

54683

54683

1178

ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE SZEGEDIENSIS
SERIES PHYSICA CHEMICA MATHEMATICA

A
JUHÁSZ GYULA
TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI



1985 AUG 1 41

SZEGED 1983



**TANULMÁNYOK
A FIZIKA, KÉMIA, MATEMATIKA
TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL**

SZENDREI JÁNOS és BÉKÉSI IMRE

közreműködésével

szerkesztette:

SIPOSNÉ KEDVES ÉVA

ISSN 0236-7742

Acta Acad. Paed. Szeged

Ser. Phys. — Chem. — Math.

1983



IMPULZUSÜZEMŰ FESTÉK-LÉZER SUGÁRZÁS POLARIZÁCIÓS TULAJDONSÁGAINAK ELMÉLETI ÉS KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA

PINTÉR FERENC—VIZE LÁSZLÓ—GÁTI LÁSZLÓ—KLEBNICZKI JÓZSEF

A jelen dolgozatban a lineárisan poláros lézertérrel gerjesztett rodamin 6G aktív közegű festék-lézer sugárzás polarizációs tulajdonságainak elméleti és kísérleti vizsgálatairól számolunk be, különös tekintettel a rotációs depolarizáció hatására az oldat viszkozitásának függvényében.

Áttekintettük a kérdéskörre vonatkozó irodalmat [1—11] és azt találtuk, hogy az elméleti polarizációfokot megadó összefüggés hibás. A kísérleti és a javított elméleti adatokat összehasonlítva az adódott, hogy $1 \cdot 10^{-4}$ mol/l koncentrációjú oldatra az egyezés jó, az $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l koncentrációjú oldatra eltérés tapasztalható. Valószínűnek tartjuk, hogy az eltérés a koncentrációs depolarizáció hatásának tulajdonítható, amelyet az elmélet nem tartalmaz.

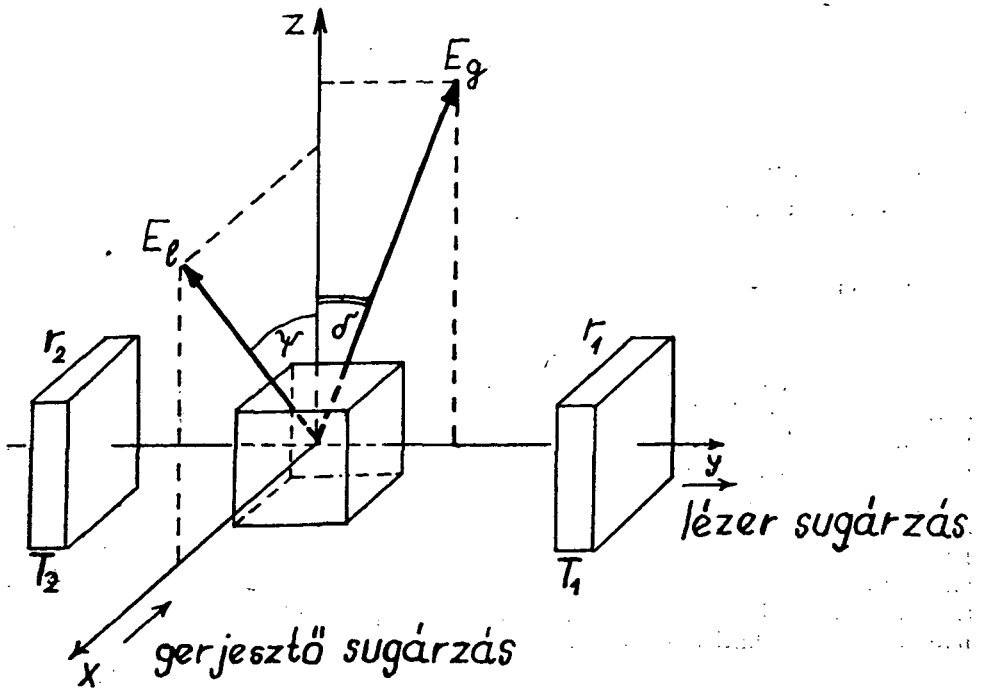
Elméleti áttekintés

A kényszerített sugárzás anizotrópiáját jellemző polarizációfok definíciója a spontán sugárzás vizsgálatánál bevezetett polarizációfok fogalmával azonos [12], ha cirkulációs polarizáció nem lép fel [24]. Meghatározásához tekintsük az 1. ábrát, ahol az $x-y$ sík a gerjesztő fény és a keletkező lézertér terjedési iránya által meghatározott sík, a z tengelyt pedig az erre a síkra merőleges egyenes adja. A gerjesztés lineárisan poláros fénytel történik az x irányában. Az ábrán a gerjesztő fény elektromos vektorának az irányát \vec{E}_y egységvektorral, a folyadéklézer-sugárzás elektromos vektorának az irányát \vec{E}_z egységvektorral jelöljük, amelyek δ , ill. Ψ szöveget zárnak be a z tengellyel. A megfigyelés során a kisugárzott fényt felbontjuk az $x-y$ síkra merőleges és azzal párhuzamos irányú lineárisan poláros komponensekre, majd megmérjük ezek I_z és I_x intenzitását. A polarizációfokot a következőképpen számítjuk ki:

$$P = \frac{I_z - I_x}{I_z + I_x} \quad (1)$$

Folyadéklézerek vizsgálata esetén az aktív közeget rövid idejű fényimpulzussal világítjuk meg. Tehát mind a gerjesztő fény intenzitása, mind a keletkező lézertér intenzitása időfüggő. A detektor az $E = \int I(t) dt$ mennyiséget méri, és a keletkező lézertér anizotrópiáját ennek megfelelően a következőképpen jellemezzük:

$$P = \frac{E_z - E_x}{E_z + E_x} \quad (2)$$



1. ábra

A polarizációs sajátosságok részletezése előtt foglalkozunk a folyadéklézerek azon tulajdonságaival, amelyekre később hivatkozni fogunk.

A folyadéklézerek aktív közegeként használt szerves festékek egyik fontos tulajdonsága, hogy molekuláinak elektron-szintjei erősen kiszélesedtek és rajtuk nagyszámú vibrációs nívó helyezkedik el. Vizsgáljuk meg a fényerősítés feltételét a legegyszerűbb, a két kiszélesedett energiaszintből álló rendszerre (ld. 2. ábra).

Haladjon át az ilyen tulajdonságú közegen $I(\nu)$ intenzitású, ν frekvenciájú fényhullám. Ha az energiasűrűség $u(\nu)$, akkor az intenzitás megváltozása dx út befutása után [13]:

$$dI(\nu) = h\nu[B_{21}(\nu)n_2 - B_{12}(\nu)n_1]u(\nu)dx, \quad (3)$$

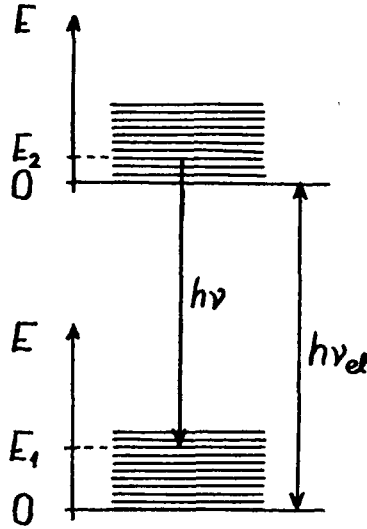
ahol h a Planck-állandó,

$B_{12}(\nu)$, ill. $B_{21}(\nu)$ — az Einstein-féle együtthatók az $1 \rightarrow 2$, ill. $2 \rightarrow 1$ indukált átmenetre,

n_1 ill. n_2 az alap, ill. a gerjesztett állapotban a térfogategységben levő molekulák száma.

Felhasználva az energiasűrűség és az intenzitás közötti

$$I(\nu) = \nu u(\nu) = \frac{c}{n_T} u(\nu) \quad (4)$$



2. ábra

kapcsolatot, (ahol v a közegbeli, c a vákuumbeli fénysebesség, n_T a közeg törésmutatója), a fenomenologikus abszorpciós törvényt kapjuk:

$$dI(v) = \frac{h\nu n_T}{c} [B_{21}(v)n_2 - B_{12}(v)n_1] I(v) dx. \quad (5)$$

Bevezetve a terület dimenziójú

$$\sigma_{21}(v) = \frac{h\nu n_T}{c} B_{21}(v) \quad \text{és} \quad \sigma_{12}(v) = \frac{h\nu n_T}{c} B_{12}(v) \quad (6)$$

hatáskeresztmetszeteket:

$$\alpha(v) \equiv \frac{1}{I(v)} \frac{dI(v)}{dx} = \sigma_{21}(v)n_2 - \sigma_{12}(v)n_1 = \sigma_{21}(v)n_2 \left(1 - \frac{\sigma_{12}(v)n_1}{\sigma_{21}(v)n_2} \right). \quad (7)$$

Abban az esetben, amikor

$$\frac{n_2}{n_1} < \frac{\sigma_{12}(v)}{\sigma_{21}(v)}, \quad (8)$$

$\alpha(v) < 0$, és a $-\alpha(v)$ -t abszorpciós együtthatónak, ha pedig

$$\frac{n_2}{n_1} > \frac{\sigma_{12}(v)}{\sigma_{21}(v)}, \quad (9)$$

akkor $\alpha(v)$ -t erősítési együtthatónak nevezzük, mivel a közegen áthaladó fény erősödik. Tegyük fel, hogy az alap és a gerjesztett állapotban levő molekulák külön-külön termikus egyensúlyban vannak, ugyanis a gerjesztés után a gerjesztett állapot élettár-

tamához (ns nagyságrendű) viszonyítva rövid idő alatt (ps nagyságrendű) beáll a termikus egyensúly. Az alap és a gerjesztett állapotban levő molekulák energiaszerinti eloszlását az $\eta_1(\varepsilon_1)$, ill. az $\eta_2(\varepsilon_2)$ Boltzmann-féle eloszlási függvényekkel adhatjuk meg melyekre fennáll, hogy:

$$n_i = \int_0^{\infty} \eta_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

Legyen $B_{21}(\nu, \varepsilon_2)$ az indukált átmeneti valószínűség a gerjesztett állapot valamely ε_2 energiájú szintjéről az alap állapot valamely szintjére. Ez az átmeneti valószínűség $B_{21}(\nu)$ -vel a következő kapcsolatban van:

$$B_{21}(\nu) = \int_0^{\infty} B_{21}(\nu, \varepsilon_2) \eta_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_2, \quad (11)$$

és ugyanígy

$$B_{12}(\nu) = \int_0^{\infty} B_{12}(\nu, \varepsilon_1) \eta_1(\varepsilon_1) d\varepsilon_1. \quad (12)$$

A hatáskeresztmetszetek aránya:

$$\frac{\sigma_{12}(\nu)}{\sigma_{21}(\nu)} = \frac{c_1 \int_0^{\infty} B_{12}(\nu, \varepsilon_1) g_1(\varepsilon_1) \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right) d\varepsilon_1}{c_2 \int_0^{\infty} B_{21}(\nu, \varepsilon_2) g_2(\varepsilon_2) \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{kT}\right) d\varepsilon_2}. \quad (13)$$

A 2. ábra alapján:

$$h\nu_{e1} = \varepsilon_1 + h\nu - \varepsilon_2. \quad (14)$$

Elvégezve az

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + h(\nu - \nu_{e1}) \quad (15)$$

helyettesítést a nevezőben levő integrálban, és figyelembe véve a

$$B_{21}(\nu, \varepsilon_2) g_2(\varepsilon_2) = B_{12}(\nu, \varepsilon_1) g_1(\varepsilon_1) \quad (16)$$

Einstein-féle összefüggést kapjuk, hogy

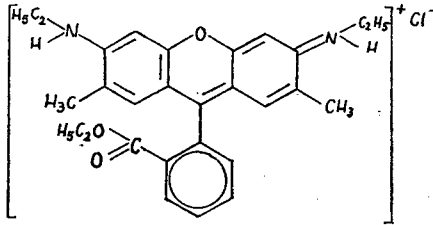
$$\frac{\sigma_{12}(\nu)}{\sigma_{21}(\nu)} = \frac{c_1}{c_2} \exp\left(\frac{h(\nu - \nu_{e1})}{kT}\right). \quad (17)$$

Az erősítés feltétele tehát (9) alapján a következő:

$$\frac{n_2}{n_1} > \frac{c_1}{c_2} \exp\left(\frac{h(\nu - \nu_{e1})}{kT}\right). \quad (18)$$

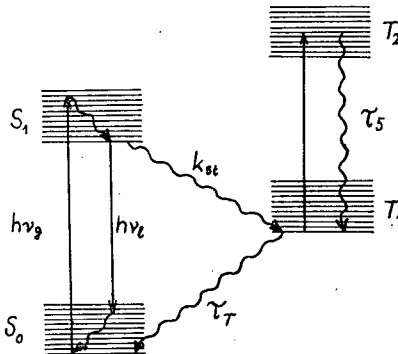
Az erősítési feltétel teljesüléséhez nem szükséges, hogy invertált állapotban legyen a rendszer, azaz n_2 nagyobb legyen n_1 -nél. Ahhoz, hogy nagy erősítést lehessen elérni, olyan molekulák szükségesek, amelyekre $\sigma_{21}(\nu)$ és $\nu_{e1} - \nu$ nagy, azaz olyanok, amelyeknek széles a fluoreszcencia-sávjuk. Ezeket a feltételeket jól kielégítik a szerves festék-molekulák.

Szerves festékeknek olyan szerves vegyületeket nevezünk [14], amelyeknek erős abszorpciós sávja van az ultravioleta és a közeli infravörös spektrumtartomány között. Ezek nagyszámú atomot tartalmazó bonyolult molekulák, melyek egyszerű- és kettőskötések rendszerét tartalmazzák. (A 3. ábra a rodamin 6G szerkezeti képletét mutatja.)



3. ábra

Egy tipikus szerves festékmolekula energiaszintjei a 4. ábrán láthatók. Minden elektronszint a vibrációs szintek kvázifolytonos sávjából áll. (Az ábrán a folytonos nyilak az optikai, a hullámosak a sugárzás nélküli átmeneteket jelölik.)



4. ábra

Az alábbiakban röviden ismertetjük azokat a mérlegegyenleteket, amelyek segítségével leírhatók az energiaszintek populációinak időbeli változásai [15].

Először számítsuk ki, hogy a $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ hullámhosszintervallumban az m -edik módusban a fotonok teljes N_m száma hogyan változik. Minden módusban a spontán emisszóban részt vevő fotonok számának növekedési sebessége $N_2 E(\lambda) d\lambda / \tau$, ahol N_2 az S_1 első szingulett gerjesztett állapotban levő molekulák teljes száma, τ ennek az állapotnak az átlagos élettartama, $E(\lambda)$ az ún. vonalakfüggvény, melyre $\int E(\lambda) d\lambda = \phi$, ahol ϕ a kvantumhatásfok. Ha V a rezonátor teljes módustérfogata, akkor a $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ hullámhosszintervallumba eső módusok száma:

$$\frac{8\pi n^3 V d\lambda}{\lambda^4}$$

(ahol n_T a közeg törésmutatója). Így a fotonok számának növekedése a spontán emisszió következtében az m -edik módusban:

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{N_2 \lambda^4 E(\lambda)}{8\pi n_T^3 \tau V}. \quad (19)$$

Mivel az indukált és a spontán átmenet átmeneti valószínűségének az aránya a térfogategységben levő fotonokkal egyezik meg, a spontán és az indukált emisszió során kibocsátott fotonok teljes megváltozása az m -edik módusban:

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{N_2 \lambda^4 E(\lambda) (N_m + 1)}{8\pi n_T^3 \tau V}. \quad (20)$$

Ha F -fel jelöljük az aktív közeg által elfoglalt módustérfogatnak és a rezonátor teljes módustérfogatának az arányát, akkor $N_2 = F V n_2$, ahol n_2 a térfogategységben levő molekulaszámot jelenti. Bevezetve a

$$\sigma(\lambda) = \frac{\lambda^4 E(\lambda)}{8\pi n_T^2 c \tau} \quad (21)$$

erősítési hatáskeresztmetszetet, a (20) alatti egyenlet a következő alakú lesz:

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{F n_2 \sigma(\lambda) c (N_m + 1)}{n_T}. \quad (22)$$

Hasonlóan írhatjuk fel az m -edik módusban levő fotonok számának megváltozását a szingulett-szingulett és a triplett-triplett abszorpció miatt:

$$\frac{dN_m}{dt} = -[n_{TR} \sigma_{TT}(\lambda) + n_1 \sigma_{SS}(\lambda)] \frac{c F N_m}{n_T}, \quad (23)$$

ahol n_{TR} és n_1 — a triplett és a szingulett alapállapot molekulásűrűsége,
 σ_{TT} és σ_{SS} — a triplett-triplett és a szingulett-szingulett abszorpció hatáskeresztmetszete.

