**,*

---

[5]) An outer measure is an extended real valued, non negative, monotone and countably subadditive set function η^* on the class of all subsets of E, such that $\eta^*(0)=0$.

Proof. By Theorem 1 of [5] E may be decomposed into the sum of $\mathfrak{n}$ or fewer free subsets E_ξ $(\xi < \varphi_\mathfrak{n})$:

$$E = \bigcup_{\xi < \varphi_\mathfrak{n}} E_\xi .$$

Since $\mathbf{I}$ is an $\mathfrak{n}^+$-additive proper ideal it follows the statement of Theorem 2.

Theorem 3. *Let E be a set of power $\aleph_\gamma$ with $\aleph_\gamma$ greater than $\aleph_0$ and less than the first aleph inaccessible in the weak sense, and let R be a relation between the elements of E such that for any $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is smaller than $\aleph_0$. Let furthermore $\mathbf{I}$ be an $\aleph_{\lambda+1}$-additive proper ideal of subsets of E, such that $\{x\} \in \mathbf{I}$ for any $x \in E$. If $\{E_\xi\}_{\xi<\omega}$ is a sequence of type ω, of subsets of E, such that $E_\xi \notin \mathbf{I}$ for $\xi < \omega$, then there exists a free subset E' of E for which $E' \cap E_\xi \notin \mathbf{I}$ for every $\xi < \omega$.*

Proof. First we define by finite induction a sequence $\{F_\xi\}_{\xi<\eta}$ of subsets of E such that $F_\xi \notin \mathbf{I}$ for $\xi < \eta$, $F_{\xi_1} \cap F_{\xi_2} = 0$ if $\xi_1 \neq \xi_2$, and for every $\xi < \omega$ there is a $\nu(\xi) < \eta$ such that $F_{\nu(\xi)} \subset E_\xi$. Let $E_0 = \bigcup_{\nu<\omega_1} E_{0\nu}$ be a decomposition of E_0 satisfying Theorem 1. Since $E_{0\nu} \cap E_{0\mu} = 0$ for $\nu \neq \mu$, for every $\xi < \omega$ there is at most one $\nu = \nu(\xi) < \omega_1$ such that $E_\xi - E_{0\nu(\xi)} \in \mathbf{I}$. It follows that there is an ordinal number $\nu' < \omega_1$ for which $E_\xi - E_{0\nu'} \notin \mathbf{I}$, for every $\xi < \omega$. Put $F_0 = E_{0\nu'}$. Let $\beta < \omega$ be a given ordinal number $\beta > 0$, and suppose that all sets F_ξ, where $0 \leqq \xi < \beta$, have been already defined such that $F_\xi \notin \mathbf{I}$ for $\xi < \beta$ and $F_{\xi_1} \cap F_{\xi_2} = 0$. Put $E_\xi - \bigcup_{\zeta<\xi} F_\zeta = N_\xi$ $(\xi \geqq \beta)$. Let $U = \{\xi : \beta \leqq \xi < \omega$ and $N_\xi \notin \mathbf{I}\}$. If $U = 0$, then we do not define F_β. In this case we put $\mu = \beta$. If $\overline{\overline{U}} = 1$, i.e. $U = \{k\}$, then let $F_\beta = N_k$ and $\eta = \beta + 1$. If $\overline{\overline{U}} > 1$, then we denote by ϱ the first element of U. Let $N_\varrho = \bigcup_{\nu<\omega_1} N_{\varrho\nu}$ be a decomposition of N_ϱ satisfying Theorem 1. Since $N_{\varrho\nu} \cap N_{\varrho\gamma} = 0$ for $\nu \neq \mu$, there is a $\nu < \omega_1$ such that $N_\xi - N_{\varrho\nu} \notin \mathbf{I}$ for every $\xi \in U$. Put $F_\beta = N_{\varrho\nu}$.

It follows from Theorem 2 that F_ξ has for every $\xi < \eta$ a free subset G_ξ such that $G_\xi \notin \mathbf{I}$. We shall now prove that there is a sequence $\{H_\xi\}_{\xi<\eta}$ of subsets of E such that $H_\xi \subset G_\xi$, $H_\xi \notin \mathbf{I}$ $(\xi < \eta)$ and $H_\xi \cap (R[H_\zeta] \cup R^{-1}[H_\zeta]) = 0$ for $\xi \neq \zeta$. The set $E' = \bigcup_{\xi<\eta} H_\xi$ obviously satisfies Theorem 2.

We define H_0 as follows. Let $G_0 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} G_{0\alpha}$ be a decomposition of G_0 satisfying Theorem 1. There is an ordinal number $\alpha' < \omega_1$ such that $G_\xi - R^{-1}(G_{0\alpha'}) \notin \mathbf{I}$. In the opposite case there would exist for every α a natural number $\xi = \xi(\alpha)$ such that $G_{\xi(\alpha)} - R^{-1}[G_{0\alpha}] \in \mathbf{I}$. This would imply the existence of a natural number ξ' and a sequence $\{\alpha_k\}_{k<\omega}$ such that $\xi' = \xi(\alpha_k)$

for every $k<\omega$, i. e. $G_{\xi'}-R^{-1}[G_{0\alpha_k}]\in \mathbf{I}$ for every $k<\omega$. Then there would exist an element $z\in G_{\xi'}$, for which $z\in R^{-1}[G_{0\alpha_k}]$, i. e. $R(z)\cap G_{0\alpha_k}\neq 0$ for every $k<\omega$, which is a contradiction, because $\overline{\overline{R(z)}}<\aleph_0$.

Put $G'_\xi=G_\xi-R^{-1}[G_{0\alpha'}]$ ($\xi=1,2,\ldots$). Let $G'_\xi=\bigcup_{\alpha<\omega_1} G'_{\xi\alpha}$ be a decomposition of G'_ξ satisfying Theorem 1. Further let

$$U_\alpha=\bigcup_{0<\xi<\eta} G'_{\xi\alpha}.$$

It is obvious that $U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}=0$ for $\alpha_1\neq\alpha_2$.

There is a natural number ν' for which $G_{0\alpha'}-R^{-1}[U_{\nu'}]\notin\mathbf{I}$. For if $G_{0\alpha'}-R^{-1}[U_\nu]\in\mathbf{I}$ for every $\nu<\omega$, then there would exist an element $z\in G_{0\alpha'}$ such that $z\in R^{-1}[U_\nu]$ ($\nu=0,1,2,\ldots$) i. e. $R(z)\cap U_\nu\neq 0$ ($\nu=0,1,2,\ldots$), which is impossible, because $\overline{\overline{R(z)}}<\aleph_0$. Put $H_0=G_{\alpha'}-R^{-1}[U_{\nu'}]$. It is obvious that

$$N_\xi=G'_{\xi\nu'}-R[H_0]-R^{-1}[H_0]\notin\mathbf{I}\qquad(\xi=1,2,\ldots).$$

We define H_1 starting from N_1 in the same way as H_0 is defined starting from the set G_0. Obviously we can continue this process for every $\nu<\eta$. Thus we obtain the sequence $\{H_\nu\}_{\nu<\eta}$ satisfying our requirement. The theorem is proved.

Corollary 4. *If $2^{\aleph_0}$ is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, E is the set of the real numbers and R is a relation between the elements of E such that for any $x\in E$ the power of the set $R(x)$ is smaller than $\aleph_0$, then there exists a free subset E' of E, which is everywhere of the second category.*

Proof. Let $\mathbf{I}$ be the set of the subsets of E of the first category, and $\{E_\xi\}_{\xi<\omega}$ a sequence of type ω, of all intervals of E with rational endpoints, and apply Theorem 3.

Corollary 5. *Under the same hypotheses as in Corollary 4 there exists a free subset E' of E such that*

$$\mu^*(E'\cap[a,b])\neq 0$$

for every interval $[a, b]$ of E, μ^* denoting Lebesgue outer measure.

Proof. Let $\mathbf{I}$ be the set of all subsets of measure zero of E and $\{E_\xi\}_{\xi<\omega}$ a sequence of type ω, of all intervals of E with rational endpoints, and apply Theorem 3.

II.

We assume in this section that E is a metric space and condition (B) holds.

First we prove the following

Theorem 4. *Let E be the set of all real numbers and R a relation between the elements of E such that, for any $x \in E$, the power of the set $R(x)$ is smaller than $\aleph_0$. Then there exists a free subset E' of E such that E' is everywhere of the second category.*

Proof. Let (a, b) be an arbitrary interval of E and $\mathbf{A}^{(a,b)}$ the set of all subsets of (a, b) the complements of which are of the first category and F_σ. Let further $\{C_\gamma\}_{\gamma<\mathfrak{c}}$ be a wellordering of the set

$$\bigcup_{(a,b)\subseteq E} \mathbf{A}^{(a,b)}$$

of the type $\varphi_\mathfrak{c}$ (where $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$) and I_γ the interval corresponding to the set C_γ.

We consider the set $\mathbf{H}$ of all the series $H = \{a_\xi\}_{\xi<\varphi_\mathfrak{c}}$ of elements with the properties:

a) $a_\xi \in C_\xi$ or $a_\xi = 0$; $\xi < \varphi_\mathfrak{c}$;

b) if $a_\xi \neq 0$, then $a_\nu \neq 0$ for $\nu < \xi$;

c) if $a_\xi \neq 0$ and $a_\nu \neq 0$, then $a_\xi \neq a_\nu$ for $\xi < \nu$;

d) the set of the elements of the series is a free set.