Bevezethető egy τ_m átlagos élettartam, mely azt jellemzi, hogy az m -edik módusban levő fotonok száma az optikai elemeken történő diffrakció és transzmisszió következtében csökken:

$$\frac{dN_m}{dt} = -\frac{N_m}{\tau_m}. \quad (24)$$

Az m -edik módusban levő fotonok számának megváltozása tehát:

$$\frac{dN_m}{dt} = N_m \left[(n_2 \sigma(\lambda) - n_{TR} \sigma_{TT}(\lambda) - n_1 \sigma_{SS}(\lambda)) \frac{c F}{n_T} - \frac{1}{\tau_m} \right] + \frac{c F n_2 \sigma(\lambda)}{n_T}. \quad (25)$$

A gerjesztett szingulett, továbbá a triplett alap- és a triplett gerjesztett állapotban levő molekulák számát leíró egyenletek:

$$\frac{dN_2}{dt} = W_2 N_1 - \frac{N_2}{\tau} - \sum_m \frac{N_2 N_m \sigma(\lambda) c}{V n_T} + \sum_m \frac{N_1 N_m \sigma_{SS}(\lambda) c}{V n_T}, \quad (26)$$

$$\frac{dN_{TR}}{dt} = k_{S_1}N_2 - \frac{N_{TR}}{\tau_T} - \sum_m \frac{N_{TR}N_m\sigma_{TT}(\lambda)c}{Vn_T} + \frac{N_5}{\tau_5}, \quad (27)$$

$$\frac{dN_5}{dt} = \sum_m \frac{N_{TR}N_m\sigma_{TT}(\lambda)c}{Vn_T} - \frac{N_5}{\tau_5}, \quad (28)$$

$$N = N_1 + N_2 + N_{TR} + N_5, \quad (29)$$

ahol W_2 az N_g gerjesztő foton számmal a gerjesztés frekvenciáján és az $S_0 \rightarrow S_1$ átmenet hatáskeresztmetszetével a következő kapcsolatban van:

$$W_2 = \frac{N_g\sigma_{SS}(\lambda_g)c}{Vn_T}, \quad (30)$$

továbbá $1/k_{S_1}$ az $S_1 \rightarrow T_1$ átmenet átlagos élettartama, τ_T ill. τ_5 a triplett alapállapot és a triplett gerjesztett állapot átlagos élettartama.

A (26) egyenletnek az első tagja az optikai gerjesztést, a második a sugárzásos spontán átmenetet, ill. a triplett állapotok felé történő sugárzás nélküli átmenetet, a harmadik az indukált átmenetet, a negyedik az abszorpciót írja le.

Áttérve a részecskekonzentrációra, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{dn_m}{dt} = n_m \left[(n_2\sigma(\lambda) - n_{TR}\sigma_{TT}(\lambda) - n_1\sigma_{SS}(\lambda)) \frac{Fc}{n_T} - \frac{1}{\tau_m} \right] + \frac{Fc n_2 \sigma(\lambda)}{n_T V} \quad (31)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = w_2 n_1 - \frac{n_2}{\tau} - \sum_m \frac{n_2 n_m \sigma(\lambda) c}{n_T} + \sum_m \frac{n_1 n_m \sigma_{SS}(\lambda) c}{n_T}, \quad (32)$$

$$\frac{dn_{TR}}{dt} = k_{S_1} n_2 - \frac{n_{TR}}{\tau_T} - \sum_m \frac{n_{TR} n_m \sigma_{TT}(\lambda) c}{n_T} + \frac{n_5}{\tau_5}, \quad (33)$$

$$\frac{dn_5}{dt} = \sum_m \frac{n_{TR} n_m \sigma_{TT}(\lambda) c}{n_T} - \frac{n_5}{\tau_5}, \quad (34)$$

$$n = n_1 + n_2 + n_{TR} + n_5, \quad (35)$$

ahol

$$w_2 = \frac{W_2}{V}. \quad (36)$$

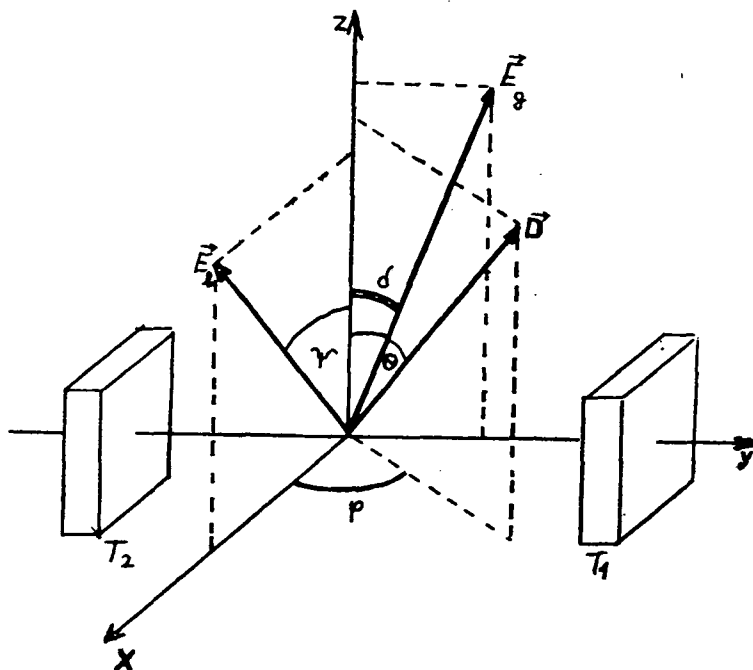
Az egyenletrendszer láthatóan igen bonyolult (nem lineáris) és a módusok száma igen nagy lehet. A számítógépes megoldásoknál is bizonyos közelítéseket használunk (pl. a triplett állapot hatását egy veszteségi együtthatóval írjuk le, csak kétszintes rendszerre számolunk ld. pl. [16]). Ezen számítások eredményeire a megfelelő helyen később visszatérünk.

Az erősítési együttható dikroizmusa stacionárius esetben

A lumineszcencia kutatásából ismert, hogy ha egy közeget — amelynek sugárzó centrumait lineáris oszcillátoroknak tekintjük — lineárisan poláros fényvel besugárzunk, akkor polarizációs jelenségeket figyelhetünk meg. Ennek az az oka, hogy azok

az oszcillátorok, amelyeknek a tengelye kisebb szöget zár be a beeső fény elektromos vektorának az irányával, nagyobb valószínűséggel gerjesztődnek, mint a többiek. A gerjesztett részecskék irányeloszlásában anizotrópia lép fel, amely egy bizonyos idő elteltével a molekulák egymás közötti kölcsönhatása és a Brown-mozgás következtében megszűnik. Feltételezhető, hogy ehhez hasonló jelenség történik, amikor a festszéklézert lineárisan poláros lézerténnel gerjesztjük. A gerjesztett molekulák irány szerinti eloszlásának anizotrópiájából várható, hogy az erősítési együttható értéke függ mind a gerjesztő fény, mind a folyadéklézer által kibocsátott fény elektromos vektorának az irányától, ez utóbbi jelenséget dikroizmusnak nevezzük.

A továbbiakban meghatározzuk az erősítési együttható értékét a különböző irányokban. A molekulákat lineáris oszcillátoroknak tekintjük, amelyek iránya rögzített. Feltételezzük, hogy a molekula termrendszerre mindössze két kiszélesedett sávból áll. A gerjesztést u_g [16—17] energiasűrűségű, lineárisan poláros lézerténnel végezzük a folyadéklézer optikai tengelyére merőleges irányban, amelynek az \vec{E}_g irányú elektromos vektora a z tengellyel δ szöget zár be (5. ábra). Az ábrán a \vec{D} egységvektor a molekula dipólusmomentumának az irányát jelöli, melyet térbeli polárkoordináta-rendszerben a Θ és a φ szög határoz meg. \vec{E}_l a folyadéklézer-sugárzás elektromos vektorának az irányát megadó egységvektor, mely a z tengellyel Ψ szöget zár be.



5. ábra

A k erősítési együttható egy tetszőleges Ψ irányban valamely frekvencián (5)-nek megfelelően a következő lesz:

$$k(\Psi) = \frac{h\nu}{v} \int_{\Omega} b_{21}(\vec{E}_1, \vec{D}) n_2(\Theta, \varphi) d\Omega, \quad (37)$$

ahol $b_{21}(\vec{E}_1, \vec{D})$ — a differenciális Einstein-féle átmeneti valószínűség, mely megadja annak a valószínűségét, hogy időegység alatt egységnyi térerősség esetén a \vec{D} irányba mutató dipólusmomentumú molekula az \vec{E}_1 irányban polarizált fotont sugároz ki indukált átmenet révén,

$n_2(\Theta, \varphi) d\Omega$ — jelenti a térfogategységben levő azon gerjesztett molekulák számát, amelyek dipólusmomentuma a (Θ, φ) irányú $d\Omega$ nagyságú térszögbe esik. A gerjesztett állapotban levő molekulák szögeloszlásának a meghatározásához a (25—29) típusú differenciálegyenletrendszert kell megoldani.

Stacionárius esetben az erősítési együtthatóra a következő kifejezés adódik:

$$k(\Psi) = \kappa_{21}(\nu_l) [\beta \sin^2 \Psi + (\beta \sin^2 \delta + \gamma \cos^2 \delta) \cos^2 \Psi], \quad (38)$$

ahol $\kappa_{21}(\nu_l)$ — az ún. határerősítési együttható.

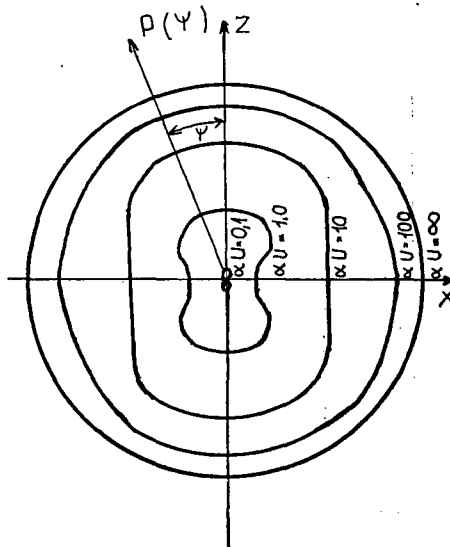
A bevezetett β és γ együtthatók a gerjesztő fény energiasűrűségétől függenek:

$$\beta = 1 + \frac{3}{2\alpha u_g} - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{(\alpha u_g)^{3/2}} + \frac{1}{(\alpha u_g)^{1/2}} \right] \text{arc tg } (\alpha u_g)^{1/2}, \quad (39)$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{\alpha u_g} + \frac{1}{(\alpha u_g)^{3/2}} \text{arc tg } (\alpha u_g)^{1/2}. \quad (40)$$

Merőleges gerjesztés esetén ($\delta=0^\circ$):

$$k(\Psi) = \kappa_{21}(\nu_l) (\beta \sin^2 \Psi + \gamma \cos^2 \Psi). \quad (41)$$



6. ábra

Az erősítési együttható értékét erre az esetre vonatkozóan a 6. ábra mutatja különböző gerjesztő energiasűrűségeknél.

A dikroizmus mértékét a következő mennyiséggel jellemezzük:

$$D_k = \frac{k^{\max} - k^{\min}}{k^{\max} + k^{\min}}. \quad (42)$$

Merőleges gerjesztésnél:

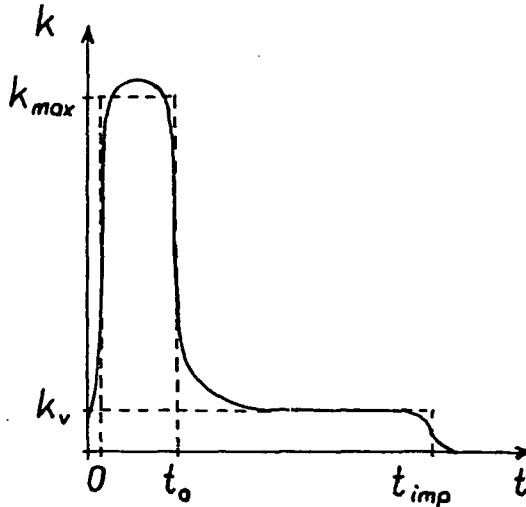
$$D_k = \frac{k(\Psi = 0^\circ) - k(\Psi = 90^\circ)}{k(\Psi = 0^\circ) + k(\Psi = 90^\circ)} = \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta}. \quad (43)$$

Az erősítési együttható dikroizmusának a fogalmával könnyen interpretálhatók a lézersugárzás anizotrópiájára vonatkozó eredmények. Mivel a generálás feltétele a legjobban az erősítési együttható maximális értékénél teljesül, a dikroizmus nagysága és a kibocsátott fény polarizációfoka között szoros kapcsolat van.

Az erősítési együttható időfüggésének közelítése

A folyadéklézer fényének polarizációfokát a gerjesztés anizotrópiája mellett befolyásolhatja az erősítési együttható nagysága is.

A ftalimidszármazékokon végzett mérések azt mutatják, hogy a gerjesztő lézertény intenzitásának a növelésével nő a folyadéklézer sugárzásának a polarizációfoka is [9]. Figyelembe véve a folyadéklézer működésének nemstacionárius jellegét, a generálás kezdetén az erősítési együttható igen nagy, és lényegesen meghaladja a veszteségi együtthatót. Ez a rövid ideig tartó impulzussal (20–40 ns) történő gerjesztéskor áll fenn. A [18] dolgozatban számítást találunk az erősítési együttható időfüggésére, melyet a mérlegegyenletek megoldásával kaptak. Egy tipikus időfüggés a 7. ábrán látható. A görbét a következő függvényvel közelítjük [19]:



7. ábra

$$k(\Psi) = \begin{cases} \text{áll.}, & \text{ha } 0 < t < t_0, \\ k_v, & \text{ha } t_0 < t < t_{\text{imp}}. \end{cases} \quad (44)$$

A két időintervallumon az erősítési együttható értéke állandó, az elsőn meghaladja a k_v veszteségi együtthatót, a másodikon pedig megegyezik vele.

Célunk most is a (37)-ben bevezetett $k(\Psi)$ meghatározása a két időintervallumra.

Az $n_2(\Theta, \varphi)$ számításához feltételezzük, hogy az alapállapotban levő molekulák dipólusmomentumának az iránya a tér minden irányában egyenletesen oszlik el. Így a gerjesztett állapotban levő molekulák számának a változása egy (Θ, φ) irányú térszögben:

$$\frac{dn_2(\Theta, \varphi)}{dt} = \frac{n_1}{4\pi} b_{12}(\vec{E}_g, \vec{D}) u_g - n_2(\Theta, \varphi) A_{21} - \sum_m n_2(\Theta, \varphi) b_{21}(\vec{E}_l, \vec{D}) u_{lm} \quad (45)$$

Az utolsó tagot elhagyjuk, mivel $n_2 \ll n_1$, és a generált sugárzás energiasűrűsége kezdetben kicsi a gerjesztő sugárzás energiasűrűségéhez képest (az egyenletet csak a $(0, t_0)$ intervallumra alkalmazzuk), így módon:

$$\frac{dn_2(\Theta, \varphi)}{dt} = \frac{n_1}{4\pi} b_{12}(\vec{E}_g, \vec{D}) u_g - n_2(\Theta, \varphi) A_{21}. \quad (46)$$

A (46) egyenlet megoldása:

$$n_2(\Theta, \varphi) = \frac{n_1}{4\pi} \frac{b_{12}(\vec{E}_g, \vec{D}) u_g}{A_{21}} [1 - \exp(-A_{21}t)]. \quad (47)$$

A gerjesztett állapotban levő molekulák maximális számát $t \rightarrow \infty$ -nél kapjuk, azaz

$$n_2(\Theta, \varphi) = \frac{3n_1}{4\pi} \frac{\bar{B}_{12}(v_g) u_g \cos^2(\vec{E}_g, \vec{D})}{A_{21}}. \quad (48)$$

Ezzel az erősítési együttható értéke:

$$k(\Psi) = \frac{9}{4\pi} \frac{h\nu_l}{v} \frac{\bar{B}_{21}(v_l) \bar{B}_{12}(v_g)}{A_{21}} n_1 u_g \int_{\Omega} \cos^2(\vec{E}_g, \vec{D}) \cos^2(\vec{E}_l, \vec{D}) d\Omega. \quad (49)$$

A számításokat elvégezve adódik, hogy

$$k(\Psi) = \frac{k_{\text{max}}}{3} (1 + 2 \cos^2 \delta \cos^2 \Psi), \quad (50)$$

ahol

$$k_{\text{max}} = \frac{3}{10} \frac{h\nu_l}{v} \frac{\bar{B}_{21}(v_l) \bar{B}_{12}(v_g)}{A_{21}} n_1 u_g. \quad (51)$$

A folyadéklézer-sugárzás polarizációfokának meghatározásánál az (50) egyenletben k_{max} értékét, illetve a nemstacionárius folyamat t_0 idejét fogjuk variálni.