For any $H \in \mathbf{H}$, let $\tilde{H}$ denote the set of the elements of H.

We say that an element $H \in \mathbf{H}$ is maximal with respect to the relation R if ν_0 is the smallest ordinal number $< \varphi_\mathfrak{c}$ such that $a_{\nu_0} = 0$ and there is no element $k \in C_{\nu_0} - R[\tilde{H}]$ such that k and the elements $\neq 0$ of H are independent or if $a_\nu \neq 0$ for every $\nu < \varphi_\mathfrak{c}$ We define the *index* of H in the first case as ν_0 and in the second case as $\varphi_\mathfrak{c}$. Let $\mathbf{H}'$ be the set of the maximal elements of $\mathbf{H}$.

We say that two series H_1 and H_2 are mutually exclusive if $\tilde{H}_1 \cap \tilde{H}_2 = 0$.

Let $\{H_\nu\}_{\nu<\eta}$ be a sequence of type $\eta < \omega_1$, of mutually exclusive elements of $\mathbf{H}'$ with indices $\delta_\nu < \varphi_\mathfrak{c}$. Then by the definition of $\mathbf{H}'$, $\overline{\overline{\tilde{H}_\nu}} < \mathfrak{c}$; consequently $\overline{\overline{R[\tilde{H}_\nu]}} < \mathfrak{c}$ for every $\nu < \eta$. Since $\eta < \omega_1$, by a well-known theorem of J. König we have

$$\overline{\overline{\bigcup_{\nu<\eta}(\tilde{H}_\nu \cup R[\tilde{H}_\nu])}} < \mathfrak{c},$$

i. e.

$$\overline{\overline{C_\gamma - \bigcup_{\nu<\eta}(\tilde{H}_\nu \cup R[\tilde{H}_\nu])}} < \mathfrak{c}$$

for every $\gamma < \varphi_c$. It follows that there is an element H_η of $\mathbf{H}'$ such that $\tilde{H}_\eta \neq 0$ and $\tilde{H}_\eta \cap \tilde{H}_\nu = 0$ for every $\nu < \eta$.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{For every } \delta < \varphi_c \text{ there is only a finite number of mutually exclusive} \\ \text{elements of } \mathbf{H}' \text{ with the same index } \delta. \end{array} \right.$$

Let $\{H_n\}_{n<\omega}$ be a sequence of type ω, of mutually exclusive elements of $\mathbf{H}'$. Suppose that the series H_n $(n=1,2,\ldots)$ have the same index δ. Then the set $C_\gamma - \bigcup_{n<\omega} \tilde{H}_n - \bigcup R[\tilde{H}_n]$ is non empty and for every element z of this set $\overline{\overline{R(z)}} \geqq \aleph_0$ holds, because $R(z) \cap \tilde{H}_n \neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$, which is a contradiction.

Supposing that every element of $\mathbf{H}'$ has an index smaller than φ_c, we can choose by (1) a sequence $\{H_\nu\}_{\nu<\omega_1}$ of mutually exclusive elements of $\mathbf{H}'$ of type ω_1 such that the indices β_ν of the series H_ν are distinct. Corresponding to every interval I_γ we choose in I_γ a subinterval I'_γ with rational endpoints. Since $\overline{\overline{\{\beta_\nu\}_{\nu<\omega_1}}} > \aleph_0$ and $\overline{\overline{\{I'_\gamma\}_{\gamma<\varphi_c}}} \leqq \aleph_0$, there is an I'_{γ_0} and a subsequence $\{\beta_{\nu_k}\}_k < \omega$ of type ω, of $Z = \{\beta_\nu\}_{\nu<\omega_1}$, such that $I'_{\beta_{\nu_k}} = I'_{\gamma_0}$ for every $k < \omega$. Obviously the complement of the set $L_{\gamma_0} = \bigcap_{k<\omega} C_{\beta_{\nu_k}}$ is of the first category with respect to I'_{γ_0}, Consequently the power of L_{γ_0} is $\mathfrak{c}$, thus

$$\overline{\overline{L_{\gamma_0} - \bigcup_{k<\omega} (\tilde{H}_{\nu_k} \cup R[\tilde{H}_{\nu_k}])}} = \mathfrak{c}$$

It follows that there is an element $z \in L_{\gamma_0} - \bigcup_{k<\omega} (\tilde{H}_{\nu_k} \cup R[\tilde{H}_{\nu_k}])$ such that $R(z) \cap \tilde{H}_{\nu_k} \neq 0$ $(k=1,2,\ldots)$ i. e. $\overline{\overline{R(z)}} \geqq \aleph_0$, which is impossible, because $\overline{\overline{R(z)}} < \aleph_0$. Thus there is a free subset E' of E such that $E' \cap C_\gamma \neq 0$ for every $\gamma < \varphi_c$. It is clear that E' is of the second category. The theorem is proved.

Theorem 5. *Let E be the set of all real numbers and R a relation between the elements of E such that for any $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is smaller than $\aleph_0$. Then there exists a free subset E' of E such that the Lebesgue outer measure $\mu^*(E')$ of E' in every interval (a,b) is $b-a$.*

Proof. Let (a,b) be an arbitrary interval of E and $\mathbf{B}^{(a,b)}$ the set of all subsets of (a,b) of positive measure $> \frac{1}{2}(b-a)$ and G_δ. Let further $\{D_\gamma\}_{\gamma<\varphi_c}$ be a wellordering of the set

$$\dot{\bigcup_{(a,b)\subseteq E}} \mathbf{B}^{(a,b)}$$

of type φ_c, and I_γ the interval (a,b) corresponding to D_γ. We can prove completely analogously to the proof of the theorem 4 the existence of a free set E' such that

$$E' \cap D_\gamma \neq 0 \qquad (\gamma < \varphi_c),$$

if we select in every interval $I_\gamma=(a,b)$ an interval $I'_\gamma=(a',b')$ with rational endpoints such that $b'-a'>\frac{3}{4}(b-a)$. Obviously the outer measure of E' in every interval (a,b) is $b-a$.

It is easy to see by the method of the proofs of theorems 4 and 5 that the following theorem is valid too.

Theorem 6. *Let E be the set of all real numbers and R a relation between the elements of E such that for any $x\in E$ the power of the set $R(x)$ is smaller than $\aleph_0$. Then there exists a free subset E' of E such that E' is everywhere of the second category and the Lebesgue outer measure $\mu(E')$ of E in every interval (a,b) is $b-a$.*

Theorem 7. *Let E be an interval of the set of all real numbers and suppose that there exists a relation R between the elements of E. Let further $\mathbf{B}$ be a σ-algebra of subsets of E containing all subintervals of E and μ a not identically zero measure on $\mathbf{B}$. If $g(x)=d(x,R(x))>0$ for every $x\in E$ and if*

(C) *there exists a real number $i>0$ such that the set $\{x\colon g(x)\geqq i\}$ contains in $\mathbf{B}$ a subset of positive μ-measure,*

then there exists in $\mathbf{B}$ a free subset of E of positive μ-measure.

If, for every $x\in E$, the set $R(x)$ is the complement of an interval of E whose center is at x, then the condition (C) *is not only sufficient, but also necessary for the existence of a free subset, of positive μ-measure, of E in $\mathbf{B}$.*

Proof. Let A be a subset of $\{x\colon g(x)\geqq i\}$ satisfying the condition (C). Let

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

be an enumeration of the set of rational numbers in E. For every element $x\in E$ and $\varepsilon>0$ there exists an element x_{n_0} of this sequence such that $d(x,x_{n_0})<\varepsilon$. For every $n=1,2,\ldots$ let $U(x_n,i)$ be the open interval of length i whose center is at x_n. It is obvious that

$$\bigcup_n U(x_n,i)=E.$$

Let $A_n=A\cap U(x_n,i)$ $(n=1,2,\ldots)$. Since $U(x_n,i)\in\mathbf{B}$ and $A\in\mathbf{B}$, $A_n\in\mathbf{B}$. Let $A_n^*=A_n-\bigcup_{j<n}A_j$ $(n=1,2,\ldots)$. Since μ is countably additive and $\mu(A)>0$, there exists an index n' for which $\mu(A_{n'}^*)>0$. It follows that $\mu(A_{n'})>0$. The set $A_{n'}$ is free, because if $x\in A_{n'}$ and $y\in R(x)$, then $d(x,y)>g(x)\geqq i$.

For every $x\in E$, let $U(x)$ be an interval whose center is at x and $R(x)=E-U(x)$. In this case condition (C) is also necessary for the existence of a free subset of positive μ-measure in $\mathbf{B}$, i. e. if there is in $\mathbf{B}$ a free subset A of E such that $\mu(A)>0$, then there exists a positive number i, for which the set $\{x:g(x)\geqq i\}$ contains in $\mathbf{B}$ a set of positive μ-measure. Suppose the contrary. Then $\mathbf{B}$ contains a free subset of positive μ-measure, but for every $i>0$ the set $\{x:g(x)\geqq i\}$ contains in $\mathbf{B}$ only such subsets F for which $\mu(F)=0$. Let α denote the diameter of the set A. Put

$$E_\alpha=\left\{x:\ g(x)\geqq\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

By the hypothesis E_α contains in $\mathbf{B}$ only such subsets F, for which $\mu(F)=0$. Let $F_1=E_\alpha\cap A$ and $F_2=E_\alpha\cap(E-A)$. Since A is free and $R(x)=E-U(x)$ for every $x\in E$, we have $g(x)\geqq\frac{\alpha}{2}$ for every $x\in A$. Thus $F_1=A$. By the definition, $F_1\cup F_2=E_\alpha$, therefore $A=F_1\subset E_\alpha$. Since $A\in\mathbf{B}$, it follows that $\mu(A)=0$, which contradicts to $\mu(A)>0$. The theorem is proved.

Remark 1. *In general the condition* (C) *is not necessary*. Consider the interval $[0,1]$. Let μ^* and μ_* denote the Lebesgue outer and inner measure, respectively. We can define the relation R such that the interval $[0,1]$ contains a free subset of positive Lebesgue measure and

$$\mu_*(\{x:\ g(x)\geqq i\})=0$$

for any $i>0$, where $g(x)=d(x,R(x))$. We shall use the following theorem (see [7]):

The set E of the real numbers has a subset E' with the following properties:

1. for every interval (a,b) of E, $\mu^*(E'\cap(a,b))=b-a$,

2. E can be decomposed into enumerable many sets E_n $(n=1,2,\dots)$ without common points, which are all superposable by shifting the set E'.

It follows that $[0,1]$ can be decomposed into the sum of enumerable many sets S_n $(n=1,2,\dots)$ such that $\mu^*(S_n)=1$ $(n=1,2,\dots)$.

For every $x\in S_n$, let $K(x)$ be the open interval of length $\frac{2}{n}$ whose center is at x. We define R as follows. Let N be the set of rational numbers and

$$R(x)=(E-K(x))\cap N.$$

Obviously

$$g(x)=\frac{1}{n}\quad\text{for}\quad x\in S_n.$$

If $i>1$, then $V_i=\{x:g(x)\geqq i\}=0$. If $i\leqq 1$, then $V_i\subseteq V_{\frac{1}{n+1}}=S_1\cup S_2\cup\dots\cup S_{n+1}$ for some natural numbers $n>0$. We have $\mu_*(V_i)=0$ because $\mu_*(V_{\frac{1}{n+1}})=$ $=\mu^*([0,1]-V_{\frac{1}{n+1}})=0$.

It follows from the definition of R that the set U of the irrational numbers of $[0,1]$ is a free set. U is measurable and $\mu(U)=1$.

Remark 2. *It is easily seen that Theorem 7 remains true for a separable metric space.* The following counter-example shows that for non-separable metric spaces this theorem is generally not true.

Consider the following example of ALEXANDROFF [9]. Let S be the plane with the ordinary (euclidean) metric $d=d(x,y)$. We define now a new distance as follows. Let $\bar{0}$ be a given point of S, x and y two arbitrary points of S and

$$d'(x,y)=\begin{cases} d(x,y) & \text{if } \bar{0} \text{ lies on the line } xy, \\ d(x,\bar{0})+d(y,\bar{0}) & \text{if } \bar{0} \text{ does not lie on the line } xy. \end{cases}$$

Thus we obtain a new metric space S', which is not separable.

Let μ^* be the ordinary Lebesgue outer measure for the subsets of S. We define a relation R between the elements of S' as follows. If $x=\bar{0}$, then let $R(x)=0$. If $x\neq\bar{0}$, then let r be a real number for which $0<r<d(x,\bar{0})$, $E(x)=\{y\colon d'(x,y)<r\}$ and $R(x)=S-E(x)$. It follows from the definition of the distance d' that if $x,y\in S'$ $(x\neq y)$ and $\bar{0}$ does not lie on the line xy, then either $x\in R(y)$ or $y\in R(x)$ i. e. x and y are not independent. Hence each free subset of S' lies on a line containing $\bar{0}$. But for every line L, $\mu^*(L)=0$. Thus for every free subset E', $\mu^*(E')=0$.

For non-separable metric spaces we state the following

Theorem 8. *Let E be a metric space. Suppose that E contains a dense subset, the power of which is less than the first aleph inaccessible in the weak sense. Let μ be a σ-finite measure on the set* $\mathbf{B}$ *of all Borel subsets which is not identically zero. If $g(x)=d(x,R(x))>0$ for every $x\in E$ and if condition* (C) *holds, then there exists in* $\mathbf{B}$ *a free subset of positive μ-measure of E.*

If, for every $x\in E$, the set $R(x)$ is the complement of an sphere of E whose center is at x, then the condition (C) *is not only sufficient, but also necessary for the existence of a free subset of positive μ-measure of E in* $\mathbf{B}$.

Proof. If μ is a σ-finite measure on the set of all Borel subsets of E and E contains a dense subset, the power of which is less than the first aleph inaccessible in the weak sense, then there exists a decomposition

$$E=N\cup M$$

of E into two mutually disjoint sets such that $\mu(N)=0$ and M is separable (where N is the sum of all open subsets of μ-measure zero of E) (see [10]). It is clear that μ is not identically zero on M, since $\mu(N)=0$ and

$$\mu(N)+\mu(M)=\mu(E)\neq 0.$$

Let X be an arbitrary Borel subset of E. Since $X \cap M = X - N$ is a Borel subset of E,

$$\mu(X \cap M) = \mu(X) - \mu(N) = \mu(X).$$

Let $\mathbf{B}'$ be the set of all sets of the form $X \cap M$, where $X \in \mathbf{B}$, and let $\nu(X) = \mu(X)$ for $X \in \mathbf{B}'$. Hence, if the set $\{x : g(x) \geqq i\}$ contains in $\mathbf{B}$ a set of positive μ-measure, then it contains in $\mathbf{B}'$ a set of positive μ-measure too. Since $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}$, the converse of this statement is also true. Thus, it is sufficient to prove the theorem for M, $\mathbf{B}'$ and ν, instead of E, $\mathbf{B}$ and μ. Since M is a separable metric space and $\mathbf{B}'$ is a σ-algebra and ν is not identically zero measure on $\mathbf{B}'$, the theorem is true for M, $\mathbf{B}'$ and ν. Thus the theorem is true for E, $\mathbf{B}$ and μ too.

III.

We deal in this section with the problem (ii).

Theorem 9. *Let E be a set of power $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ and $\mathbf{K}$ a class of power $\mathfrak{m}$, of subsets of E of power $\mathfrak{m}$. There exists a relation R between the elements of E such that for every $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is $\leqq 1$ and there is no free subset X in $\mathbf{K}$ with respect to R.*

Proof. Let

$$B_0, B_1, \ldots, B_\omega, \ldots, B_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}})$$

be a wellordering of $\mathbf{K}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{m}}$. Since $\overline{\overline{B_\xi}} = \mathfrak{m}$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$, there exist two sequences $\{x_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ and $\{y_\xi\}_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}}$ such that

1. $x_\xi \in B_\xi$ and $y_\xi \in B_\xi$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$,
2. $x_\xi \neq x_\zeta$ and $y_\xi \neq y_\zeta$ for $\xi < \zeta < \varphi_{\mathfrak{m}}$,
3. $x_\xi \neq y_\xi$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$.

We define R as follows: let $R(x_\xi) = \{y_\xi\}$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}$, and if $x \neq x_\xi$ $(\xi < \varphi_{\mathfrak{m}})$, then let $R(x) = \{x_0\}$. It is obvious that the sets B_ξ are not free.

Corollary 6. *Let E be the set of all real numbers. There exists a relation R between the elements of E such that for every $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is $\leqq 1$ and there is no perfect free subset of E.*

Corollary 7. *Let E be the set of all real numbers. There exists a relation R between the elements of E such that for every $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is $\leqq 1$ and there is no free Borel subset of E of power $2^{\aleph_0}$.*

Theorem 10. *Let E be a set of power $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ and $\mathbf{K}$ a set of power $\mathfrak{m}$, of mutually disjoint non empty subsets of E. There exists a relation R between the elements of E, such that, for every $x \in E$ the power of the set $R(x)$ is $\leqq 1$ and there is no such free set which has non empty intersection with every element of $\mathbf{K}$.*

Proof. Let

$$B_0, B_1, \ldots, B_\omega, \ldots, B_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}})$$

be a wellordering of $\mathbf{K}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{m}}$. Let further

$$x_0, x_1, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}})$$

be a wellordering of E of the type $\varphi_{\mathfrak{m}}$. Obviously, we may assume that $x_\xi \notin B_\xi$. We define R as follows: let

$$R^{-1}(x_\xi) = B_\xi.$$

Let F be a set which has non empty intersection with every element of $\mathbf{K}$:

$$F \cap B_\xi \neq 0 \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{m}}).$$

Let $x \in F$. There is an ordinal number $\eta < \varphi_{\mathfrak{m}}$ such that $x = x_\eta$. Since $R^{-1}(x) = B_\eta$, we have $b_\eta R x$ for every $b_\eta \in B_\eta \cap F$. It follows that x and b_η $(x \neq b_\eta)$ are not independent, because $x \in R(b_\eta)$. The theorem is proved.