A rotációs depolarizáció hatása

Az eddigi számítások mereven rögzített molekuláris oszcillátorrendszerre történtek. A kísérletekből azonban kitéjük [9, 20], hogy a polarizációfok általában függ a viszkozitástól és a hőmérséklettől. A molekulák Brown-mozgásából származó elfordulása csökkenti a gerjesztés anizotrópiáját, ami a polarizációfok csökkentéséhez vezet. A rotációs depolarizáció elméletét F. Perrin dolgozta ki [21], és kimutatta, hogy a gerjesztett állapotban levő molekula átlagos elfordulási szögére (ξ) a következő kifejezés áll fenn:

$$\overline{\sin \xi} = \frac{4K\tau}{6K\tau + 1}, \quad (52)$$

ahol

$$K = \frac{kT}{6V\eta}, \quad (53)$$

- k — a Boltzmann-állandó,
- V — a molekula effektív térfogata a szolvátburokkal együtt,
- T — az abszolút hőmérséklet,
- η — az oldat viszkozitása,
- τ — a gerjesztett állapot élettartama.

Eme jelenségek figyelembe vétele a lumineszcencia elméletében látotthoz hasonlóan történik [12].

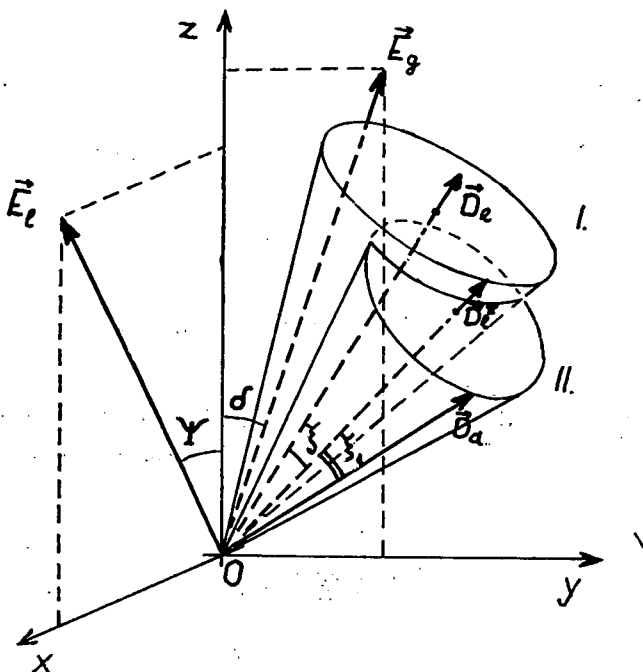
Számítás eltérő irányú abszorpció és emissziós oszcillátorokra

A bonyolult molekulák esetén előfordul, hogy a gerjesztés után a molekula egy sugárzás nélküli átmenet után átrendeződik, aminek az lesz a következménye, hogy az emisszióhoz rendelhető oszcillátor iránya nem egyezik meg az abszorpcióhoz rendelhető oszcillátor irányával. Jelöljük a két irány közötti szöget ξ_1 -gyel, és tételezzük fel, hogy a gerjesztett molekula a Brown-féle mozgás következtében ξ szöggel elfordul.

Vizsgáljunk egy tetszőleges \bar{D}_e irányú emittáló dipólust. Azok a dipólusok fognak ilyen irányban emittálni, amelyeknek a \bar{D}_e^* irányú emissziós dipólusai a \bar{D}_e tengelyű, ξ nyílásszögű I. kúp felületén voltak a Brown-mozgást megelőzően (8. ábra). A \bar{D}_e^* irányban pedig azok az emittáló oszcillátorok lesznek, amelyek abszorbeáló \bar{D}_e oszcillátorai a \bar{D}_e^* tengelyű, ξ_1 nyílásszögű II. kúp felületén vannak. Az átlagolást tehát most nemcsak az I. kúp felületére kell elvégezni, hanem ezen kívül a II.-re is.

A $k(\Psi)$ -re adódik, hogy

$$k(\Psi) = \frac{9}{4\pi} \frac{h\nu_l}{v} \frac{\bar{B}_{21}(\nu_l) \bar{B}_{12}(\nu_g)}{A_{21}} n_1 u_g \times \int \cos^2(\bar{E}_l, \bar{D}_e) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\bar{E}_g, \bar{D}_e) d\eta_1 d\eta_2 d\Omega. \quad (54)$$



8. ábra

Elvégezve az integrálást (54)-ben η_1 és η_2 -re, a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 k(\Psi) = & \frac{9}{4\pi} \frac{h\nu_l}{v} \frac{\bar{B}_{21}(\nu_l)\bar{B}_{12}(\nu_g)}{A_{21}} n_1 u_g \int \cos^2(\vec{E}_l, \vec{D}_e) [(\overline{\cos^2 \xi} \overline{\cos^2 \xi_1} + \frac{1}{2} \overline{\sin^2 \xi} \overline{\sin^2 \xi_1}) \times \\
 & \times (\sin^2 \delta \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \delta \cos^2 \Theta) + \\
 & + (\frac{1}{2} \overline{\sin^2 \xi} \overline{\cos^2 \xi_1} + \frac{1}{4} \overline{\cos^2 \xi} \overline{\sin^2 \xi_1} + \frac{1}{4} \overline{\sin^2 \xi_1}) (\sin^2 \delta \cos^2 \Theta \cos^2 \varphi + \\
 & + \cos^2 \delta \sin^2 \Theta + \sin^2 \delta \sin^2 \varphi)] d\Omega.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Integrálva (55)-öt az egységgömb teljes felületére a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
 k(\Psi) = & \frac{1}{60} \frac{h\nu_l}{v} \frac{\bar{B}_{21}(\nu_l)B_{12}(\nu_g)}{A_{21}} n_1 u_g [10 - (2 - 3 \overline{\sin^2 \xi})(2 - 3 \overline{\sin^2 \xi_1}) + \\
 & + 3(2 - 3 \overline{\sin^2 \xi})(2 - 3 \overline{\sin^2 \xi_1}) \cos^2 \delta \cos^2 \Psi].
 \end{aligned} \tag{56}$$

$\xi_1 = 90^\circ$ esetében merőleges emissziós és abszorpciós dipólusokra:

$$k(\Psi) = \frac{k_{\max}}{4} [4 - \overline{\sin^2 \xi} - (2 - 3 \overline{\sin^2 \xi}) \cos^2 \delta \cos^2 \Psi], \tag{57}$$

ahol

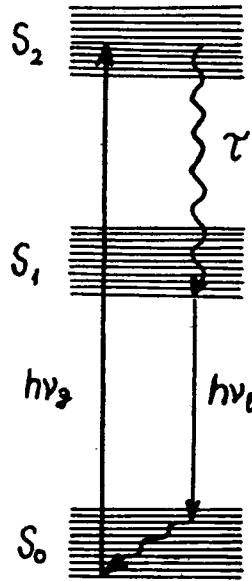
$$k_{\max}^{\perp} = k(\xi = 0^{\circ}, \Psi = 90^{\circ}) = \frac{1}{5} \frac{h\nu_l}{\nu} \frac{\bar{B}_{21}(\nu_l) \bar{B}_{12}(\nu_g)}{A_{21}}. \quad (58)$$

Az erősítési együttható értéke a $\Psi = 90^{\circ}$ -os irányra maximális és a $\Psi = 0^{\circ}$ -os irányra minimális:

$$k(\Psi = 90^{\circ}) = \frac{k_{\max}^{\perp}}{4} (4 - \overline{\sin^2 \xi}), \quad (59)$$

$$k(\Psi = 0^{\circ}) = \frac{k_{\max}^{\perp}}{4} (2 + 2 \overline{\sin^2 \xi}). \quad (60)$$

A kísérlet során a rodamin 6G molekulákat az S_2 szintre gerjesztettük, ahonnan sugárzás nélküli átmenettel az S_1 szintre kerültek (9. ábra). A két energiaszinthez tartozó abszorpciós és emissziós dipólusok merőlegességek egymásra, így a számításnál az (57) összefüggést kell használnunk.



9. ábra

A kisugárzott lézertény polarizációfokának meghatározása [22]

Az $u_0(\Psi)$ energiasűrűségű sugárzás az aktív közegben x utat megtéve

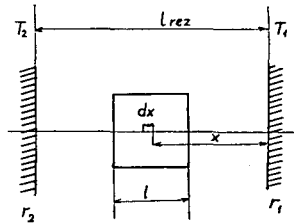
$$u(\Psi) = u_0(\Psi) \exp [(k(\Psi) - k_v) x] \quad (61)$$

értékre változik.

Vezessük be a t_c ciklusidőt, amely azt az időt jelenti, amely alatt a fénysugár oda-vissza megteszi a két rezonátortükröz közötti utat. A ciklusok száma:

$$m = \frac{t}{t_c}. \quad (62)$$

Tegyük fel, hogy az $(x, x+dx)$ hosszúságtartományban az aktív közegben a $t=0$ időpillanatban jelen van egy $u_0(\Psi)$ térfogati energiasűrűségű jobbra haladó, és egy $u_0(\Psi)$ energiasűrűségű balra haladó hullám a spontán sugárzás következtében [ld. 10. ábra]. Ez a sugárzás fog felerősödni a kényszerített átmenetek révén.



10. ábra

Tekintsük a jobbra haladó hullámot. x út megtétele után $u_0(\Psi)$ felerősödik a következő értékre:

$$u_1 = u_0(\Psi) \exp(k'x) dx, \quad (63)$$

ahol

$$k' = k(\Psi) - k_v, \quad (64)$$

kijutva az aktív közegből gyakorlatilag nem változik, majd az r_1 reflexiójú T_1 tükörről visszaverődik:

$$u_2 = r_1 u_0(\Psi) \exp(k'x) dx, \quad (65)$$

és kilép a rezonátorból:

$$u_3 = (1 - r_1) u_0(\Psi) \exp(k'x) dx. \quad (66)$$

u_2 az aktív közegen végighaladva erősödik, majd az r_2 reflexiójú T_2 tükörről visszaverődve az x pontban — tehát az első ciklus befejeztével — nagysága a következő lesz:

$$u_4 = r_1 r_2 u_0(\Psi) \exp(k'x) \exp(k'l) \exp[k'(l-x)] dx = u_0(\Psi) q dx, \quad (67)$$

ahol

$$q = r_1 r_2 \exp(2k'l). \quad (68)$$

Mivel x 0-tól l -ig változhat, az első ciklus végéig az egységnyi keresztmetszeten kilépett energia:

$$u_{k+1} = \int_0^l (1 - r_1) u_0(\Psi) \exp(k'x) dx = (1 - r_1) u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'}. \quad (69)$$

Utána ugyanezt a számolást előlről kell kezdeni, de $u_0(\Psi)$ helyett $qu_0(\Psi)$ áll. Az m -edik ciklus után a kilépett energia:

$$u_{ki\ m} = (1 - r_1)u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} q^{m-1}, \quad (70)$$

és az x pontban a jobbra haladó hullám egységnyi keresztmetszetre és dx hosszúságra eső energiája:

$$u_{jm} = u_0(\Psi) q^m dx. \quad (71)$$

Ugyanígy számíthatjuk a balra haladó hullám energiáját is. Az m -edik ciklus végén a kilépett energia (egységnyi felületről):

$$u'_{ki\ m} = (1 - r_1)u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} r_2 \exp(k'l) q^{m-1}, \quad (72)$$

és a (69)-el analóg egyenlet a balra haladó hullámra:

$$u_{bm} = u_0(\Psi) q^m dx. \quad (73)$$

Az egységnyi felületről kilépett összes energia az m -edik ciklus végéig az egyes ciklusokban kijutottak összege:

$$\begin{aligned} u_{nst}(\Psi) &= (1 - r_1)u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} \sum_{i=1}^m q^{i-1} + \\ &+ (1 - r_1)u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} r_2 \exp(k'l) \sum_{i=1}^m q^{i-1} = \\ &= (1 - r_1)u_0(\Psi) \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} [1 + r_2 \exp(k'l)] \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}. \end{aligned} \quad (74)$$

Ez addig a t_0 időpontig tart, amíg a fénysugár erősödik (azaz $k(\Psi) > k_v$). A stacionárius folyamatok ideje alatt az intenzitás már nem változik. Az $(x, x + dx)$ szakaszon megmarad az $u_0(\Psi) q^m dx$ energiájú jobbra, illetve az ugyanekkora energiájú balra haladó hullám. Ha a stacionárius szakaszban a ciklusok száma m_c , akkor a (t_0, t_{imp}) intervallumban az egységnyi felületről kilépő sugárzás energiája:

$$u_{st} = m_c \int_0^l u_0(\Psi) q^m (1 - r_1) (1 + r_2) dx = m_c u_0(\Psi) q^m (1 - r_1) (1 + r_2) l. \quad (75)$$

Az egységnyi felületről kilépő összes energia tehát a Ψ irányban (74) és (75) összege:

$$\begin{aligned} W(\Psi) &= u_0(\Psi) (1 - r_1) \left\{ \frac{\exp(k'l) - 1}{k'} [1 + r_2 \exp(k'l)] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1} + m_c q^m (1 + r_2) l \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

A $W(\Psi)$ értéke meghatározható, ha kiszámítjuk a spontán lumineszcencia $u_0(\Psi)$ energiasűrűségét.

Válasszunk ki az oszcillátorrendszerből (mely alapállapotban minden irányban egyenletesen sűrűn oszlik el) egy tetszőleges dipólust. Az \vec{E}_g gerjesztő fény hatására az oszcillátorban rezgések jönnek létre, melyek amplitúdója:

$$A = aE_g \cos(\vec{E}_g, \vec{D})$$

(a — arányossági tényező).

Ennek vetülete a megfigyelés $\vec{e} = (0, \sin \Psi, \cos \Psi)$ irányára:

$$A_e = aE_g \cos(\vec{E}_g, \vec{D}) \cos(\vec{e}, \vec{D}). \quad (77)$$

A rezgés energiája az \vec{e} irányban:

$$cA_e^2 = ca^2 E_g^2 \cos^2(\vec{E}_g, \vec{D}) \cos^2(\vec{e}, \vec{D}). \quad (78)$$

Integráljunk a teljes oszcillátorrendszerre:

$$u_0(\Psi) = ca^2 E_g^2 \int_{\Omega} \cos^2(\vec{E}_g, \vec{D}) \cos^2(\vec{e}, \vec{D}) d\Omega = \frac{u_{0\max}}{3} (1 + 2 \cos^2 \delta \cos^2 \Psi). \quad (79)$$

Ha figyelembe vesszük a Brown-féle forgást, akkor az előző fejezetekben leírtakkal azonos módon kapjuk:

$$u_0(\Psi) = \frac{u_{0\max}}{3} [1 + \overline{\sin^2} \xi + (2 - 3 \overline{\sin^2} \xi) \cos^2 \delta \cos^2 \Psi]. \quad (80)$$

Ha a gerjesztés a második abszorpciós sávba történik, és az abszorpciós és emissziós dipólusok 90°-os szöget zárnak be egymással, akkor:

$$u_0(\Psi) = \frac{u_{0\max}}{4} [4 - \overline{\sin^2} \xi - (2 - 3 \overline{\sin^2} \xi) \cos^2 \delta \cos^2 \Psi]. \quad (81)$$

Ezzel a $W(\Psi)$ függvényt kiszámítottuk, és ismeretében a kibocsátott sugárzás P polarizációfoka is megadható:

$$P = \frac{E_z - E_x}{E_z + E_x}, \quad (82)$$

ahol

$$E_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} W(\Psi) \cos^2 \Psi d\Psi, \quad (83)$$

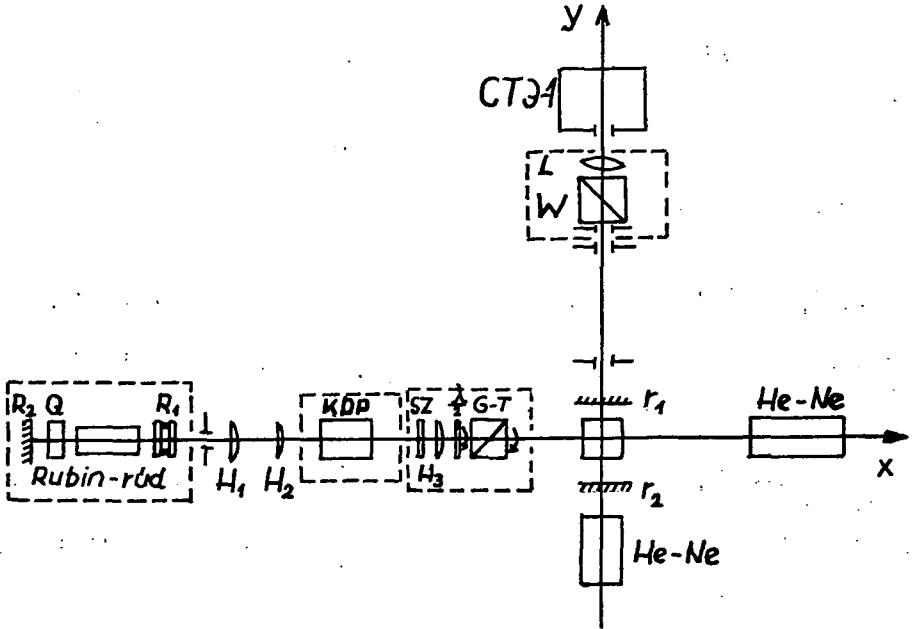
illetve

$$E_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} W(\Psi) \sin^2 \Psi d\Psi. \quad (84)$$

A számítást rodamin 6G alkoholos oldatára végeztük el.