Corollary 8.[6]) *If E is the set of all real numbers, then there exists a relation R between the elements of E such that, for every $x \in E$, the power of the set $R(x)$ is $\leqq 1$ and there is no free subset, the complement of which is totally imperfect.*

Proof. Let $\mathbf{K}$ be a set of power $2^{\aleph_0}$ of non empty mutually disjoint perfect subsets of E, T a set the complement CT of which is totally imperfect, and $K \in \mathbf{K}$. Since the set CT does not contain K, $K \cap T \neq 0$. The corollary is proved.

Finally we prove

Theorem 11. *Let E be a set of power $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ and $\mathbf{K}$ a class of power $\mathfrak{g} < \mathfrak{m}$, of mutually exclusive subsets of power $\mathfrak{m}$ of E. If R is a relation between the elements $x \in E$ for which the condition* (A) *holds, i. e. $\overline{\overline{R(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ for every $x \in E$, then there exists a free subset E' of E such that, for every $K \in \mathbf{K}$,*

$$\overline{\overline{K \cap E'}} = \mathfrak{m}.$$

Proof. Let

$$K_0, K_1, \ldots, K_\omega, K_{\omega+1}, \ldots, K_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi_{\mathfrak{g}})$$

be a wellordering of $\mathbf{K}$ of the type $\varphi_{\mathfrak{g}}$. We assume first that $\mathfrak{m}$ is regular. We consider the set $\mathbf{M}$ of the matrices

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\xi} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\xi} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{\eta 1} & a_{\eta 2} & \ldots & a_{\eta\xi} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

[6]) S. Marcus has found independently the results of our corollaries 6 and 8.

of elements with the properties:

1. $a_{\eta\xi} \in K_\xi$ or $a_{\eta\xi} = 0$, $\eta < \varphi_{\mathfrak{m}}$ and $\xi < \varphi_{\mathfrak{g}}$,
2. if $a_{\eta\xi} \neq 0$, then $a_{\nu\mu} \neq 0$ for $\nu = \eta$ and $\mu < \xi$ or $\nu < \eta$ and $\mu < \varphi_{\mathfrak{g}}$,
3. if $a_{\nu\mu} \neq 0$ and $a_{\eta\mu} \neq 0$, then $a_{\nu\mu} \neq a_{\eta\mu}$ for $\nu \neq \eta$,
4. the set of the elements of the matrix is a free set.

For any $M \in \mathbf{M}$, let $\tilde{M}$ denote the set of the elements of M.

We say that an element $M \in \mathbf{M}$ is *maximal with respect to the relation* R if μ_0 and ν_0 are the smallest ordinal numbers $< \varphi_{\mathfrak{g}}$ such that $a_{\mu_0\nu_0} = 0$ and there is no element $k \in K_{\nu_0} - R[\tilde{M}]$ such that k and the elements $\neq 0$ of the matrix M are independent or if $a_{\mu\nu} \neq 0$ for every $\mu < \varphi_{\mathfrak{m}}$ and $\nu < \varphi_{\mathfrak{g}}$. We define the *index* of M in the first case as ν_0 and in the second case as $\varphi_{\mathfrak{g}}$. Let $\mathbf{M}'$ be the set of the maximal elements of $\mathbf{M}$.

We say that two matrices M_1 and M_2 are mutually exclusive if $\tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2 = 0$.

Let $\{M_\nu\}_{\nu<\eta}$ be a sequence of type $\eta < \varphi_{\mathfrak{m}}$, of mutually exclusive elements M_ν of $\mathbf{M}'$ with indices $\delta_\nu < \varphi_{\mathfrak{g}}$, Then by the definition of $\mathbf{M}'$, $\overline{\overline{\tilde{M}_\nu}} < \mathfrak{m}$, consequently $\overline{\overline{R[\tilde{M}_\nu]}} < \mathfrak{m}$ for every $\nu < \eta$, because $\overline{\overline{R(x)}} < \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.

Since $\mathfrak{m}$ is regular,

$$\overline{\overline{\bigcup_{\nu<\eta} (\tilde{M}_\nu \cup R[\tilde{M}_\nu])}} < \mathfrak{m}$$

i. e.

$$\overline{\overline{K_\gamma - \bigcup_{\nu<\eta} (\tilde{M}_\nu \cup R[\tilde{M}_\nu])}} < \mathfrak{m},$$

for every $\gamma < \varphi_{\mathfrak{g}}$. It follows that there is an element $M_\eta \in \mathbf{M}'$ such that $\tilde{M}_\eta \neq 0$ and $\tilde{M}_\eta \cap \tilde{M}_\nu = 0$ for every $\nu < \eta$.

(2) For every $\delta < \varphi_{\mathfrak{g}}$ there are less than $\mathfrak{n}$ mutually exclusive elements of $\mathbf{M}'$ with the same index δ.

Let $\{M_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{n}}}$ be a sequence of the type $\varphi_{\mathfrak{n}}$, of mutually exclusive elements M_ν of $\mathbf{M}'$ with the same index δ. Then the set

$$K_\delta - \bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{n}}} (\tilde{M}_\nu \cup R[\tilde{M}_\nu])$$

is non empty and, for every element z of this set, $\overline{\overline{R(z)}} \geqq \mathfrak{n}$ because, by the definition of $\mathbf{M}'$, $R(z) \cap \tilde{M}_\nu \neq 0$ for $\nu < \varphi_{\mathfrak{n}}$, which is a contradiction. Thus (2) is proved.

Supposing that every element M of $\mathbf{M}'$ has an index smaller than $\varphi_{\mathfrak{g}}$, we can now define by transfinite induction a sequence $\{M_\nu\}_{\nu<\varphi_{\mathfrak{m}}}$ of mutually exclusive elements of $\mathbf{M}'$ of the type $\varphi_{\mathfrak{m}}$. Since $\mathfrak{g} < \mathfrak{m}$ and $\mathfrak{m}$ is regular, there exists a subset, of power $\mathfrak{m}$, of $\mathbf{M}'$ with the same index $< \varphi_{\mathfrak{g}}$, which contradicts to (2). Thus there exists a matrix of index $\varphi_{\mathfrak{g}}$. It is obvious that the set of elements of this matrix satisfies the requirement of the theorem. Thus the theorem is true, if $\mathfrak{m}$ is regular.

Consider now the case when $\mathfrak{m}$ is singular[6]). We assume that the generalised continuum hypothesis is true. Let

$$\mathfrak{m} = \sum_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} \mathfrak{m}_\xi$$

be a decomposition of $\mathfrak{m}$ such that

1) $\mathfrak{m}_\xi$ is regular for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$, 2) $\mathfrak{m}_\xi < \mathfrak{m}_\zeta$ for $\xi < \zeta < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$,

3) $\mathfrak{m}_\xi > \max\{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}^*\}$, 4) $2^{\sum_{\zeta<\xi} \mathfrak{m}_\zeta} < \mathfrak{m}_\xi$ for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$

Let further

$$K_\nu = \bigcup_{\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}} K_{\nu\xi} \qquad (\nu < \varphi_{\mathfrak{g}})$$

be a decomposition of K_ν into mutually exclusive subsets of K_ν such that $\overline{\overline{K_{\nu\xi}}} = \mathfrak{m}_\xi$.

By the first part of the theorem, there exists a free subset L_ξ of E for every $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}$ such that

$$\overline{\overline{L_\xi \cap K_{\nu\xi}}} = \mathfrak{m}_\xi$$

for every $\nu < \varphi_{\mathfrak{g}}$. Omit for $\xi < \eta$ all the elements of $R[L_\xi]$ from L_η. Thus we get the sets

$$L'_\eta = L_\eta - \bigcup_{\xi<\eta} R[L_\xi].$$

By 1) and 3), $\overline{\overline{\bigcup_{\xi<\eta} R[L_\xi]}} < \mathfrak{m}_\eta$, thus the power of the set L'_η is $\mathfrak{m}_\eta$ and $\overline{\overline{L'_\eta \cap K_{\nu\eta}}} = \mathfrak{m}_\eta$ for every $\nu < \varphi_{\mathfrak{g}}$. Obviously

$$R[L'_\xi] \cap \Big(\bigcup_{\eta \geqq \xi} L'_\eta\Big) = 0.$$

Let

$$L'_{\nu\xi} = L'_\xi \cup K_{\nu\xi} \qquad (\nu < \varphi_{\mathfrak{g}},\ \xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*}).$$

We want to construct sets $L''_{\nu\xi}$ of power $\mathfrak{m}_\xi$ which satisfy

$$(3) \qquad R[L''_{\nu\xi}] \cap \Big(\bigcup_{\varkappa<\nu} \bigcup_{\eta<\xi} L''_{\varkappa\eta}\Big) = 0.$$

But then clearly

$$R\Big[\bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{g}}} \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} L''_{\nu\xi}\Big] \cap \Big[\bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{g}}} \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} L''_{\nu\xi}\Big] = 0,$$

i. e. the set $\bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{g}}} \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} L''_{\nu\xi}$ is free and satisfies the requirement of the theorem. Thus we only have to construct $L''_{\nu\xi}$. Consider the sets $L'_{\nu\xi}$ and

[6]) The proof is due to A. Hajnal.