A mérőberendezés

A kísérleti berendezés vázlatát a 11. ábra mutatja. Az x - és y -tengely metszéspontjában helyeztük el a vizsgált folyadéklézer aktív anyagát tartalmazó küvetát, az x -tengely mentén helyezkedik el a gerjesztő fényt előállító rendszer. Az y -tengely mentén az analízátor és a detektor nyert elhelyezést.



11. ábra

A gerjesztő fényforrás legfontosabb része egy nagyteljesítményű monoimpulzus üzemben működő rubinlézer.

A gerjesztésre két darab ИФП—2000 típusú villanólámpát használtunk, amelyeket sorba kapcsoltunk. Ezeket nagy reflexiójú alumíniumköpeny foglalja magába, amely a gerjesztő fényt az aktív közegre reflektálja. A rezonátort úgy alakítottuk ki, hogy térfogata a lehető legkisebb legyen. A fényforrás hővé alakult energiáját levegő átfújásával vezettük el.

A két villanólámpa tápegysége egy $475 \mu\text{F}$ kapacitású és $2,95 \text{ kV}$ feszültségre feltöltött kondenzátor. A rendszer időállandóját a kisülési kör önindukciójának változtatásával úgy állítottuk be, hogy a teljes impulzusidő 1 ms legyen, az impulzus felfutási ideje pedig $0,15\text{--}0,20 \text{ ms}$.

A rubinlézer által kibocsátott energia a kondenzátorra adott feszültség növelésével kb. 8 joule -ig növelhető normál üzemmódban.

A rezonátortükröket (R_1 , R_2) egymástól 40 cm távolságra helyeztük el. A rubinlézer hullámhosszán a zárótükrő $R_2=99\%$ reflexiójú. Kicsatoló tükrő helyett 2 db planparallel üveglemezt alkalmaztunk, melyek egymástól $0,3\text{--}0,5 \text{ cm}$ távolságra voltak. Ennek az üveglemezsorozatnak a reflexiója kb. $R_1=30\%$.

A rubinlézereből kilépő kb. 1 joule energiájú és ~ 20 ns félértékszélességű sugárzás egy 15 mm átmérőjű kördiafragmán át két hengerlencsén (H_1 , H_2) halad keresztül. A hengerlencséket úgy állítottuk be, hogy a rubinlézereből kilépő nyalábot 15 mm magasságú és 4—5 mm szélességű párhuzamos sugárrá alakítsa. Így elegendő energiasűrűség állítható elő a frekvenciakétszerező KDP-kristály működéséhez, amely azt teszi lehetővé, hogy a gerjesztés a 347,15 nm hullámhosszú fényel történjen.

A kristályt követő elem (Sz) egy UG—1 típusú szűrő, amely elnyeli a rubin-lézer 694,3 nm hullámhosszú fényét, és gyakorlatilag csak a felharmonikus sugár jut tovább. Ennek az energiája kb. 0,02 joule. A két korábbi hengerlencse tengelyére merőlegesen állítottuk be a harmadik hengerlencsét (H_3), amely 8 mm hosszú egyenessé fókuszálja a nyalábot a küvetta belső falára.

A KDP-kristályból kilépő, függőleges síkban lineárisan poláros fény elektromos vektorát úgy forgatjuk el az optikai tengely körül, hogy egy optikailag aktív $\frac{\lambda}{2}$ kvarclemezt helyeztünk el a szűrő után.

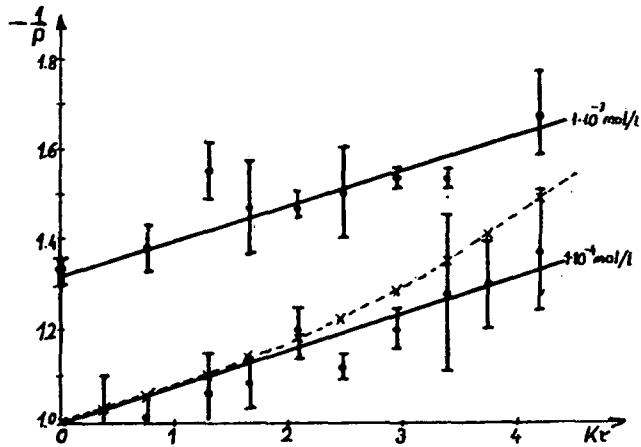
A kvarclemezből kilépő fény elliptikusan poláros és a polarizációs ellipszis alakja, valamint tengelyeinek iránya függ α -tól. Ez a fény egy (G—T) Glan—Thompson-prizmán áthaladva ismét lineárisan poláros lesz olyan síkban, ahogyan a prizma mint analizátor ezt megengedi. A Glan—Thompson-prizma elforgatásával a sugárzás polarizációs síkja is elfordul. Annak érdekében, hogy a különböző irányokban az elektromos vektor nagysága ne változzon meg, a $\frac{\lambda}{2}$ lemezt is el kell fordítanunk ahhoz, hogy a polarizációs ellipszis alakja és helyzete megváltozzon. Az elforgatások szögeit $\delta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -ra kísérletileg meghatároztuk.

A vizsgált folyadéklézer adatai: az aktív anyagot (rodamin 6G etilalkoholos oldatot) tartalmazó küvetta 1,000 cm \cdot 1,000 cm keresztmetszetű kvarc-küvetta. A sík rezonátortükrök távolsága 10 cm, reflexiójuk pedig 99%, ill. 80%. A folyadéklézer fénye 3 db 1—2 mm átmérőjű diafragmán át egy (W) Wollaston-prizmába kerül, amely az x — y síkra merőleges, illetve azzal párhuzamos irányban lineárisan poláros sugárra bontja fel a folyadéklézer fényét. A két sugár szét tartó, melyeket egy (L) gyűjtőlencse képez le a spektrográf részére. Abban az esetben, amikor a két lineárisan poláros komponens spektrálisan nem bontjuk fel, a fénysugarak egy objektív nélküli fényképezőgépbe jutnak. A polarizációfok hullámhossztól való függésének vizsgálatánál egy CT Θ —1 típusú prizma-rács kombinációjú keresztezett diszperziójú spektrográfot használtunk. A detektor ORWO NP—27 film volt, amelynek hitelesítése [23]-ban leírt módon történt.

Kísérleti és számítási eredmények

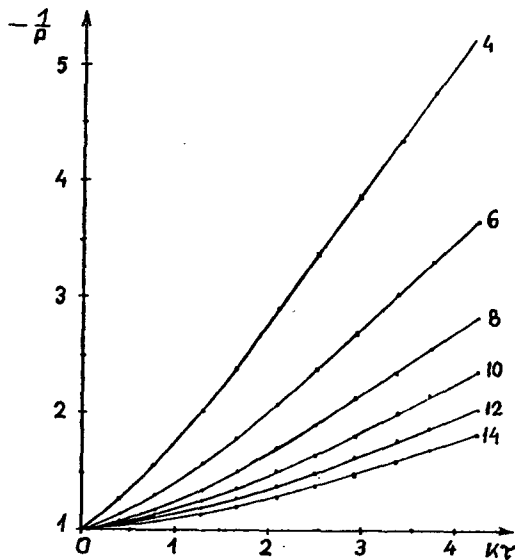
$1 \cdot 10^{-4}$ mol/l és $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l koncentrációjú etilalkoholos rodamin 6G oldatosorozatot készítettünk, mely sorozat tagjai a viszkozitásukban térnek el egymástól. Az oldat viszkozitását glicerin hozzáadásával változtattuk.

A méréseket kétféleképpen végeztük el. Az egyik esetben megmértük a Wollaston-prizmából kilépő két egymásra merőleges irányban polarizált nyaláb intenzitását, és ebből számítottunk egy átlagos (melyet integrálisnak nevezünk) polarizációfokot. A másik esetben pedig a két nyalábot spektrálisan felbontottuk, megkerestük az egymásnak megfelelő z és x irányban polarizált spektrumvonalakat, és így a polarizációfoknak a spektrumon belüli változását is megmértük.

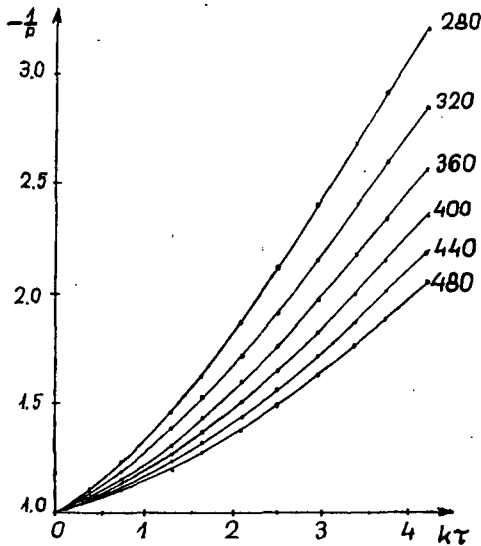


12. ábra

A 12. ábrán mutatjuk be, hogy az integrális polarizációfok reciproka hogyan függ a $K\tau$ (lásd (53)) értékétől. Az oldat viszkozitását növelve a rotációs depolarizáció hatása csökken, tehát a kisugárzott fény polarizációfoka nő. A két egyenes az $1 \cdot 10^{-4}$ mol/l és az $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l koncentrációjú oldatsorozatra vonatkozik. Látható, hogy az $1 \cdot 10^{-4}$ mol/l-es rodamin 6G-nek már a kis viszkozitású, glicerinmentes oldatánál mért polarizációfoka is igen magas, és gyorsan eléri a határpolarizáció -1 értékét. A nagyobb koncentrációjú $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l-es oldat esetében alacsonyabb a mért polarizációfok, és a nagy viszkozitásnál sem lesz -1 az értéke. Valószínű, hogy a rotációs depolarizáció mellett ennél a koncentrációnál már fellép a molekulák egy-



13. ábra (paraméter: $m, k_{\max}^{-1} = 480 \text{ m}^{-1}$)



14. ábra (paraméter: k_{\max}^{\perp} , $m=12$)

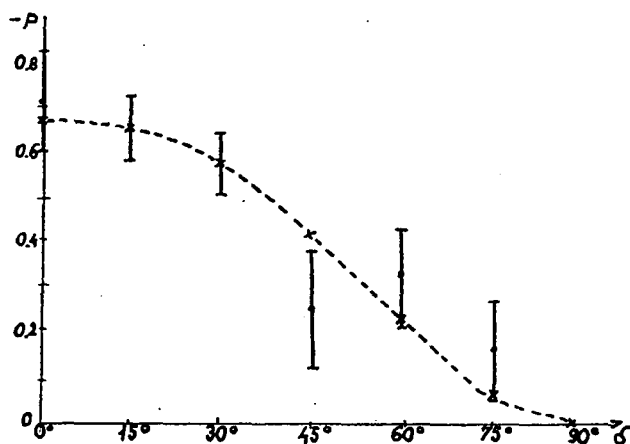
másközötti sugárzás nélküli energiaátadása, mely egy további depolarizációs hatást jelent. Ezt a jelenséget koncentrációs depolarizációnak nevezzük.

A korábban leírt modell segítségével kiszámítottuk a polarizációfok viszkozitásfüggését. A maximális erősítési együtthatót (k_{\max}^{\perp}) és a nemstacionárius folyamat idejét meghatározó ciklusszámot (m) variáltuk. A fontosabb adatok a következők voltak: $V=3,65 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^3$, $\tau=3,2 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$, $l_{\text{rez}}=10 \text{ cm}$, $l=1 \text{ cm}$, $t_{\text{imp}}=20 \text{ ns}$, $r_1=0,8$, $r_2=0,99$. A 13. és 14. ábrán $-1/P$ -nek a $K\tau$ -tól való függését láthatjuk különböző k_{\max}^{\perp} és m variálási paraméterek mellett.

Minden számított görbe határértéke a $P=-1$ -hez tart, következésképpen csak az $1 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$ -es oldatra kapott mérési eredményhez tudtuk hozzáilleszteni. A legjobb egyezést akkor kaptuk, amikor k_{\max}^{\perp} -ot 800 m^{-1} -nek, m -t pedig 12-nek választottuk. m ilyen értéke esetén a nemstacionárius folyamat ideje kb. 10 ns. A 22. ábrán a szaggatott vonal a számítással kapott függvényt jelöli.

A [9] dolgozatban ftalimidszarmazékokra vonatkozó kísérleti és számítási eredmények szerepelnek. Ezen anyagokra a polarizációfok erősebben függ a viszkozitástól, de a görbék menete hasonló azokhoz, amelyeket rodamin 6G-re kaptunk.

Megvizsgáltuk, hogy a gerjesztő fény elektromos vektorának az elforgatásával hogyan változik a festéklézer sugárzásának a polarizációfoka. A 15. ábrán a rodamin 6G $1 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$ -es, glicerinmentes oldatára vonatkozó mérések adatait tüntettük fel. Az eredmények jól mutatják azt a kvalitatíve várható és számítással is igazolt tényt, hogy ha a gerjesztő fény elektromos vektorának polarizációs síkját beforgatjuk a folyadéklézer optikai tengelyébe, akkor a gerjesztés anizotrópiája csökken, majd megszűnik. Ennek következtében a festéklézer sugárzásának polarizációja is csökken, illetve $\delta=90^\circ$ -ra a festéklézer geometriája az optikai tengelyére szimmetrikus lesz (ha a veszteségek az optikai tengelyre merőleges irányokban megegyeznek); és azt várjuk, hogy a kisugárzott lézertény teljesen depolarizált lesz. Bár a kísérlet során



15. ábra

nem tudtuk a $\delta=90^\circ$ -ot beállítani anélkül, hogy a gerjesztő intenzitás ne változott volna meg lényegesen, a polarizációfok $\delta=75^\circ$ -nál már láthatóan erősen lecsökkent a $\delta=0^\circ$ -nál mért értékhez képest.

A számítást elvégeztük a polarizációfoknak a gerjesztő fény elektromos vektora állásától való függésre is. A számított görbét a korábban leírttal azonos módon illesztettük a mérési eredményekhez. A 15. ábra szaggatott görbéje a számítás eredményét mutatja arra az esetre, amikor az illesztési paraméterek értéke: $k_{\max}^{\perp} = 800 \text{ m}^{-1}$, $m = 12$.

A polarizációfok spektrális függését is megvizsgáltuk a két komponens spektrális felbontásával. (Ezeknél a felvételeknél $\delta=0^\circ$ volt).

A spektrum nagyon bonyolult szerkezetű, és ha az egyes összetartozó vonalokból számítjuk ki vonalanként a polarizációfokot, akkor alig vehető észre a kapott grafikon menetében szabályszerűség. A rezonátornak azt a hatását, hogy az egyik módust jobban erősíti, mint a mellette levőt, úgy próbáltuk csökkenteni, hogy a polarizációfokot nem vonalanként határoztuk meg. Egy hullámhosszintervallumra (0,6 nm, ill. 1,1 nm) számítottunk egy átlagot, összegezve a spektrum egy szakaszára az x , ill. z irányban polarizált komponensek energiasűrűségét. A polarizációfok meghatározására a következő összefüggést használtuk:

$$\bar{P}(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (E_{iz} - E_{ix})}{\sum_{i=1}^n (E_{iz} + E_{ix})}, \quad (85)$$

ahol E_i jelenti az i -edik vonal energiasűrűségét, n értéke pedig 5, ill. 10 volt.

A kapott spektrumokra az jellemző, hogy szélességük különböző, pontosabban a nagyobb intenzitású x komponens szélessége nagyobb, mint a z komponensé. Így a polarizációfok értéke a spektrum szélén -1 -nek adódott. Ezt a jelenséget az erősítés dikroizmusával magyarázhatjuk. Az x és a z irányában az erősítési együtthatók eltérő nagyságúak, azaz

$$k_x(\lambda) \neq k_z(\lambda). \quad (86)$$

A két erősítési tényező a következőképpen hozható egymással kapcsolatba a korábban leírt modellünk alapján (ld. (59) és (60)), mivel

$$k_x(\lambda) = \frac{k_{\max}^\perp}{4} (4 - \overline{\sin^2 \xi}). \quad (87)$$

$$k_z(\lambda) = \frac{k_{\max}^\perp}{4} (2 + 2\overline{\sin^2 \xi}). \quad (88)$$

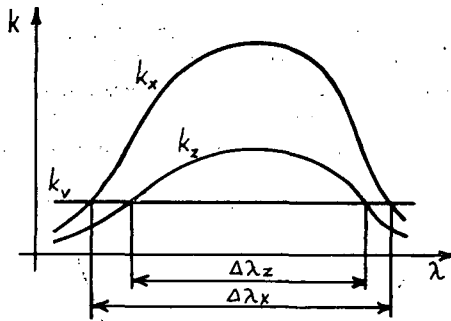
A hányadosukra adódik, hogy

$$\frac{k_x(\lambda)}{k_z(\lambda)} = \frac{4 - \overline{\sin^2 \xi}}{2 + 2\overline{\sin^2 \xi}}, \quad (89)$$

A viszkozitás növekedésével a $k_x(\lambda)/k_z(\lambda)$ arány nő, és határesetben ($\eta \rightarrow \infty$) adódik, hogy

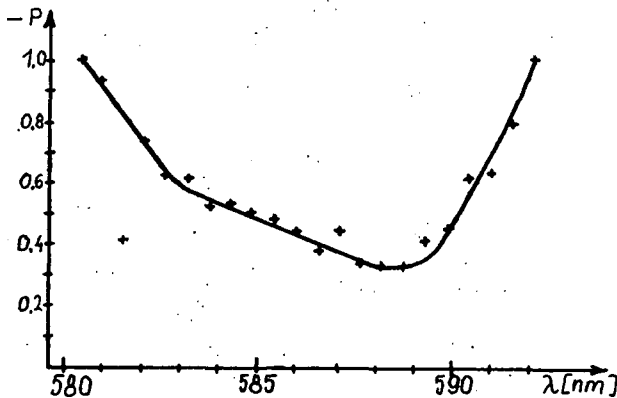
$$k_x(\lambda) = 2k_z(\lambda). \quad (90)$$

$k_x(\lambda)$ nagyobb spektrumtartományban múlja felül a veszteséget, mint $k_z(\lambda)$, tehát a spektrum x komponense szélesebb lesz (16. ábra).