$L_\xi^* = \bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{g}}} \bigcup_{\zeta<\xi} L'_{\nu\zeta}$ $(\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*})$. Let $N[L_\xi^*]$ denote the set of all subsets of L_ξ^* of the power $< \mathfrak{n}$. By 3) $\overline{\overline{N[L_\xi^*]}} < \mathfrak{m}_\xi$. It follows that there exists a subset $H_{\nu\xi}$ of power $\mathfrak{m}_\xi$ of $L'_{\nu\xi}$ and an element $N_{\nu\xi}$ of $N[L_\xi^*]$ such that $L_\xi^* \cap R[H_{\nu\xi}] = N_{\nu\xi}$. Let

$$U = \bigcup_{\nu<\varphi_{\mathfrak{g}}} \bigcup_{\xi<\varphi_{\mathfrak{m}^*}} N_{\nu\xi}.$$

Obviously $\overline{\overline{U}} \leqq \mathfrak{n}\mathfrak{g}\mathfrak{m}^* < \mathfrak{m}_0$. Let $L''_{\nu\xi} = H_{\nu\xi} - U$ $(\nu < \varphi_{\mathfrak{g}}$ and $\xi < \varphi_{\mathfrak{m}^*})$. These sets obviously satisfy the condition (3). The theorem is proved.

References.

[1] S. Piccard, Sur un problème de M. Ruziewicz, de la théorie des relations, *Fundamenta Math.*, **29** (1937), 5—9.

[2] G. Fodor, On a theorem in the theory of binary relations, *Compositio Math.*, **8** (1951), 250.

[3] G. Fodor, On two problems concerning the theory of binary relations, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949—50), 199—200.

[4] G. Fodor, On a problem concerning the theory of binary relations, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **23** (1951), 247—248.

[5] G. Fodor, Proof of a conjecture of P. Erdős, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 219—227.

[6] S. Ulam, Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fundamenta Math.*, **16** (1930), 140—150.

[7] W. Sierpiński, Sur un ensemble non mesurable, *Tôhoku Math. Journal*, **12** (1914), 205-208.

[8] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu* (Warszawa—Lwów, 1934).

[9] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функции (Москва, 1948).

[10] E. Marczewski—R. Sikorski, Measures in non-separable metric spaces, *Colloquium Math.*, **1** (1947—1948), 133—139.

[11] P. R. Halmos, *Measure theory* (New York, 1950).

(Received September 5, 1957.)

A simple proof of the functional equation for the Riemann zeta-function and a formula of Hurwitz.

By MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

1. The functional equation of $\zeta(s)$ as a fundamental fact of the analytic theory of numbers was discussed since RIEMANN many times and in various ways. Besides the two original proofs of RIEMANN which are based on the contour integral representation of the zeta-function and on certain properties of the theta-function $\Sigma e^{-n^2 \pi x}$, respectively, new proofs were published in the last decades e. g. by HARDY, INGHAM, KLOOSTERMAN, MORDELL, RADEMACHER, SIEGEL, TITCHMARSH.[1])

In the present paper we shall give a remarkably simple proof consisting substantially of the calculation of certain Fourier coefficients by the formula

$$(1)\qquad \int_0^\infty t^{z-1} e^{-i\lambda t}\, dt = \Gamma(z)\,(i\lambda)^{-z} \qquad (\lambda \neq 0 \text{ real},\ 0 < \Re(z) < 1),$$

which is an immediate consequence of EULER's integral definition for $\Gamma(z)$[2]). It is easy and appropriate in addition to verify more: the possibility of analytic continuation over the whole s-plane of the generalized zeta-function $\zeta(s,u) = \sum_{n=0}^{\infty} (u+n)^{-s}$ $(\Re(s) > 1,\ 0 < u \leqq 1)$ and the formula of HURWITZ:[3])

$$(2)\qquad \zeta(s,u) = 2\Gamma(1-s) \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu\pi)^{s-1} \sin\left(2\nu\pi u + \frac{\pi s}{2}\right),$$

[1]) Cf. e. g. E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), and E. C. TITCHMARSH, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951). The latter contains also an extended list of original papers.

[2]) The integral in (1) extends over the positive real axis and $(i\lambda)^{-z}$ is to be taken with its principal value.

[3]) See E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *Modern analysis*, 4. edition (Cambridge, 1952), p. 266—267. — We shall show (without using any integral representation of $\zeta(s,u)$) the validity of (2) for $\Re(s) < 1$, while one finds it only with the condition $\Re(s) < 0$ in the literature. (Cf. to this also certain remarks of my two recent papers in *these Acta*, 17 (1956), 143—164, and in *Publ. Math. Debrecen*, 5 (1957), 44—53, where (2) occurs as an auxiliary tool.)

which furnishes for $u=\frac{1}{2}$ or 1 by $\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right)=(2^s-1)\zeta(s)$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \nu^{-s}=$ $=(2^{1-s}-1)\zeta(s)\,(\Re(s)>0)$ and $\zeta(s,1)=\zeta(s)$, respectively, the relation in question:

$$\zeta(s)=2\,(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}\,.\,\zeta(1-s). \tag{2*}$$

By (2) one can get at once the corresponding facts in the theory of DIRICHLET's L-functions, first of all their functional equation[4]).

2. Theorem. *$\zeta(s,u)$ with any fixed u in* (0,1] *is regular for all s except for $s=1$; at this point there is a simple pole with residue* 1. *Formula* (2) *holds for* $0<u<1$, $\Re(s)<1$, *in particular formula* (2*) *holds for all* $s\neq 1,2,\ldots$.

Proof. 1° Let $\Re(s)>0, s\neq 1$. Then the difference $\sum_{n=1}^{N}(u+n)^{-s}-$ $-\frac{1}{1-s}N^{1-s}$ $(0\leqq u\leqq 1)$ converges as $N\to\infty$ and its limit is an analytic function of s, since we have the estimation

$$(^*)\qquad \left|(u+n)^{-s}-\frac{1}{1-s}\left[n^{1-s}-(n-1)^{1-s}\right]\right|\leqq\frac{3}{2}Rn^{-1-\varepsilon}\left[1+\frac{R+1}{2}\frac{1}{n}+\right.$$
$$\left.+\frac{(R+1)(R+2)}{2\cdot 3}\frac{1}{n^2}+\cdots\right]\leqq 3Rn^{-1-\varepsilon},$$

provided that $\Re(s)\geqq\varepsilon>0$, $|s|\leqq R$, $n\geqq 2R>2$. Therefore for $0<u\leqq 1$

$$\zeta(s,u)=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}(u+n)^{-s}-\frac{N^{1-s}}{1-s}\right], \tag{3}$$

$$\zeta(s,u)-\frac{1}{s-1}=u^{-s}+(u+1)^{-s}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(u+n)^{-s}-\frac{n^{1-s}-(n-1)^{1-s}}{1-s}\right] \tag{4}$$

The sum of the last series being regular for $\Re(s)>0$ by (*), (4) implies at once the assertion concerning $s=1$.

2° Next consider $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{-s}e^{2\nu\pi i u}$ $(0<u<1)$. By partial summation and since $|\nu^{-s}-(\nu+1)^{-s}|\leqq 6R\nu^{-1-\varepsilon}$ $(\Re(s)\geqq\varepsilon>0,\ |s|\leqq R,\ \nu\geqq 2R>2)$ (cf. (*)), this series converges in the half-plane $\Re(s)>0$ and represents there a regular function of s. It results the same behaviour for $\Re(s)<1$ of the Hurwitz series in (2).

---

[4]) Cf. Н. Чудаков, Введение в теорию L-функции Дирихлет (Moscow—Leningrad, 1947), p. 89 and 92.

3° Now it remains only to show that (2) is valid e. g. for $0 < s < 1$, $0 < u < 1$. In fact, the complex Fourier coefficients of $\zeta(s, u)$ with such s, u are by (3) and (1):

$$c_0 = \int_0^1 \zeta(s, u)\, du = 0,$$

$$c_\nu = \int_0^1 \zeta(s, u)\, e^{-2\nu\pi i u}\, du = \int_0^\infty v^{-s} e^{-2\nu\pi i v} dv = \Gamma(1-s)(2\nu\pi i)^{s-1} \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

the term-by-term integration being justified by (*); hence the right-hand series in (2) is the (real) Fourier development of $\zeta(s, u)$ over $0 < u < 1$.

Since, by the uniform convergence for $0 \leqq u \leqq 1$ of $\sum_{n=1}^{\infty} (u+n)^{-1-s}$, we have $\frac{d}{du}\zeta(s, u) = -s\,\zeta(s+1, u)$ in this interval, we conclude at the same time to its convergence to the function in question, q. e. d.

(Received October 10, 1957.)

Bibliographie.

Robert Brisac, Exposé élémentaire des principes de la Géométrie élémentaire, 77 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

Der Aufbau des dreidimensionalen euklidischen Raumes, der in dieser Monographie durchgeführt wird, unterscheidet sich in mancher Hinsicht von bekannten Darstellungen.