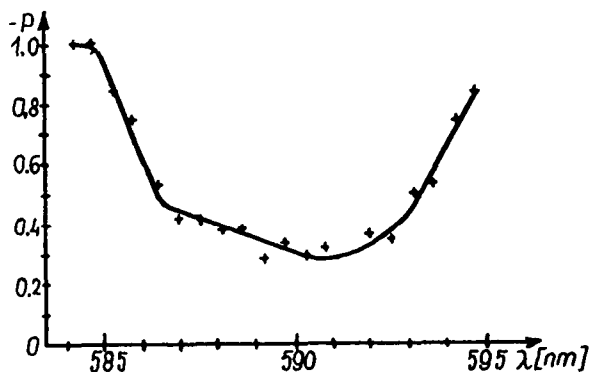


16. ábra

A viszkozitás változtatásával a $k_x(\lambda)/k_z(\lambda)$ arány is változik, tehát a spektrumok szélessége is eltérő lesz.



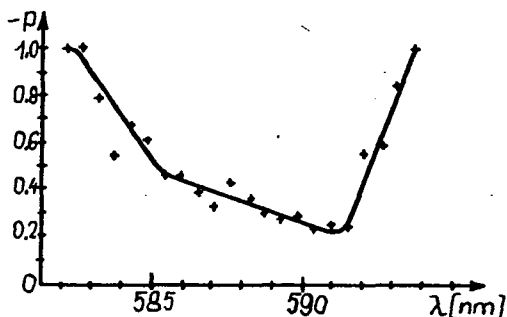
17. ábra



18. ábra

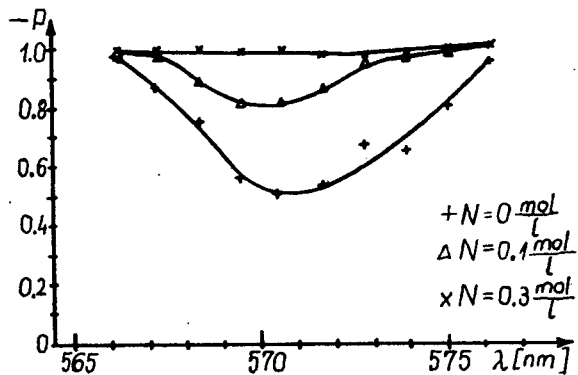
A polarizációfok spektrális változására az $1 \cdot 10^{-4}$ mol/l és az $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l koncentrációjú oldatok esetében a 17—20. ábrán látható görbéket kaptuk.

Az irodalmi adatok [10] szerint a polarizációfok a hullámhossz növekedésével csökken. Ez a jelenség csak az $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l koncentrációjú oldatnál mutatkozik. Valószínű, hogy a másik oldatnál ezt azért nem tudtuk kimutatni, mert nagyon keskeny volt az egyik komponens spektruma. A színekép nagy részén csak a másik komponens volt jelen, és a gyengébb komponensnél a küszöb közelében pedig különösen bonyolulttá teszik az amúgy is keskeny spektrum alakját a fluktuációk.



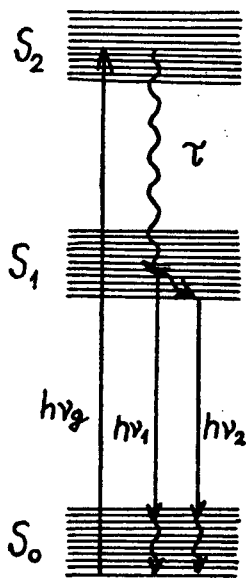
19. ábra

A polarizációfoknak a hullámhosszal való ilyen változását a korábban leírt modellel nem tudjuk megmagyarázni. Ugyanis a modell szerint a két kitüntetett irányban az erősítési együttható értéke különbözik, a (89) alatti kapcsolat áll fenn. Tehát $k_x(\lambda)$ -nak ott van maximuma, ahol $k_z(\lambda)$ -nak. A spektrumokból pedig látható (16. ábra), hogy a z komponens spektrumának a súlypontja egy kevéssel a hosszabb hullámhosszak felé tolik el a másikhoz képest. Egy lehetséges kvalitatív magyarázat a következő (ld. 21. ábra). Tegyük fel, hogy a molekula az S_1 term valamely energiaszintjén van, és az energiáját $h\nu_1$, illetve egy sugárzás nélküli átmenet után $h\nu_2$ energiájú foton kibocsátásával adja le. Azon idő alatt, amíg a molekula az S_1



20. ábra

term egyik magasabb szintjéről az alacsonyabb szintjére eljut, elfordulhat. Tehát fellép a rotációs depolarizáció, vagy további depolarizációs hatások is, melynek kö-



21. ábra

vetkeztében a hosszabb hullámú komponensek kevésbé lesznek polárosak, ami azt jelenti, hogy a polarizációfok értéke a spektrum hosszú hullámú részén kisebb lesz.

- [1] MCFARLAND, B. B.: Appl. Phys. Lett. 10, 208, 1967.
 [2] SORONKIN, P. P., I. B. LANKARD ET AL.: IBM J. Res. and Development 11, 130, 1967.
 [3] SEVCHENKO, A. N., A. A. KOVALEV, V. A. PILIPOVICH, YU. V. RAZVIN: DAN USSR 179, 562, 1968.
 [4] SEVCHENKO, A. N., A. A. KOVALEV, V. A. PILIPOVICH: DAN USSR 187, 1039, 1969.
 [5] SEVCHENKO, A. N., L. G. PIKULIK, L. F. GLADCHENKO, A. D. DASKO: DAN USSR 188, 1263, 1969.
 [6] PIKULIK, L. G., L. F. GLADCHENKO, A. L. DASKO: Izv. AN USSR ser. fiz. 34, 1316, 1970.
 [7] KOVALEV, A. A., V. A. PILIPOVICH, YU. V. RAZVIN: ZhPS 16, 654, 1972.
 [8] PIKULIK, L. G., A. I. MAKSIMOV, K. I. RUDIK: ZhPS 19, 1025, 1973.
 [9] PIKULIK, L. G., K. I. RUDIK, A. I. MAKSIMOV, O. I. YAROSHENKO: ZhPS 20, 996, 1974.
 [10] PIKULIK, L. G., K. I. RUDIK, A. I. MAKSIMOV: Acta Phys. et Chem. Szeged 23, 77, 1977.
 [11] PIKULIK, L. G., A. I. MAKSIMOV, K. I. RUDIK: ZhPS 22, 1043, 1975.
 [12] LJOVSIN, V. L.: Folyékony és szilárd anyagok fotolumineszcenciája. Akadémiai Kiadó, Bp., 1956.
 [13] SZARZSEVSKIJ, A. M., A. N. SZEVCSENKO: Anizotropija poglosenyija i szpuszkanyija szveta molekulami. Izd. BGU, Minszk, 1971.
 [14] SHANK, C. V.: Rev. Mod. Phys., 47, 3, 649, 1975.
 [15] ATKINSON, J. B., F. P. PACE: IEEE J. Quant. Electr., QE—9, 6, 569, 1973.
 [16] GRUZINSZKIJ, V. V., SZ. V. DAVIDOV: Materiali vszeszojuznoj konferencii „Lazeri na osznové szlozsnüh organyicseszkih szojegyinyenyij”. Preprint, Minszk, 1975.
 [17] PILIPOVICS, V. A., A. A. KOVALJEV: Anizotropija vünuzsgyenovo izlucsenyija organyicseszkih szojegyinyenyij. Preprint, Minszk, 1977.
 [18] SZAMSZON, A. I. Metodi raszcota opticseszkih kvantovüh generatorov na organyicseszkih krasztyeljah. Preprint, Minszk, 1970.
 [19] YAROSHENKO, O. I., K. I. RUDIK, L. G. PIKULIK, A. I. MAKSIMOV: Opt. i. Spekr. 39, 745, 1975.
 [20] LEMPICKI, A.: Acta Physica Polonica A 50, 179, 1976.
 [21] PERRIN, F.: Acta Phys. Pol., 5, 335—347, 1936.
 [22] PINTÉR, F., L. GÁTI, L. VIZE, J. KLEBNICZKI: Acta Phys. et Chem. Szeged, 24, 381, 1978.
 [23] VIZE, L., F. PINTÉR, L. GÁTI, J. JUNG: Acta Phys. et Chem. Szeged, 21, 19, 1975.
 [24] HEBLING, J., F. PINTÉR, L. VIZE: Conference Digest of 3rd Conference on Luminescence. Szeged, 2, 327, 1979.

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG DER POLARISATIONSEIGENSCHAFTEN FARBSTOFFLASERSTRAHLUNG

FERENC PINTÉR—LÁSZLÓ VIZE—LÁSZLÓ GÁTI—JÓZSEF KLEBNICZKI

Es wurde theoretische und experimentell untersucht, welche Beziehungen zwischen der Rotationsbewegung der gelösten Moleküle und der Polarisationseigenschaften von Farbstofflaserstrahlung sind. Die Rhodamine 6G Lösung des Farbstofflasers wurde mit linear polarisiertem Laserlicht erregt. Bei der Farbstoffkonzentration $1 \cdot 10^{-4}$ mol/l übereinstimmen gut die Messresultaten mit den theoretischen Daten bis auf einen unbestimmten Faktor. Bei der Farbstoffkonzentration $1 \cdot 10^{-3}$ mol/l ergab sich eine Abweichung von der Theorie. Der wahrscheinlichste Grund dieser Abweichung ist, dass die Wirkung der Konzentrationsdepolarisation in die Theorie nicht berücksichtigt wurde.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТЕПЕНИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ЛАЗЕРА НА КРАСИТЕЛЕ

Ф. ПИНТЕР, Л. ВИЗЕ, Л. ГАТИ И Й. КЛЕБНИЦКИ

Было исследовано теоретически и экспериментально влияние вращательной деполяризации на степень поляризации излучения лазера на красителе родамина 6Ж, в зависимости от вязкости растворителей при лазерном возбуждении линейно поляризованным светом. Теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются при концентрации активного вещества равной $1 \cdot 10^{-4}$ моль/л, а в случае концентрации $1 \cdot 10^{-3}$ моль/л наблюдается расхождение. Вероятно, что влияние концентрационной деполяризации является причиной расхождения, которую теория не принимает во внимание.

AZ OPTIKA JELENTŐSÉGE AZ OKTATOTT FIZIKÁBAN

SZAGARDA V. V.—KERESZTÉNY I. SZ.—HALÁSZ T.

Néhány évvel ezelőtt még a gimnázium szakosított tantervű osztályainak tan-könyvében is azt olvashattuk, hogy „a fénytán keretei között azokat a jelenségeket tanulmányozzuk, amelyek a látás szervéhez kapcsolódnak”. Azt a kérdést, hogy mi kerül a látás szervével kölcsönhatásba nem volt szokás feltenni. Ha fel is vetődött, hogy mi a fény, azt kizárólag a részecske vagy hullám gondolatkörre leszűkítve értették.

A ma oktatott fizika ezen a szemléletmódon már sok országban — szerencsére Magyarországon is — túllépett. A fényről megfogalmazott első ismeretek egyike, már az általános iskola 8. osztályában is az, hogy *a fény anyag*. A fénytán tehát az anyag egyik formájáról a fényről, annak különböző közegben való terjedéséről, más anyagokkal létrejött kölcsönhatásáról és ezek gyakorlati alkalmazásának lehetőségéről szóló tanítás. Ebben a felfogásban *a fénytán nagyon fontos része a fizikának*.

A fény vizsgálata korunk legfontosabb felfedezéseinek az alapját képezte és képezi továbbra is. Ismeretes, hogy a fényjelenségek tanulmányozása nagy mennyiségű információt nyújtott az anyag felépítésére, tulajdonságaira és különböző formáinak kölcsönhatására vonatkozóan. Ezek a vizsgálatok elősegítették, hogy tért hódítson a természeti jelenségek értelmezésének új, a XX. századra jellemző szemlélete. Az új eredmények a XIX. század gondolatvilágába már nem fértek bele, így azok a mikrovilág fizikai törvényszerűségeit visszatükrözni, megmagyarázni képtelen elképzelések csődjéhez vezettek. 1900-ban felfedezték és 1905-ben megfogalmazták (Planck és Einstein) a fénykibocsátás kvantumelméletét. Az 1910-es évek elején létrehozták az atom szerkezetét és a színeképzés diszkrét jellegét értelmező elméletet (Rudherford, Bohr). 1921-ben minőségi szempontból magyarázták meg a Mengyelejev által összeállított periódusos rendszer törvényszerűségeit (Bohr). Ezek a felfedezések az anyag fénykibocsátását és fényelnyelését vizsgáló kutatásokkal voltak szoros kapcsolatban.

Az említett felfedezések alapján megállapítást nyert, hogy minden sugárzás atomi eredetű és anyagi természetű. A sugárzás kibocsátása, terjedése és elnyelése diszkrét „csomagokban”, kvantumokban történik, melyeket később fotonoknak neveztek el. A fény vizsgálata fontos szerepet játszott a folytonos és diszkrét jelenségek dialektikus egységéről alkotott — az egész modern fizika alapjait képező — gondolkodásmód kialakításában. Az atomok spektrumait elemezve információkat kaphatunk azok méreteiről, formájáról és belső struktúrájáról.

Az emberi gondolkodás egyik kimagasló vívmányának, Einstein relativitáselméletének (1905) megalapozása is egy fénytani kísérlettel (1887) kezdődött.

Anderson 1932. évi felfedezése, a párkeltés — a gamma-foton elektron-pozitron párrá való átalakulásának jelensége, majd pedig az elektron és pozitron gamma-fotonnal alakulása — igazolta mind a fény anyagi jellegét, mind pedig azt, hogy a fény és a közeg az anyag két különböző fajtája.

A mai tudomány egyik legfontosabb eredménye, a kvantumgenerátorok (maser, laser) létrehozása. Napjainkban a figyelem egyre inkább a gerjesztett gázok és a plazma kisugárzásának és e sugárzás jelenségeinek tanulmányozása felé fordul.

Az új fénytani jelenségek és törvények többségét közvetlenül felhasználják a tudomány különböző területén, a népgazdaságban és a műszaki haladás széleskörű fejlődése érdekében. A régóta ismert műszerek korszerűsítése mellett gyakran új módszerek születnek, mint például a száoptika, vagy a holográfia. A soksugaras interferometriát a hullámhosszal, vagy annak törtrészeivel összehasonlítható mikroszkopikus egyenetlenségek jelzésére, kiértékelésére és ellenőrzésére használják. Az aktív, a fényjelek erősítésére alkalmas száoptika létrehozása lehetővé teszi, hogy az optikai lézer-számítógép realitássá váljon.

Általában igaz, hogy a modern optikai műszerek, berendezések, fényforrások, elemzési módszerek és mérés technika nélkül elképzelhetetlen lenne a termelés automatizálása, a tudomány, technika és a hírközlés fejlesztése.

A fény természetének, tulajdonságainak és a fényjelenségeknek ismerete nemcsak szakmai szempontból fontos. Közismert ezek világnézeti jelentősége is. A kozmikus világ anyagi egysége, ugyanakkor az anyag sokfélesége — mindez a fény vizsgálata révén vált ismertté — csak dialektikusan gondolkodva érthető meg. A megismerés folyamat jellege és változatossága a fényelmélet sok ezer éves történetén keresztül is felismerhető. Kevés olyan része van a fizikának, amelyben a hipotéziseknek és a modell módszernek nagyobb jelentősége van, mint a fénytannban.

A fénytann korszerűsödő ismeretanyaga egyre jelentősebbé válik a pályaválasztás szempontjából is. Nemcsak azért, mert a fény a legfontosabb információk forrása és hordozója, hanem azért is, mert a fejlődés minden területen egyre több optikai eszköz alkalmazni képes ismeretét kívánja meg. Erre felkészülni, ezekkel kapcsolatban szakmát, hivatást választani csak akkor tudnak a tanulók, ha hallanak róla és az elvi alapokat megismerik.