Als undefiniertes Grundelement wird bloß der Punkt betrachtet, die Geraden und Ebenen sind gewisse Punktmengen. Eine erste Axiomengruppe ist die der Verknüpfung. Die Axiomengruppe der Anordnung wird durch Trennungsaxiome ersetzt, aus deren die Zwischenbeziehungen ableitbar sind. An Stelle von Kongruenzaxiomen werden, in Anlehnung an POINCARÉ, Abbildungen, die eine Gruppe bilden, axiomatisch eingeführt. Wesentlich ist es bei dieser Axiomengruppe, daß die Anordnung von Punkten erhalten bleibt und daß Halbgeraden und Halbebenen, die in bestimmt festgelegter Weise berandet sind, aufeinander abgebildet werden können. Zwei Spiegelungsaxiome, die sich an Gedankengänge von HJELMSLEV anlehnen, bestimmen die Abbildungen. Es folgt dann das euklidische Parallelenaxiom, das die Existenz von Translationen sichert. Mit Hilfe der Translationen und eines archimedischen Axioms wird die Länge als Maß einer Gruppe mit archimedischer Anordnung eingeführt. Ein zweites Stetigkeitsaxiom ermöglicht einen solchen Aufbau der Geometrie, der als Modell die gewöhnliche analytische Geometrie zur Folge hat. Dem Büchlein sind drei Anhänge beigefügt. Der erste bezieht sich auf die Orientierung der Geraden, der Ebenen und des Raumes. Der zweite beinhaltet die analytische Darstellung der Bewegungen. Im dritten Anhang wird, als Anwendung des Maßes in archimedisch angeordneten und vollständig angeordneten Gruppen, die Logarithmus- und die Exponentialfunktion definiert.

Das Büchlein wird wegen der originellen Darstellungsart auch für den Kenner von Interesse sein.

Otto Varga (Debrecen)

S. Stoïlov, Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Deuxième édition, augmentée de notes sur les fonctions analytiques et leurs surfaces de Riemann (Collection Borel), XVI + 194 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956.

C'est une réproduction du texte de la première édition, de 1938, et de quatres notes: I. Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières totalement discontinues, *Mathematica, Cluj,* **12** (1936), 123—138; II. Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle, *Mathematica, Cluj,* **19** (1843), 126—138; III. Remarque sur la définition des points singuliers des fonctions analytiques multiformes, *Bull. Sect. Sci. Acad. roumaine,* **26** (1944), 671—672; IV. Note sur les fonctions analytiques multiformes, *Annales de la Soc. polonaise de math.,* **25** (1952), 69—74.

B. Sz.-N.

G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Band II und III, **Anwendungen der Laplace-Transformation,** 1. Abteilung, 436 Seiten; 2. Abteilung, 300 Seiten (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Math. Reihe, Bd. 15/19), Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1955 und 1956.

Der erste Band dieses Werkes erschien 1950; er behandelt die Theorie der Laplace-Transformation.[1]) Die Bände II und III enthalten die verschiedenen Anwendungen aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. Die Teile und Kapiteln in den zwei Bänden sind fortlaufend numeriert.

Der Band II ist in drei Teile, 16 Kapiteln und einen Anhang gegliedert. Teil I beschäftigt sich mit im Poincaréschen Sinne asymptotischen Entwicklungen von Funktionen. Es wird die Methode benutzt, daß man die zu untersuchende Funktion als Bildfunktion bzw. Originalfunktion bezüglich einer Transformation betrachtet und die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der einen Funktion auf diejenige der anderen zurückführt. Dementsprechend wird von Abelscher, bzw. Tauberscher Asymptotik gesprochen. Kap. 3—8 behandeln die Abelschen asymptotischen Methoden für die Laplace-Transformation, die Mellin-Transformation und die komplexen Integrale, die als Umkehrung dieser Transformationen auftreten. Es wird die Abelsche Asymptotik der ein- und zweiseitigen Laplace-Transformation im Unendlichen und an Stellen im Endlichen behandelt. Asymptotische Entwicklung eines Laplace-Integrals auf komplexem Weg durch Deformation des Integrationsweges. Laplace-Problem der Funktionen großer Zahlen. Die Methode der Sattelpunkte. Asymptotische Entwicklungen von komplexen Faltungsintegralen. Asymptotische Entwicklungen der durch das komplexe Umkehrintegral dargestellten Funktionen im Betracht der Eigenschaften der Singularitäten. Die Heavisideschen Entwicklungstheoreme der Operatorrechnung. Es werden zahlreiche Beispiele gebracht: das Gaußsche Fehlerintegral, das Exponentialintegral, die Gammafunktion, die Besselschen Funktionen, das Fresnelsche Integral, die Riemannsche Zetafunktion und die Thetafunktion. Ferner werden Beispiele gebracht aus den Gebieten der Aerodynamik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie, Elektrizitätslehre und Quantentheorie. Kap. 9 behandelt die Taubersche Asymptotik der Laplace-Transformation. Als Beispiele werden die Erneuerungstheorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Primzahlsatz gebracht. Kap. 10 bringt asymptotische Aussagen verschiedener Art, über die Original- und Bildfunktion der Laplace-Transformation.

Teil II behandelt die konvergenten Entwicklungen. Kap. 11 bringt die Fakultätenreihen, insbesondere die Entwicklung von Laplace-Transformierten in eine Fakultätenreihe. Kap. 12 beschäftigt sich mit speziellen Reihen, insbesondere mit der Thetafunktion, ferner mit den nach den Besselschen Funktionen, Laguerreschen und Hermiteschen Polynomen, und konfluenten hypergeometrischen Funktionen fortschreitenden Entwicklungen.

Teil III behandelt die gewöhnlichen Differentialgleichungen. In Kap. 13 werden gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in einseitig unendlichem Intervall unter Anfangsbedingungen dargestellt. Behandelt werden die inhomogenen bzw. homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, mit verschwindenden, bzw. beliebigen Anfangsbedingungen. Es werden Beispiele gebracht aus dem Problemkreis der elektrischen Schwingungskreise, Rückkoppelungssysteme, Regelungstechnik. Es wird die Stabilität der Regelung und auch die exakte mathematische Diskussion der Stabilität behandelt. Es wird das inhomogene und homogene System von Differentialgleichungen behandelt. Beispiele werden gebracht aus dem Gebiet der Kettenleiter und Wellenfilter. In Kap. 14—16 betrachtet man die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizien-

[1]) Eine Besprechung findet man in *Acta Sci. Math.*, **14** (1951), 142—143.

ten im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen, sowie die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten im Originalraum (bzw. Bildraum) der Laplace-Transformation.

Der Anhang zum Band II enthält den Satz von LAGRANGE—BÜRMANN. Der Band schließt mit einem Sachregister und mit Berichtigungen zu Band I.

Band III besteht aus 4 Teilen und 16 Kapiteln. Teil IV behandelt die Anfangs- und Randwertprobleme der partiellen Differentialgleichungen mittels der Laplace-Transformation. In Kap. 18 wird die Lösung dieses Problems im Falle von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten explizit angegeben. Es werden folgende Differentialgleichungen behandelt: Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung; Wellengleichung und Telegraphengleichung; Potentialgleichung. Kap. 19 beschäftigt sich mit partiellen Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten; es werden u. a. die singulären Fokker—Planckschen Gleichungen behandelt. In Kap. 20 werden Eindeutigkeitssätze und Kompatibilitätsbedingungen für die Rand- und Anfangswerte gebracht. Kap. 21 behandelt das Huyghenssche und Eulersche Prinzip.

Teil V behandelt Differenzengleichungen: gewöhnliche Differenzengleichungen im Originalraum (Kap. 22) und im Bildraum (Kap. 23), ferner partielle Differenzengleichungen (Kap. 24). Es werden Beispiele gebracht aus dem Gebiete der elektrischen Kettenleiter.

Teil VI beschäftigt sich mit Integralgleichungen und Integralrelationen. Es werden Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus im endlichen Intervall (Kap. 25) und im unendlichen Intervall (Kap. 26) betrachtet. Kap. 25 bringt die linearen Integralgleichungen zweiter und erster Art. Als Beispiele werden das Erneuerungsproblem der Statistik, Abelsche Integralgleichungen, und Integration und Differentiation nichtganzer Ordnung gebracht. Zum Schluß werden Integral- und Integrodifferentialgleichungen höherer Ordnung behandelt. Kap. 26 betrachtet lineare Integralgleichungen erster und zweiter Art; Kap. 27 Funktionalrelationen mit reellen Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheorie; es werden besonders die Thetafunktionen, Besselsche Funktionen, konfluente hypergeometrische Funktion, Hermitesche und Laguerresche Polynome behandelt. Kap. 28—29 untersuchen die Integralgleichungen mit komplexen Faltungsintegralen und andere Fragen. Kap. 30 behandelt verschiedene mit Laplace-Transformation lösbare Typen von Integralgleichungen.

Teil VII behandelt die endliche Laplace-Transformation (Kap. 31) und die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus (Kap. 32).

Zum Schluß folgen Nachträge zu Band I, literarische und historische Nachweise, Aufzählung der Bücher über Laplace-Transformation, Literaturverzeichnis, Sachregister und Berichtigungen zu Band II.

Die Bände II und III bilden ein komplettes Werk, ein äußerst nützliches Hilfsmittel für reine und auch für angewandte Mathematiker. Sein Wert wird durch die klare Darstellung, Eleganz der Methode und die ausgezeichnete Auswahl der Beispiele erhöht.

L. Takács (Budapest)

W. Blaschke, Kreis und Kugel, 2te Aufl., VIII + 167 S., Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1956.

Die vorliegende zweite Auflage des berühmten Büchleins ist eine fast unveränderte Reproduktion der ersten. Das Buch ist der Theorie der konvexen Körper, insbesondere den isoperimetrischen Eigenschaften von Kreis und Kugel gewidmet und führt in einfacher und natürlicher Art in die Ideen von BRUNN, MINKOWSKI und des Verfassers ein. Deshalb bietet es — trotz der großen Entwicklung, die sich auf diesem Gebiete in den letzten Dezenien vollzog — noch heute ein lehrreiches Studium dar.

Es ist zu begrüßen, daß das längst vergriffene Buch, an dem eine ganze Generation von Geometern herangewachsen ist, wieder zu haben ist.

L. Fejes Tóth (Budapest)

H. Weyl, Symmetry, 168 pages, Princeton (New Jersey), Princeton University Press, 1952.

This little book, written for laymen, is a fascinating introduction to the theory of discrete groups of congruent transformations, illustrated by a multitude of interesting examples of nature and art. It consists of four lectures (Bilateral symmetry; Translatory, rotational, and related symmetry; Ornamental symmetry; Crystals. The general mathematical idea of symmetry) which gradually develop and finally generalise the geometric concept of symmetry. This generalisation culminates in the idea of the group of automorphisms, which allows a deep insight into the constitution of a „structure-endowed entity". The importance of this idea is sketched on relativity theory, quantum theory and Galois theory.

There are two appendices containing the complete enumeration (with the proof of the completeness) of all finite groups of congruent transformations.

L. Fejes Tóth (Budapest)

A. W. Pogorelow, Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen, 78 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1956.

Dieses Heft ist eine Übersetzung der russischen Originalausgabe, die im Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR zu Kiew 1952 erschienen ist. Es enthält den Beweis des Satzes, daß zwei zueinander isometrische, geschlossene konvexe Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes kongruent sind. Dieses auf CAUCHY zurückgreifende Resultat (der den genannten Satz im wesentlichen für Polyeder dargetan hat) wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts von LIEBMANN unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen bewiesen. Da es klar war, daß die Liebmannsche Voraussetzung „nicht durch das Wesen der Frage hervorgerufen wird, sondern durch die Beweismethode", bemühte sich eine Reihe von hervorragenden Mathematikern (MINKOWSKI, HILBERT, WEYL, COHN-VOSSEN, HERGLOTZ) den Liebmannschen Satz durch Linderung der Voraussetzungen zu verschärfen. Die Befreiung des Satzes von jeder überflüssigen Voraussetzung gelang aber erst dem Verfasser mit Hilfe der von A. D. ALEXANDROW geschaffenen, neuen, rein geometrischen „inneren Geometrie der konvexen Flächen".

Das klar gefaßte Heft führt den Leser durch verschiedene anregende und fruchtbare Ideen zum genannten Satz, der als eine sehr bedeutende mathematische Leistung unseres Jahrhunderts zu betrachten ist.

L. Fejes Tóth (Budapest)

William Ted Martin and Eric Reissner, Elementary differential equations, VII+260 pages, Cambridge (Massachusetts), Addison—Wesley Publishing Company, 1956.

It has been the authors' aim — as they write in the preface of the book — to write an introductory book on differential equations, which is of particular interest to students who need to know mathematics rather well because of their work in science and engineering.

It is shown how to translate some problems of science and engineering into differential equations and how to try to solve them. Many specific applications of differential equations are treated in detail, and the understanding of the theorems is helped by solving several examples and by the exercises suggested to the reader (with the solutions at the end of the book). For sake of better understanding a number of fundamental notions are considered by returning to them on several occasions, each time in a different context.

The book begins with a chapter on geometrical and physical problems. Four chapters deal with differential equations of first, second and nth order and with systems of first order differential equations. The following chapters are: Approximate solution of first order differential equations and PICARD's theorem; Finite difference equations; Partial differential equations.

Summung up: this is an easy readable, very useful introduction to the theory and applications of differential equations.

L. Pintér (Makó)

Paul Montel, Leçons sur les récurrences et leurs applications. Recueillies et rédigées par Jacques Dufresnoy et Éloi Lefebvre (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions), XII+268 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

Ce livre est un exposé excellent de quelques parties choisies du domaine immense de la théorie des récurrences (itérations, équations aux différences finies, en particulier fractions continues) et leurs applications.

Dans une préface courte on fait hommage à la mémoire d'EMILE BOREL, initiateur et directeur pendant une longue période de la Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions. Chapitre I contient des définitions et généralités et aussi quelques applications intéressantes à questions géométriques et à la définition des fonctions. Chapitre II, sur les récurrences linéaires, contient (comme aussi les chapitres suivants) des applications aux séries de LAURENT, séries trigonométriques et séries de FABER. Les Chapitres III, X et XI s'occupent des récurrences du premier ordre ou, ce qui revient au même, de l'itération. Ici et dans le Chapitre IV sur les récurrences d'ordre supérieur on traite entre autres de l'équation de SCHRÖDER, des fonctions génératrices et des multiplicateurs. Le Chapitre IV traite aussi comme illustration des transformations ponctuelles, ainsi que des méthodes d'HADAMARD et LATTÈS sur les récurrences d'ordre supérieur. Dans le Chapitre V, on donne deux démonstrations du théorème de POINCARÉ sur la limite des quotients des termes successifs de récurrences linéaires. Les Chapitres VI—X appliquent les récurrences aux fractions continues finies et infinies, leur convergence, leurs fractions correspondantes et associées, leurs applications arithmétiques et en particulier aux fractions de STIELTJES. Des paragraphes auxiliaires traitent des propriétés des déterminants et de l'intégrale de STIELTJES.

Ce livre gagnera, par son style claire, la beauté et l'importance du sujet et les applications intéressantes traitées, certainement beaucoup de nouveaux amis de ce domaine important de mathématique. Un index alphabétique et peut-être une formulation plus explicite des définitions et résultats faciliteraient encore la lecture.

J. Aczél (Debrecen)

J. Favard, Cours de géométrie différentielle locale (Cahiers scientifiques, fascicule XXIV), VIII+553 Seiten, Paris, Gauthier—Villars, 1957.

Die schnelle Entwicklung der Mathematik in den beiden letzten Jahrhunderten hat auch in der Differentialgeometrie die Folge gehabt, daß heutzutage die Differentialgeometrie ein sehr umfangreiches Teilgebiet der Geometrie geworden ist, die die Theorien ganz verschiedenartiger Räume in sich vereinigt. Es ist keineswegs eine leichte Aufgabe die grundlegenden Theorien der Differentialgeometrie — auch dann, wenn wir uns nur auf die Punkträume beschränken — in einem Lehrbuch zu vereinigen, und möglichst von einem gemeinsamen Standpunkt aus zu entwickeln. Diese Schwierigkeiten konnte aber der Verf. in eleganter Weise, auf Grund der Cartanschen Methode überwinden. Die Cartansche Methode ermöglicht nämlich, daß man mit ihrer Hilfe vom Standpunkt der Gruppentheorie aus eine zusammenfassende allgemeine Theorie ausbaue, die dann fast alle verschiedene differentialgeometrische Räume als Spezialfälle enthält. Um die einzelnen Theorien der verschiedenen differentialgeometrischen Räume zu bekommen, muß man im Wesentlichen nur die Cartanschen Strukturgleichungen der Fundamentalgruppen der einzelnen Räume bestimmen.

Die Cartansche Methode ist eine sehr allgemeine Theorie; Verf. benützt sie aber nicht als Selbstzweck für eine Verallgemeinerung, sondern nur als ein Hilfsmittel, das für eine einheitliche Behandlung der Geometrien sehr geeignet ist. Eben deshalb werden diejenigen dieses interessante Buch mit großem Nutze studieren können, die sich mit den Methoden und Problemkreisen der Differentialgeometrie eingehender befassen wollen.

Durch mannigfache verschiedenartige interessante Einzelfälle und Beispiele macht uns der Verf. — neben den allgemeinen Theorien — auch mit ganz speziellen Fragen der Differentialgeometrie bekannt, die oft auch in ganz anschaulicher Weise behandelt sind. Dadurch überzeugt er uns, daß die Differentialgeometrie nicht notwendigerweise ein Ozean des Kalküls ist, in dem das geometrische Wesen manchmal ziemlich schwer erkennbar ist.

Der Verf. vereinigt in der Einleitung alle Hilfsmittel, die für die nachfolgenden differentialgeometrischen Untersuchungen notwendig sind, undzwar die Theorie der Lieschen Transformationsgruppen, den Tensorkalkül und die Grundzüge der Theorie der Pfaffschen Formen.

Das Grundproblem des ersten Teiles ist die Entwicklung der Theorie der Berührung, namentlich die Berührung der Kurven und Flächen, weiter die Theorie der Enveloppen und der Berührungstransformationen.

Der zweite Teil besteht aus drei Sektionen, in denen die Euklidische-, die affine- und die projektive Differentialgeometrie entwickelt sind. In diesem Teil zeigt sich die Nützlichkeit und Brauchbarkeit der Cartanschen Methode. Die Cartanschen Strukturgleichungen ergeben nämlich unmittelbar die Frenetschen Formeln in den einzelnen Geometrien, die in der Theorie der Kurven, und von gewissem Standpunkt aus auch in der Theorie der Flächen von fundamentaler Bedeutung sind. Aus diesen Formeln kann man nämlich die Krümmungstheorie entwickeln.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit der Übertragungstheorie und deren Anwendungen auf die affin- und projektivzusammenhängenden und auf die Riemannschen Räume. Als Spezialfälle sind auch die Hauptformeln der für die Physiker wichtigen Eddingtonschen, Weylschen und Einsteinschen Räume kurz besprochen.