A Magyarországon 1978-tól fokozatosan bevezetett fizika tantervek — mint említettük — alap gondolatok szempontjából előrelépést jelentenek az optika területén is. Ha azonban összehasonlítjuk a most kötelező tananyagot a növekvő igényekkel, vagy a környező országokban tanított optikával, de akár az elmúlt időszakban Magyarországon tanított fénytani ismeretekkel is, egyértelműen megállapíthatjuk, hogy *indokolatlanul nagy a visszaesés és az elmaradás*. A formális mutatók — a tankönyvi oldalak és a tanítási órák száma — is jól igazolják ezt.

Az általános iskola 8. osztályában 36 oldal és 11 tanítási óra jut a fénytannra. Az általános iskola megadja — ezek között a keretek között — a geometriai fénytannból mindazt, amit az életkori sajátosságok és az előismeretek lehetővé tesznek. A réginél — amikor 12 éves korban került elő ez a téma — most igényesebb fénytann tanulnak a 8-osok. Így *14 éves korig nincs elmaradás* [5, 6, 7, 8].

A gimnázium III. osztályában a 14 oldalon leírt tananyagot 4—5 órában, a IV. osztály 4 oldalnyi anyagát pedig 1 órában és néhány áttételes utalás formájában dolgozzák fel. A sakközépiskolákban (A, B és C variáns) jobb, de ott sem kielégítő a helyzet, mert a II. osztályban 64 oldal és 12—14 óra fordítható a geometriai és fizikai fénytannra együttesen [1, 2, 3].

Ha ugyanezeket a formális mutatókat összehasonlítjuk például a Szovjetunióban jelenleg kialakult helyzettel, akkor megalapozottnak látszik a probléma felvetése. Ott ugyanis a 10. osztályban, a 111 oldalon leírt fénytani ismereteket 53 tanítási órán dolgozzák fel [4].

A lényegét jobban kifejező tartalmi összehasonlítás még egyértelműbbé teszi a képet, hiszen a csak első közelítést jelentő fejezetcímek és óraszámok a következők:

1. Geometriai fénytán 19 óra, 2. Fényhullámok 11 óra, 3. A relativitáselmélet alapjai 6 óra, 4. Sugárzás és színeképek 6 óra, 5. A fény hatásai. Fénykvantumok 12 óra. Az elméleti ismeretek megszerzése, elmélyítése érdekében ezen kívül 9 fizika gyakorlatot végeznek el optikából a tanulók.

Tantervi változásra Magyarországon, a 90-es évek elejéig várhatóan és remélhetőleg nem kerül sor. Ez alatt a 8—10 év alatt is lehet, sőt kell változtatni ezen a helyzeten. Az általános iskolában is, de elsősorban a középiskolákban tág lehetőséget biztosít erre a fakultáció és a szakkör.

Az általános iskolában — a kiegészítő anyaghoz kapcsolódva — a színeképeket jelenség szintjén meg lehet ismertetni és az ezekből levonható következtetéseket beszélgetve közel lehet vinni a tanulókhöz. Ezek látványossága, érdekessége és távlatokat nyitogató hatása biztosan megfogná a gyerekek fantáziáját.

A gimnáziumban — de a szakközépiskolában is — a fénytánból legalább 4—5, néhány órában feldolgozható egységet be kellene iktatni a fakultációs órák tananyagába. Ilyen lehetne például:

— *A fény kölcsönhatása különféle testekkel és anyagokkal.* Itt lehetne sort keríteni a fény visszaverődésének és törésének mennyiségi leírására (gömbtükör egyenlete, Snellius—Descartes-törvény stb.), az interferencia, a polarizáció, a fényelektromos jelenség, a folytonos és az elnyelési színeképek vizsgálatára, valamint az ezekből levonható következtetésekre.

— *A fénykibocsátás jelenségköréhez* lehetne kapcsolni az emissziós színekép vizsgálatát és anyagszerkezeti vonatkozásait, a megmaradási tételek érvényességét a fényre stb.

— *A modern fénytani eszközök és alkalmazásuk* (száloptika, lézer, hologram stb.) sokirányú kitekintésre adnak lehetőséget.

— *A fényről alkotott elképzelések történeti fejlődése.* Itt lehetne erőltetés nélkül beszélni a hipotézisről, a modell-módszerről, általában a megismerésről, a dialektikus gondolkodásról és az anyagról.

— *A relativitáselmélet alapjai* a fénytannál általánosabb gondolatokat igényelnek, de a Michelson-féle kísérlet miatt mégis jól köthetők ide.

A fénytani ismereteket sokféle módon — az előbb vázoltaktól eltérően is — fel lehet használni tanítványaink tudásának, gondolkodás- és szemléletmódjának korszerűsítése, fejlesztése érdekében. A döntő az, hogy éljünk is ezzel a lehetőséggel.

IRODALOM

- [1] DR. PAÁL TAMÁS—SOÓS KÁROLY: Fizika II. (A, B és C variáns) Szakközépiskola Tankönyvkiadó Bp., 1979.
- [2] HOLICS LÁSZLÓ: Fizika gimnázium III. Tankönyvkiadó Bp., 1983.
- [3] DR. TÓTH ESZTER: Fizika gimnázium IV. osztály Kísérleti tankönyv Tankönyvkiadó Bp., 1981.
- [4] G. J. MJAKISEV—B. B. BUHOVCEV: Fizika tankönyv a középiskolák 10. osztálya számára Ragyanszka Skola Kiadó Kijev—Uzsgorod 1979.
- [5] DR. KÖVESDI PÁL és szerzőtársai, alkotószervező dr. Halász Tibor: Fizika 8. Munkatankönyv az általános iskolák 8. osztálya számára Tankönyvkiadó Bp., 1984.
- [6] R. N. DR. EVA PROCHÁZKOVÁ és szerzőtársai: Fizika az alapkola 7. osztálya számára Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava 1982.
- [7] DIMITRU MANDA és szerzőtársai: Fizika tankönyv a VI. osztály számára Editura didactică și pedagogică București 1980.
- [8] DUŠAN ILIĆ és szerzőtársai: Fizika az általános iskolai nevelés és oktatás 8. osztálya számára Tankönyvkiadó Intézet Újvidék 1978.

DIE BEDEUTUNG DER OPTIK IM PHYSIKUNTERRICHT

V. V. SZAGARDA—ISTVÁN KERESZTÉNY—TIBOR HALÁSZ

In Ungarn ist seit der Einführung der neuen Physiklehrpläne der Unterricht der Optik unbegründet in den Hintergrund getreten. Das wird auch durch die vergleichende Untersuchung der Lehrpläne und Lehrbücher der sozialistischen Länder bestätigt.

Der Aufsatz behandelt vielseitig die Bedeutung des Unterrichtes der Optik, weiterhin das Ergebnis der vergleichenden Untersuchung und macht einen Lösungsvorschlag, der auch im Rahmen der gegenwärtigen Lehrpläne realisierbar ist.

ЗНАЧЕНИЕ ОПТИКИ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКИ

В. В. САГАРДА, И. КЕРЕСТЕНЬ И Т. ХАЛАС

Во Венгрии со времени новой реформы программы физики, оптика не обоснованной мере играет малую роль. Это подтверждается сравнением программы и учебников социалистических стран.

Настоящая работа много сторонним образом обсуждает результаты исследований сравнения и занимается с значением обучения оптики. В работе делается одно предложение, которое может быть осуществленно в рамках настоящей программы.

**OLDÓSZERHATÁS A SCHIFF-BÁZISOK AMINC SERÉJÉNÉL, III.
A SEBESSÉGI ÁLLANDÓ VÁLTOZÁSA
1,2-DIKLÓRETÁN-BENZOL OLDÓSZERELEGYBEN**

NAGY PÁL

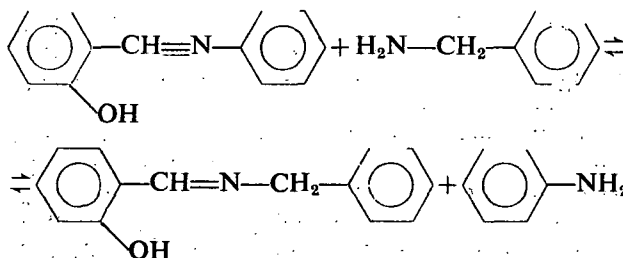
Előző közleményeinkben [1, 2] etanol-benzol és etanol-ciklohexán elegyben vizsgáltuk szalicilidén-anilin, illetve N-(2-hidroxi-1-naftilidén)-anilin butil-aminnal és benzil-aminnal lejátszódó amincseréjét. A reakciók sebességi állandója az oldószer-elegy etanolkoncentrációjának függvényében nő és tiszta etanolban 3—4 nagyságrenddel nagyobb, mint aprotinos oldószerben. A sebességi állandó és az oldószer-elegy összetétele közötti kapcsolatot részletesen vizsgáltuk etanol-ciklohexán elegyben [2]. Megállapítottuk, hogy a különböző összetételű oldószer-elegyekben mért sebességi állandók (k) igen jól leírhatók az alábbi egyenlettel:

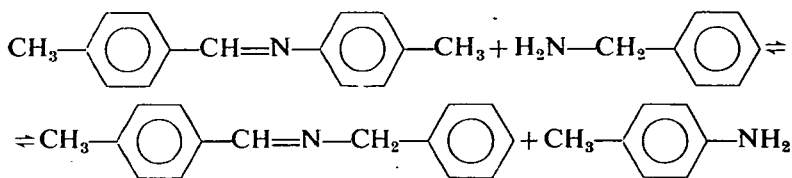
$$\lg k = x_1 \lg k_1^* + x_2 \lg k_2^* + (a + b\gamma_1)x_1x_2 \quad (1)$$

ahol k_1^* , k_2^* az etanolban, illetve ciklohexánban mért sebességi állandó, x_1 , x_2 az etanol, illetve ciklohexán móltörtje, γ_1 az etanol aktivitási koefficiense az elegyben, a és b a rendszerre jellemző állandók. A mérési adatokból az $a + b\gamma_1 = B$ tényező a különböző összetételű elegyekre kiszámítható. A B értékek γ_1 függvényében igen jó közelítéssel egyenest határoznak meg, s így az a és b állandók is kiszámíthatók.

Az (1) egyenlet érvényessége, vagyis a sebességi állandó és az etanol aktivitási koefficiense közötti kapcsolat arra utal, hogy az amincsere sebességét — a vizsgált oldószer-elegyben — döntően az etanol és a Schiff-bázis molekulák között kialakuló hidrogénkötés határozza meg. Ez a kötés feltehetően a Schiff-bázis o-helyzetű OH-csoportjának oxigénjével alakul ki, figyelembe véve, hogy az ilyen típusú Schiff-bázisoknál az azometin-N-el létrejövő viszonylag erős intramolekuláris hídkötéssel is számolni kell. A hidrogénkötésekkel együttjáró elektroneltolódás érthetővé teszi az amincsere sebességének nagymértékű változását az oldószer-elegy etanolkoncentrációjának függvényében.

Jelen dolgozatunkban az amincsere lejátszódásának aprotinos oldószer-elegyben nyert vizsgálati eredményeit ismertetjük az alábbi folyamatoknál:





A kísérleti tapasztalatok alapján arra kívánunk választ adni, hogy miként befolyásolja az amincsere sebességét az oldószerkelet relatív permittivitása.

Kísérleti módszer

A kinetikai méréseket 1,2-diklóretán-benzol oldószerkeletben, 25°C-on végeztük. A reakciók követésére spektrofotometriás módszert alkalmaztunk, miután a kiindulási és keletkező Schiff-bázisok elnyelési görbéje jelentősen különbözik egymástól. Szalicilidén-anilin vizsgálatakor 350 nm-nél, 4-metil-benzál-4'-metil-anilin vizsgálatakor 320 nm-nél mértük a reakciókeletkező abszorpciójának csökkenését. A keletkező Schiff-bázis mindenkori koncentrációját az

$$x = \frac{(E_k - E)b_0}{E_k - E_v} \quad (2)$$

összefüggéssel számoltuk, ahol E_k a $t=0$ időhöz tartozó, E a reakció alatt és E_v a reakció végén mért fényelnyelés, míg b_0 a kiindulási Schiff-bázis kezdeti koncentrációja. A kiindulási Schiff-bázist $1 \cdot 10^{-4}$ mol/dm³, a benzil-amint $1 \cdot 10^{-2}$ mol/dm³ körüli koncentrációban alkalmaztuk. Így a cserélő amin nagy feleslege miatt a reakció gyakorlatilag teljesen lejátszódott. A sebességi állandókat másodrendnek megfelelő egyenlettel számoltuk.

A Schiff-bázisokat a komponensek etanolos oldatának összeöntésével állítottuk elő, majd átkristályosítás után a tisztaságukat op.-méréssel ellenőriztük. A kereskedelemben kapható benzil-amint minden méréshez frissen desztilláltuk. Az oldószerkeletet a spektroszkópiában szokásos módszerekkel tisztítottuk és víztelenítettük.

Kísérleti eredmények

A másodrend szerint számított sebességi állandók az időtől független jó egyezést mutatnak az alkalmazott oldószerkeletben, amit példaként az 1., és 2. táblázat adatai szemléltetnek.

A sebességi állandók a különböző összetételű 1,2-diklóretán-benzol oldószerkeletben a 3. táblázat adatainak, illetve az 1. és 2. ábrának megfelelően változnak. (Tiszta 1,2-diklóretánban oldhatósági problémák miatt a mérést nem tudtuk elvégezni.)

Korábbi méréseinknél — amikor különböző típusú Schiff-bázisok amincserejét etanolban vizsgáltuk [3] — megállapítottuk, hogy az aldehidgyűrűn o-helyzetben OH-csoportot tartalmazó Schiff-bázisok amincsereje 2—3 nagyságrenddel gyorsabban játszódik le mint az egyéb típusoké. A 3. táblázat adatai szerint viszont benzolban megváltozik a sorrend; a szalicilidén-anilinnél mért sebességi állandó közel tízszer kisebb, mint a 4-metil-benzál-4'-metil-anilinnél mért érték. Valószínű, hogy ennek

1. táblázat

SZALICILIDÉN-ANILIN ($b_0=1\cdot 10^{-4}$ mol/dm³) ÉS BENZIL-AMIN ($a_0=1\cdot 10^{-2}$ mol/dm³) REAKCIÓJÁNAK SEBESSÉGI ÁLLANDÓJA 1,2-DIKLÓRETÁN-BENZOL ELEGYBEN 25°C-ON. [1,2-DIKLÓRETÁN]=10,153 mol/dm³

t min	x mol/dm ³	k dm ³ ·mol ⁻¹ ·min ⁻¹
100	$1,28\cdot 10^{-5}$	$1,37\cdot 10^{-1}$
160	$1,93\cdot 10^{-5}$	$1,34\cdot 10^{-1}$
233	$2,68\cdot 10^{-5}$	$1,34\cdot 10^{-1}$
373	$4,07\cdot 10^{-5}$	$1,40\cdot 10^{-1}$
460	$4,84\cdot 10^{-5}$	$1,44\cdot 10^{-1}$
510	$5,15\cdot 10^{-5}$	$1,42\cdot 10^{-1}$
1360	$8,32\cdot 10^{-5}$	$1,32\cdot 10^{-1}$
1540	$8,69\cdot 10^{-5}$	$1,33\cdot 10^{-1}$
közéérték:		$1,37\cdot 10^{-1}$

2. táblázat

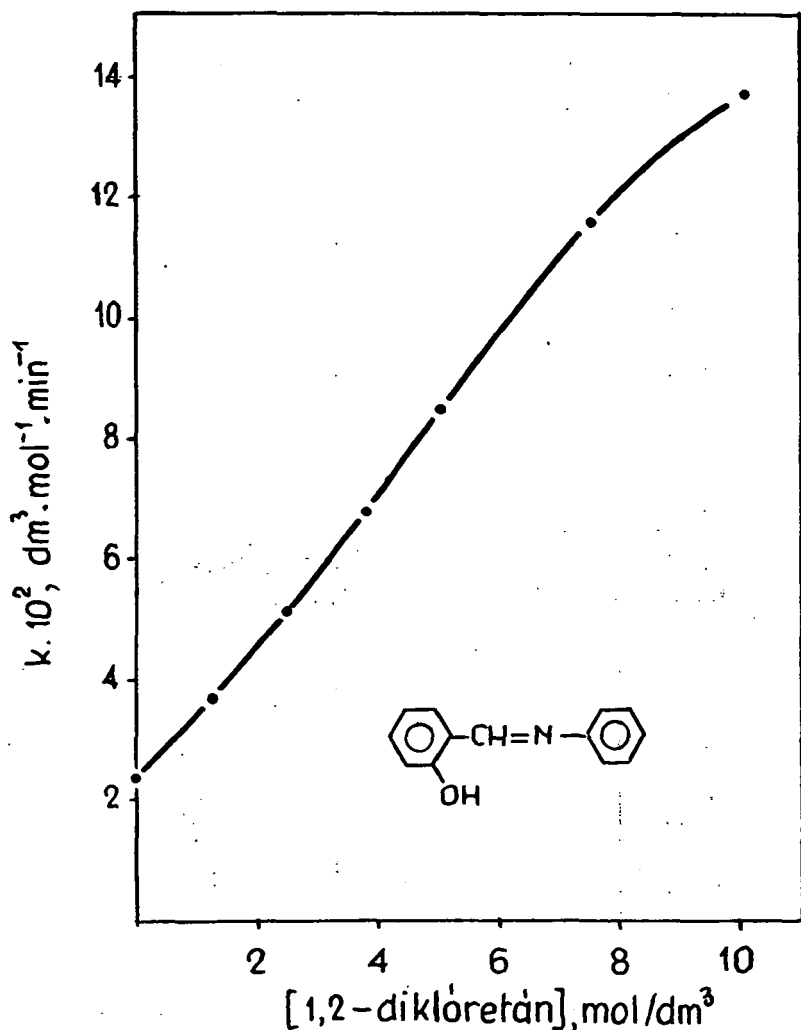
4-METIL-BENZÁL-4'-METIL-ANILIN ($b_0=1\cdot 10^{-4}$ mol/dm³) ÉS BENZIL-AMIN ($a_0=1,058\cdot 10^{-2}$ mol/dm³) REAKCIÓJÁNAK SEBESSÉGI ÁLLANDÓJA 1,2-DIKLÓRETÁN-BENZOL ELEGYBEN 25°C-ON. [1,2-DIKLÓRETÁN]=6,345 mol/dm³.