Nach jedem Kapitel findet man viele Übungsbeispiele und Aufgaben, die — wir wollen es mit dem Verf. hoffen — die jüngeren Mathematiker zu weiteren Untersuchungen und Studien in der Differentialgeometrie aneifern werden.

A. Moór (Szeged)

Arnaud Denjoy, Un demi-siècle (1907—1956) de Notes communiquées aux Académies de Paris, d'Amsterdam, des Lincei, suivies par des observations et commentaires. Reproduites avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. 99+589 pages, Paris, Gauthier—Villars, 1957.

Les Notes présentées aux séances des académies et publiées dans leurs Comptes Rendus constituent un genre particulier de communications mathématiques, genre qui offre à l'auteur l'avantage de la rapidité de la parution, mais qui, en revanche, exige le sacrifice d'une concision parfois exagérée. Cette concision force l'auteur à ne donner que des démonstrations esquissées, ou, très souvent, à n'en donner point, et à diviser la communication des sujets plus vastes en plusieures Notes successives. La hâte avec laquelle le manuscript est préparé, entraîne le danger de ne pas apercevoir des incorrections qui, à défaut de démonstrations, échappent également à l'attention du lecteur. Tout cela présente à la lecture des Notes de ce genre une extrême difficulté.

Eu égard aux points de vue énumérés, on ne peut accepter qu'avec une grande joie la parution d'une collection complète des Notes de l'illustre analyste, car le fait qu'elles sont rassemblées, ordonnées suivant leurs sujets et accompagnées par des commentaires de l'auteur, supprime presque tous les inconvénients propres à ce genre de communication. Le premier des deux volumes comprend les Notes qui s'occupent de la théorie des fonctions d'une variable complexe, le second contient celles qui traitent des sujets de la métrique et de la topologie des ensembles et des fonctions de variables réelles, de la topologie des espaces cartésiens, de la théorie des ensembles ordonnés, de la théorie ergodique et du calcul des probabilités. En ne faisant mention que de ce qu'on y trouve par exemple les notes intitulées „Les quatre cas fondamentaux des nombres dérivés" ou „Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale", l'importance et le caractère classique des questions traitées sont suffisamment mis en évidence. Les observations et les commentaires qui se trouvent à la fin des deux volumes offrent aux mathématiciens intéressés à la genèse des idées d'un chercheur éminent un excellent aperçu sur le développement et sur la connexion des différents résultats. En même temps, ils font connaître l'opinion du grand savant sur les découvertes qu'il a trouvées il y a presqu'un demi-siècle.

Ákos Császár (Budapest)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

T. M. Apostol, Mathematical analysis, A modern approach to advanced calculus, XII + 553 pages, Reading, Massachusetts, Addison—Wesley, 1957. — $ 8,50

H. Arzeliès, La dynamique relativiste et ses applications, Fasc. I, XXI + 304 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 4000 Fr.

E. W. Beth, La crise de la raison et la logique (Conférences, faites à l'Université de Liège au mois de mai 1956), 50 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 900 Fr.

L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs, deuxième édition revue et corrigée, VI + 208 pages, Paris, Gauthier-Villars 1957. — 2900 Fr.

L. de Broglie, La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire (Les grands problèmes des sciences), VI + 130 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 2500 Fr.

H. S. M. Coxeter—W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 14), VIII + 155 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. — DM 32.—

R. Daudel, Les fondements de la chimie théorique (Traité de physique théorique et de physique mathématique), X + 236 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3500 Fr.

A. Delesalle, Carrés magiques, 70 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 800 Fr.

J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Cahiers scientifiques, Fasc. 25), VI + 367 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 5500 Fr.

Le R. P. Dubarle, Initiation à la logique (Collection de logique mathématique, Vol. 13), 89 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 1400 Fr.

Fünfzig Jahre Relativitätstheorie — Cinquantenaire de la théorie de la relativité — Jubilee of relativity theory, Bern, 11—16 Juli 1955 (Helvetica Physica Acta Suppl. IV), 286 Seiten, Basel, Birkhäuser Verlag, 1956. — sFr 36.—

C. F. Gauss, Gedenkband anlässlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955, herausg. H. Reinhardt, 8 + 251 Seiten, Leipzig, Teubner Varlag, 1957. — DM 25.80

R. Gouyon, Précis de mathématiques spéciales, Programmes A_1 et A_2, IX + 647 pages, Paris, Vuibert, 1956. — 6300 Fr.

N. M. Günter, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, übersetzt von D. Bebel, X + 342 Seiten, Leipzig, Teubner Verlag, 1957. — DM 18.—

W. Haack, Darstellende Geometrie. III. Axonometrie und Perspektive (Sammlung Göschen, Bd. 144), 127 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1957. — DM 2.40

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik (Sammlung Göschen, Bd. 226, 875, 882), Berlin, Walter de Gruyter. — DM 2.40 + 2 40 + 2.40
Erster Teil: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes, 200 Seiten, 1953. — Zweiter Teil: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden, 109 Seiten. 1957. — Dritter Teil: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur französischen Revolution, 107 Seiten, 1957.

Б. С. Якоби, Библиографический указатель, 318 pages, Moscou—Léningrade, Izd. Akademii Nauk SSSR, 1953. — Rbl 6.40.

N. Jacobson, Structure of rings (*American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 37), 263 pages, New York, American Mathematical Society, 1956. — $ 7.70

K. Knopp, Funktionentheorie. I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Sammlung Göschen, Bd. 668), 144 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1957. — DM 2.40

R. Lagrange, Produit d'inversions et métrique conforme (Cahiers scientifiques, Fasc. 23), X + 329 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 4000 Fr.

T. Lalescu, Introducere la teoria ecuatiilor integrale, 134 pages, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956. — 5.90 Lei

А. М. Ляпунов, Библиография, 268 pages Moscou—Léningrade, Izd. Akademii Nauk SSSR, 1953. — Rbl 8.20

Lucrările consfătuirii de geometrie diferenţială, din 9—12 Iunie 1955, 368 pages, Timişoara, Editura Academiei RPR. — 9.50 Lei

A. Pantazi, Opera matematica, 496 pages, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956. — 24.20 Lei

M. Parodi, Introduction à l'étude de l'analyse symbolique (Traité de physique théorique et de physique mathématique), VIII + 246 pages, Paris Gauthier-Villars, 1957. — 3500 Fr.

H. Poincaré, Oeuvres, Tome IX. **Mémoires divers, hommages à Henri Poincaré, livre du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré**, 357 + 305 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956.

L. S. Pontrjagin, Topologische Gruppen, Teil 1, 263 Seiten, Leipzig, Teubner Verlag, 1957. — DM 15.—

Proceedings of the international symposium on algebraic number theory (Tokyo — Nikko, September 1955), XXI + 267 pages, Tokyo, Science Council of Japan, 1956. — $ 5.—

R. Risser—C. E. Traynard, Les principes de la statistique mathématique (Traité du calcul des probabilités et de ses applications, Tome I. Les principes de la théorie des probabilités, Fasc. IV), XVI + 195 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 3500 Fr.

Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 81) VII + 150 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springen-Verlag, 1957. — DM 24.80

W. Specht, Gruppentheorie (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 82). VII + 457 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1956. — DM 69.60

С. П. Соболев, Материалы к библиографии ученых СССР (Серия математики, Вып. 6), 41 pages, Moscou—Léningrade, Izd. Akademii Nauk SSSR, 1949. — Rbl 2.—

G. Ţiţeica, Geometrie diferenţială proiectivă a reţelelor, 285 pages, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956. — 18.10 Lei

S. Vasilache, Elemente de teoria mulţimilor şi a structurilor algebrice, 233 pages, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956. — 11.65 Lei

J. P. Vigier, Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta (Les grands problèmes des sciences, Fasc. V), XI + 192 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 3000 Fr.

H. Weyl, Selecta, 592 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956. — DM 48.90

A. H. Wilson, Thermodynamics and statistical mechanics, XV + 495 pages, Cambridge, University Press, 1957. — 50 sh.

S. Yiftah, Constantes fondamentales des théories physiques (Les grands problèmes des sciences, Fasc. III), XII + 124 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1956. — 2300 Fr.

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 136—137, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

136. F. Pollaczek, Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés, 122 pages. — 2500 Fr.

137. D. Dugué, Arithmétique des lois de probabilités, 50 pages. — 1000 Fr.

Mémorial des sciences physiques, fascicules 60, 63, Paris, Gauthier-Villars, 1956.

60. M. Th. Kahan, Les cavités électromagnétiques et leurs applications en radiophysique, 120 pages. — 1600 Fr.

63. K. Popoff, Les bases mathématiques de la théorie des processus thermodynamiques irréversibles, 85 pages. — 1000 Fr.

INDEX — TARTALOM

A kiadásért felelős:
Szőkefalvi-Nagy Béla
Eredeti kiadásról készült változatlan utannyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1971