t min	x mol/dm ³	k dm ³ ·mol ⁻¹ ·min ⁻¹
7,88	$1,16\cdot 10^{-5}$	1,48
15,95	$2,15\cdot 10^{-5}$	1,44
31,16	$3,76\cdot 10^{-5}$	1,43
40,40	$4,56\cdot 10^{-5}$	1,43
57,29	$5,83\cdot 10^{-5}$	1,45
73,62	$6,77\cdot 10^{-5}$	1,45
98,20	$7,83\cdot 10^{-5}$	1,48
122,80	$8,51\cdot 10^{-5}$	1,47
közéérték:		1,45

3. táblázat

SZALICILIDÉN-ANILIN, ILLETVE 4-METIL-BENZÁL-4'-METIL-ANILIN ÉS BENZIL-AMIN REAKCIÓJÁNAK SEBESSÉGI ÁLLANDÓI 1,2-DIKLÓRETÁN-BENZOL OLDÓSZERELEGYBEN 25°C-ON

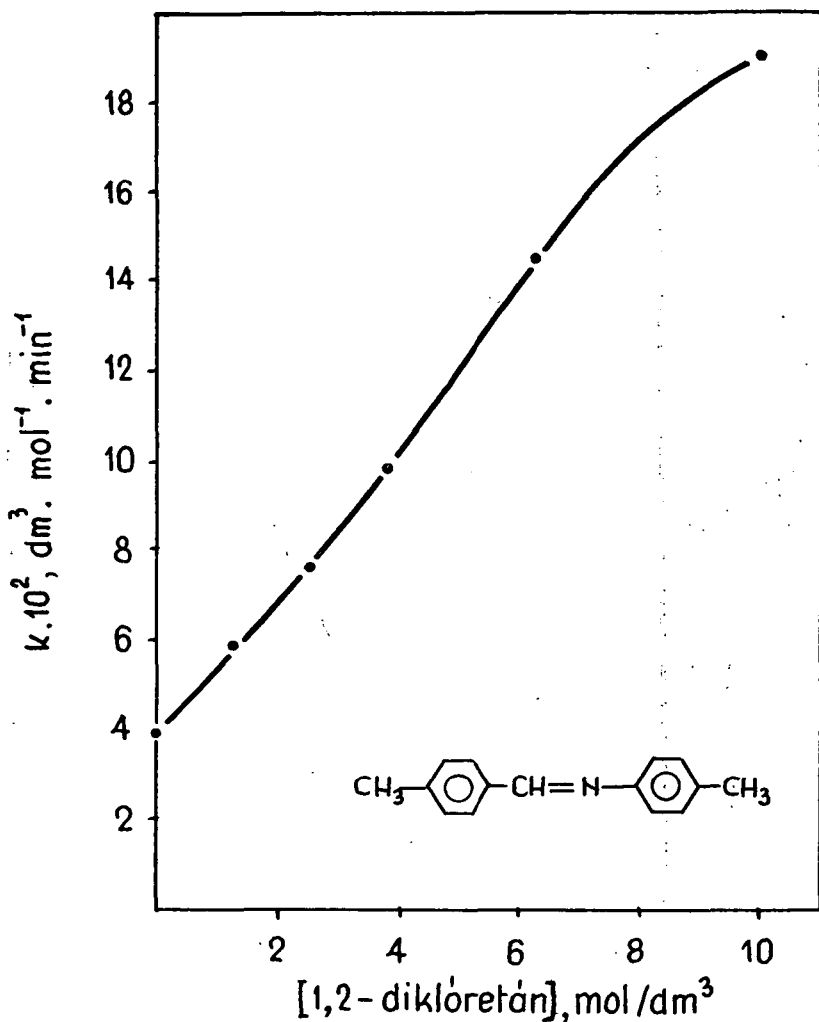
[1,2-diklórétán] mol/dm ³	k , dm ³ ·mol ⁻¹ ·min ⁻¹	
	Szalicilidén-anilin	4-metil-benzál-4'-metil-anilin
0	$2,48\cdot 10^{-2}$	$3,88\cdot 10^{-1}$
1,269	$3,68\cdot 10^{-2}$	$6,03\cdot 10^{-1}$
2,538	$5,06\cdot 10^{-2}$	$7,58\cdot 10^{-1}$
3,807	$6,74\cdot 10^{-2}$	$9,90\cdot 10^{-1}$
5,076	$8,39\cdot 10^{-2}$	—
6,345	—	1,45
7,614	$1,15\cdot 10^{-1}$	—
10,153	$1,37\cdot 10^{-1}$	1,90



1. ábra. A benzil-ammal lejátszóó amincseré sebességi állandójának változása 1,2-diklóretán-benzol elegyben, 25 °C-on

oka a szalicidén-anilin származékoknál kialakuló intramolekuláris hidrogénkötés [4]. Ez ugyanis a kis relatív permittivitású benzolban stabilizálja a molekulát, akadályozza az azometin-N-en az amincseréhez szükséges protonfelvételt, ezért az amincseré sebessége kicsi. Etanolos oldatban viszont az o-helyzetű OH-csoport oxigénje és az oldószermolekulák között létrejövő hidrogénkötés elősegíti a N-atom protonfelvételét a belső hídkötésből, s így lényegesen nagyobb az amincseré sebessége, mint az egyéb típusú Schiff-bázisoknál.

A 3. táblázat, illetve az 1., 2. ábra adatai szerint a vizsgált oldószerelegyben az amincseré sebessége az 1,2-diklóretán koncentrációjának függvényében nő. A se-

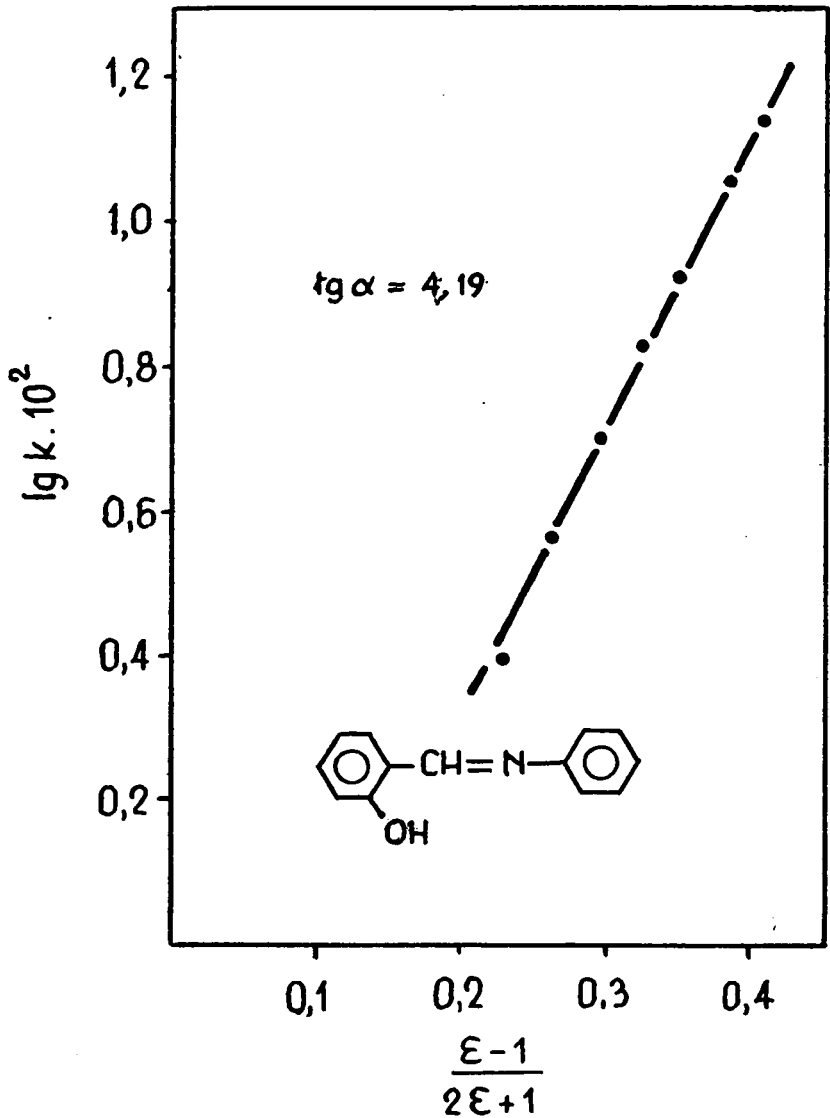


2. ábra. A benzil-aminnal lejátszódó amincsere sebességi állandójának változása 1,2-diklóretán-benzol elegyben, 25 °C-on

bességi állandó változását véleményünk szerint a reakcióközeg relatív permittivitásának növekedése okozza. Megfelel e feltevésnek a 3., 4. ábra, melyeken a mérési adatokat a

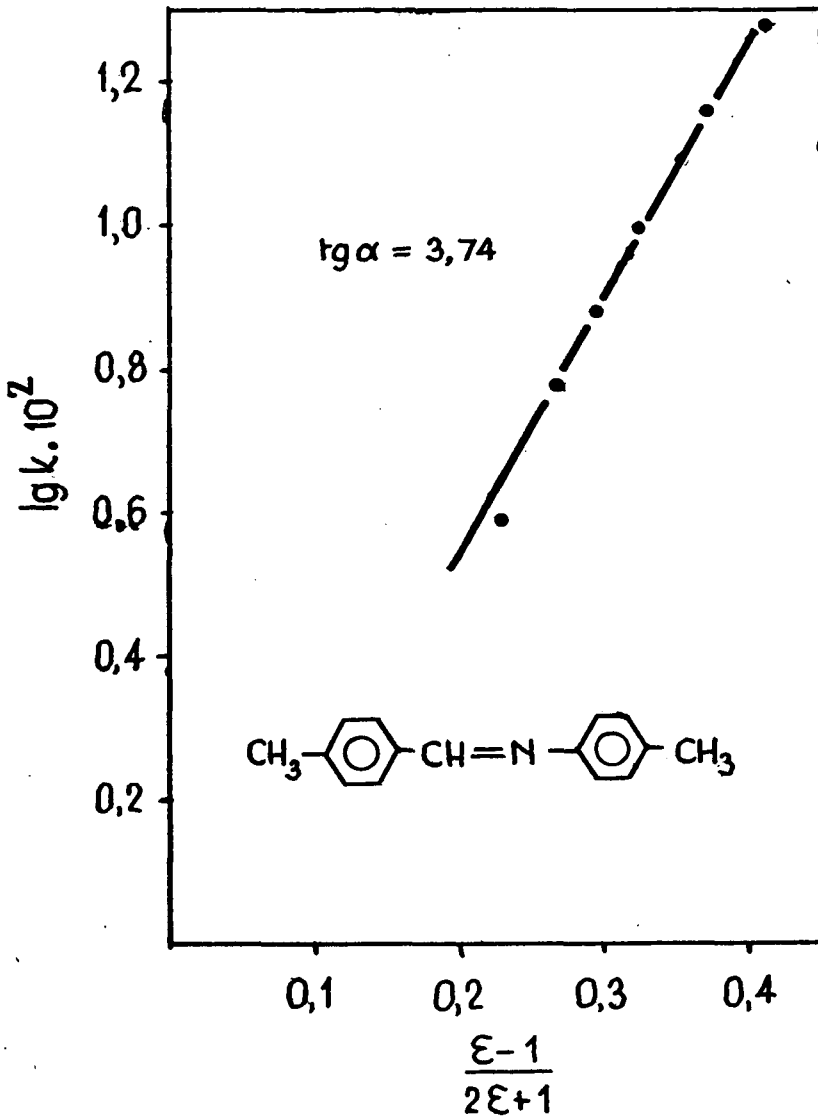
$$\lg k = \lg k_0 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \cdot A \quad (3)$$

összefüggésnek [5] megfelelően ábrázoltuk. Mint látható, a mérési pontok igen jó közelítéssel egyenest határoznak meg. Az egyenes meredeksége a két Schiff-bázisnál közel azonos (4,19, 3,74).



3. ábra. A benzil-aminnal lejátszódó amincsere sebességi állandójának változása az oldószerrelgy relatív permittivitásának [6] függvényében, a (3) egyenletnek megfelelően

Az ismertetett kísérleti eredmények alapján megállapítható, hogy aprotónos oldószerek elegyében az amincsere sebessége a (3) egyenletnek megfelelően változik az oldószerrelgy relatív permittivitásával. A sebességi állandó változása azonban sokkal kisebb mértékű, sokkal kevésbé függ az elegy összetételétől, mint etanol-benzol, vagy etanol-ciklohexán elegyben. Ez megerősíti azt a korábbi feltevésünket, hogy az utóbbi elegyekben tapasztalt igen jelentős oldószerhatást lényegében hidrogénkötések kialakulása okozza, és mellette a relatív permittivitás szerepe elhanyagolható.



4. ábra. A benzil-aminnal lejátszódó amincsere sebességi állandójának változása az oldószerkelet relatív permittivitásának [6] függvényében, a (3) egyenletnek megfelelően

Összefoglalás

Szalicilidén-anilin, illetve 4-metil-benzál-4'-metil-anilin és benzil-amin reakcióját vizsgáltuk különböző összetételű 1,2-diklóretán-benzol oldószerkeletben. A mért sebességi állandók az alábbi egyenletnek megfelelően lineárisan változnak az oldószerkelet relatív permittivitásával:

$$\lg k = \lg k_0 + \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon + 1} \cdot A$$

Az egyenes meredeksége 4,19, illetve 3,74.

IRODALOM

- [1] NAGY P.: Juhász Gyula Tanárképző Főisk. Tud. Közl. 114. 1982.
- [2] NAGY P.: Acta Chim. Acad. Sci. Hung., 112. 461. 1983.
- [3] NAGY P.: Magy. Kém. Folyóirat, 80. 92. 1974.
- [4] KAZIČUNA, L. A., KUPLETŠKAJA, N. B., KUKOTY, B. SZ., POLSZTJANKÓ, L. L., KOLESZNYIK, JU. A., MISCSENKÓ, V. V.: Fiziceszkie probl. spektroskopij, 1. 279. 1962.
- [5] LADLER, K. J., EYRING, H.: Ann. New York Acad. Sci., 39. 303. 1940.
- [6] LANDOLT—BÖRNSTEIN: Physikalische-chemische Tabellen, 1959. Zweiter B., 6. Teil. I. 792.

LÖSUNGSMITTELEFFEKT BEIM AMINAUSTAUSCH DER SCHIFF-BASEN, III. VERÄNDERUNG DER GESCHWINDIGKEITSKONSTANTE IN 1,2-DICHLORAETHAN-BENZOL-LÖSUNGSMITTELGEMISCHEN

PÁL NAGY

Es wurde die Reaktion von Salicyliden-Anilin- bzw. 4-Methyl-benzal-4'-methyl-anilin und Benzyl-amin in verschiedenen zusammengesetzten 1,2-Dichloräthan-Benzol-Lösungsmittelgemischen

untersucht. Die gemessenen Geschwindigkeitskonstanten wechseln der nachstehenden Formel gemäss linear mit der relativen Permittivität des Lösungsmittelgemisches:

$$\lg k = \lg k_0 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \cdot A$$

Die Steilheit der Geraden beträgt 4,19 bzw. 3,74.

ВЛИЯНИЕ РАЗБАВИТЕЛЯ ПРИ АМИНООБМЕНЕ БАЗИСОВ Schiff, III (ИЗМЕНЕНИЕ КОНСТАНТА СКОРОСТИ РЕАКЦИИ В СМЕСИ РАЗБАВИТЕЛЯ 1, 2 ДИХЛОЭТАН-БЕНЗОЛА

ПАЛ НАДЬ

Нами были проанализированы реакции салицилиден-анилина, 4-метил-бензал-4'-метиланилина и бензил-амин в различном по своему составу смеси разбавителя 1,2 дихлорэтан-бензола. Установленные нами константы скорости реакции линейно изменяются с релятивной пермиттивностью смеси разбавителя по формуле:

$$\lg k = \lg k_0 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \cdot A$$

Крутизна прямой составляет 4,19 и 3,74.

EXTREMÁLIS TULAJDONSÁGÚ TOROIDOK

SZILASSI LAJOS

Jórészt már az ókorban tisztázott kérdés, hogy adott tulajdonságú (pl. szabályos) sokszögekből építkezve legkesvesebb hány sokszögre van szükségünk egy egyszerű poliéder előállításához. Nyitott kérdéshez csak úgy juthatunk, ha a poliédert határoló lapokra és testszögletekre egyre bonyolultabb feltételeket szabunk.

Lényegesen összetettebb kérdéscsoporthoz jutunk, ha ugyanezt a problémát a magasabb nemszámú poliéderek körében vetjük fel.

Toroidnak (tórusz-szerű poliédernek) nevezzük azokat a közönséges poliédereket, melyeknek a nemszáma $p \geq 1$.

Egy poliéder nemszáma p , ha topológiailag ekvivalens egy p darab „fogantyúval” ellátott gömbsel (1. ábra). Speciálisan a gömb nemszáma 0, a tórusz nemszáma 1. A p nemszámú, egyszerű sokszögekkel határolt közönséges poliéderre érvényes az Euler-féle $L + C - E = 2 - 2p$ összefüggés, ahol L a lapok, C a csúcsok, E az élek számát jelenti [1].

Nevezzünk egy toroidot szabályosnak, ha minden lapjának ugyanannyi éle van, és minden csúcsába ugyanannyi él fut be.

Legyen egy $p=1$ nemszámú szabályos toroid egy lapjára illeszkedő éleinek száma a , az egy csúcsára illeszkedő éleinek száma b . Az $L \cdot a$ és $C \cdot b$ szorzatok egyaránt az élek számának a kétszeresét adják, mivel minden él pontosan két lapra és két csúcsra illeszkedik. Ezek, valamint az előbb említett Euler-féle összefüggés alapján kapjuk, hogy

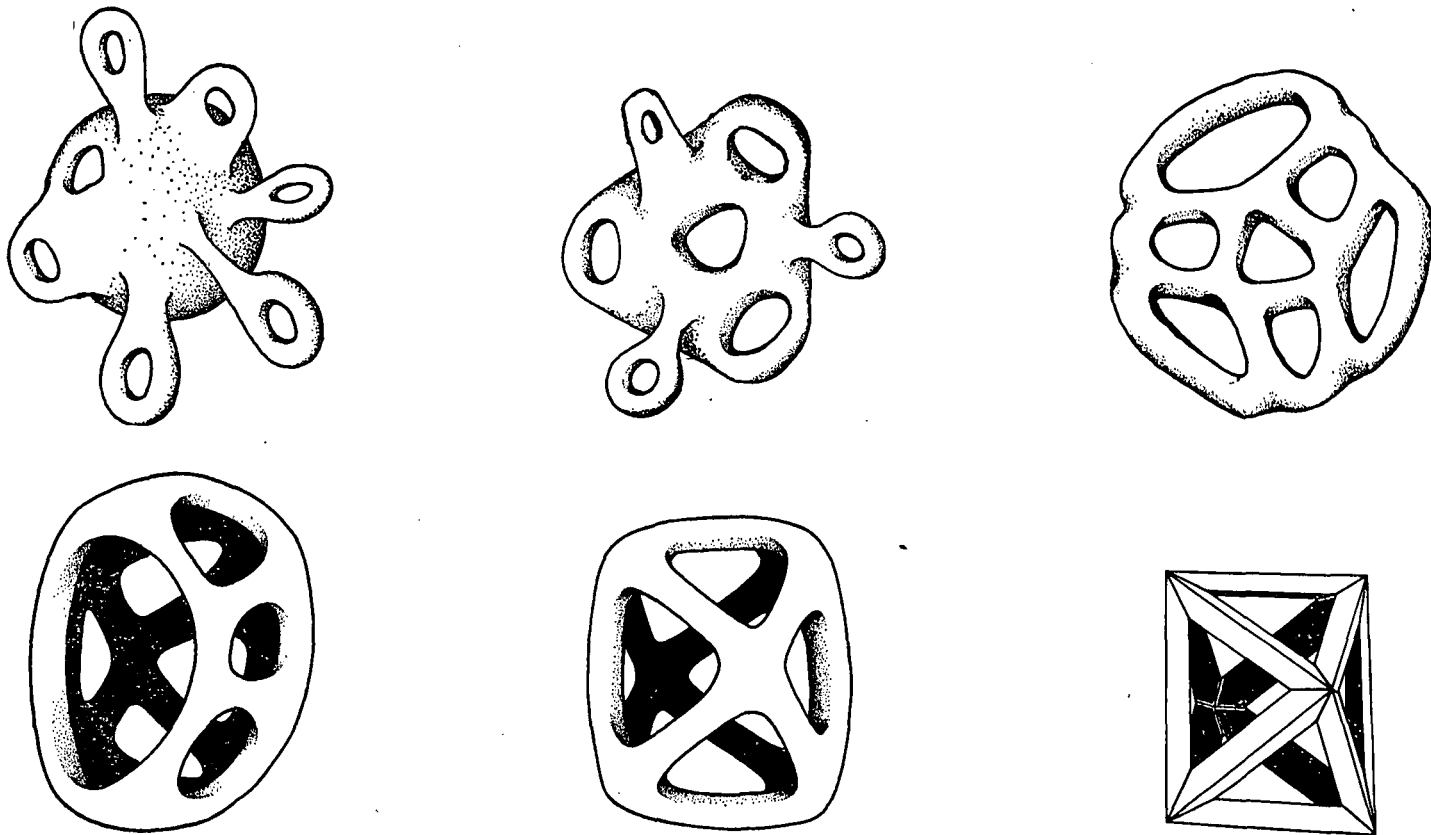
$$\frac{2E}{a} + \frac{2E}{b} - E = 0,$$

ebből pedig $E > 0$ -t kihasználva az

$$a = 2 + \frac{4}{b-2}$$

diofantoszi egyenlethez jutunk. Az egyenletet csak három olyan (a, b) számpár elégíti ki, amely eleget tesz az $a \geq 3$ és $b \geq 3$ feltételnek. Eszerint a $p=1$ nemszámú szabályos toroidok — az egy lapra ill. csúcsra illeszkedő élek száma szerint osztályozva — három osztályba sorolhatók: $S_1: a=3, b=6$; $S_2: a=4, b=4$; $S_3: a=6, b=3$.

Mint közismert, a sík egybevágó szabályos sokszögekkel történő hézagmentes lefedésének csak három módja van, a szabályos háromszögekkel, négyzetekkel és szabályos hatszögekkel való lefedés. A három parkettázás topológiailag éppen az előző három esetnek felel meg. Ha egy ilyen kiparkettázott síkból kiragadunk egy „elég nagy” téglalapot, és összeragasztjuk a szemben levő éleit, akkor egy olyan tóruszra rajzolt térképhez jutunk, amely topológiailag szabályos. Ha ennek a térképnek elég



1. ábra $p=7$ nemszámú felületek

Az 1. ábra rajzait Sinkó János grafikus (Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Rajz- Művészettörténeti Tanszéke) készítette.

sok tartománya van, akkor a síklapokkal való realizálásnak nincs elvi akadálya. Mondhatjuk tehát, hogy mindhárom osztályban végtelen sok szabályos toroidot elő tudunk állítani. Érdekes kérdés azonban, — mint azt L. ALAOGU és J. H. GIESE [2] felvetette — hogy legalább hány lapra illetve csúcsra van szükségünk egyes az osztályokba tartozó szabályos toroidok előállításához, esetleg szigorítva a kikötést azzal, hogy a toroid lapjai — vagy testszögletei — az egybevágóság szempontjából minél kevesebb osztályt alkossanak.

Az adott tulajdonságú — nem feltétlenül szabályos — minimális lapszámú toroidokkal kapcsolatos legfontosabb ismereteket B. M. STEWART nyomán [3] — a következőképpen foglalhatjuk össze:

Jelölje $F(j, p)$ azoknak a közönséges toroidoknak a minimális lapszámát, melyeknek nemszáma p , és minden lapjuk rendelkezik a j tulajdonsággal, ahol j az alábbi tulajdonságok egyikét jelöli:

- (1) egyszerű sokszög,
- (2) konvex,
- (3) szigorúan konvex (azaz szomszédos élei nem esnek egy egyenesbe),
- (4) háromszög,
- (5) szabályos,
- (6) szabályos háromszög,
- (7) szabályos ötszög,
- (8) négyzet.

Az (1), (2), (3), (4), (5) tulajdonságú poliédereket vizsgálva felvetjük azt a kérdést is, hogy a lapok között hány nem egybevágó van. Jelölje a nem egybevágó lapok számát k , az ilyen poliéderek minimális lapszámát pedig $F(j, k, p)$.

$F(j, p)$ -re, ill. $F(j, k, p)$ -re az alábbi állítások igazak:

$$A_1 : F(1, 1) = F(1, 4, 1) = 7$$

$$A_2 : F(2, 1) \cong F(3, 1) \cong F(3, 2, 1) \cong 9$$

$$A_3 : F(1, p) \cong 6 + 3p$$

$$A_4 : F(1, 4, p) \cong 9 + 3p$$

$$A_5 : F(2, 2) \cong F(3, 2) \cong F(3, 6, 2) \cong 14$$

$$A_6 : F(2, p) \cong F(3, p) \cong F(3, 6, p) \cong 6 + 4p \quad (p \cong 2)$$

$$A_7 : F(3, 2, 2) \cong 16$$

$$A_8 : F(3, 2, p) \cong 7p \quad (p \cong 3)$$

$$A_9 : F(3, 2, p) < 7p \quad (p \cong 14)$$

$$A_{10} : F(4, 1) = F(4, 7, 1) = 14$$

$$A_{11} : F(4, 2, 1) \cong 36$$

$$A_{12} : F(4, 1, 1) \cong 36$$

$$A_{13} : F(5, p) \cong F(5, 2, p) \cong 2 + 19p$$

$$A_{14} : F(5, 3, 2) \cong 34; F(5, 3, 3) \cong 38$$

$$A_{15} : F(5, 4, p) \cong 54 + 2p \quad 4 \cong p \cong 11; F(5, 4, 12) \cong 90$$

$$A_{16}: F(6, p) \cong 20 + 28p$$

$$A_{17}: F(7, p) \cong 32 + 48p$$

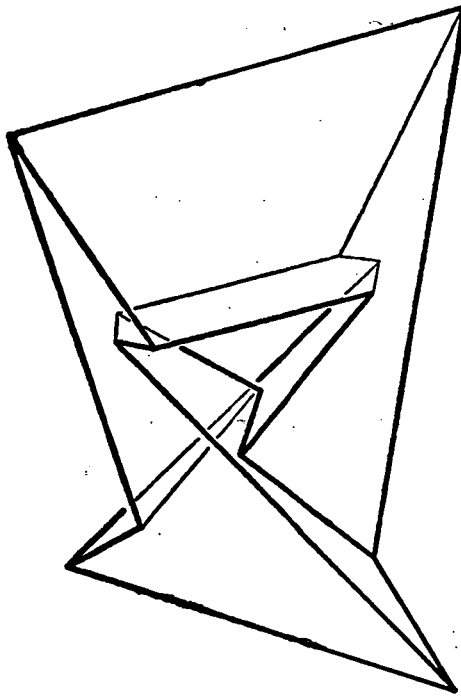
$$A_{18}: F(8, p) \cong 54 + 42p$$

Az itt összefoglalt 18 állítás mindegyikére található [3]-ban bemutatott példa, vagy bizonyítás.

Ebben a dolgozatban a fenti állításokat igazoló poliéderek (pl. az A_1 , A_2 és A_{10} állításban szereplő minimális lapszámú szabályos toroidok) további elemzésével, majd az A_{11} és A_{12} állítások finomításával foglalkozunk, megmutatva például, hogy 36 helyett 24 egybevágó háromszög is elegendő egy $p=1$ nemszámú toroid előállításához.

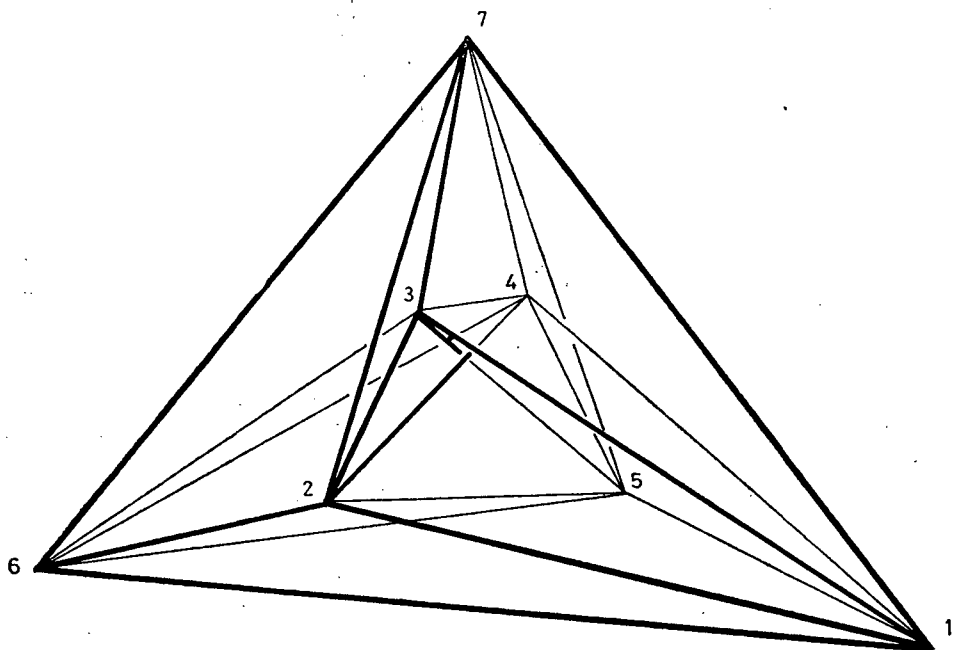
1. Az A_1 állításban szereplő — 1977-ben felfedezett [4] — hétlapú toroid lapjai olyan egyszerű sokszögek, melyek közül bármely kettőnek van közös éle, azaz bármely kettő szomszédos (2. ábra). Ez azt jelenti, hogy hét síklappal is realizálható az ún. Heawood-féle tóruszra rajzolt hét tartományú térkép, amelynek bármely két tartománya szomszédos. (Így ez a térkép csak akkor színezhető ki úgy, hogy a közös határvonalú tartományok különböző színűek legyenek, ha mind a hét tartomány különböző színt kap. A poliéder további érdekessége, hogy szabályos: minden lapja hatszög és minden csúcsába három él fut be. (A konstruálásához szükséges adatok [3]-ban, vagy [4]-ben megtalálhatók.)

Ennek a poliédernek a topológiai értelemben vett duálisa az A_{10} állításban szereplő ún. Császár-poliéder, melyet Császár Ákos fedezett fel 1949-ben [5]. A dualitásból adódóan ez a poliéder is szabályos: minden csúcsába hat él fut be, lapjai három-



2. ábra. Hétlapú szabályos toroid: bármely két lapjának van közös éle

szögek, s míg az előzőben bármely két lapnak volt közös éle, itt bármely két csúcsnak van közös éle, azaz nincs átlója (3. ábra).



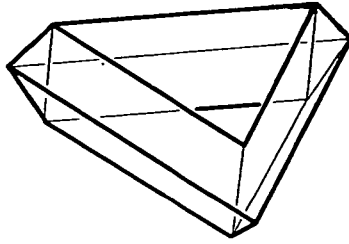
3. ábra. Hétszűcsű szabályos toroid: bármely két csúcának van közös éle

A 2. ill. 3. ábrán bemutatott poliéderek nyilvánvalóan a szabályos toroidok S_1 ill. S_3 osztályába tartozó minimális lapszámú toroidok. Az Euler-féle összefüggést, valamint a toroidok közöséges poliéder voltát kihasználva az is belátható, hogy sem hétnél kevesebb lapú, sem hétnél kevesebb csűcsű toroid nem létezik, így az A_1 és A_{10} állításokban valóban indokolt az egyenlőségjel használata.

A szabályos toroidok S_2 osztályába tartozó minimális lapszámú toroid hat egybevágó szimmetrikus trapézból és három egybevágó téglalapból áll (4. ábra). Állításunk igazolására szemeljünk ki az S_2 osztály egy tetszőleges poliéderének egy A csűcsát. Az A csűcsra illeszkedő négy lap mindegyikére további három csűcs illeszkedik. A szomszédos lapoknak A -n kívül még egy közös csűcsuk van. Több nyilvánvalóan nem lehet, mert ekkor a két lap síkja egybeesne. A közös éllel nem rendelkező (szemben fekvő) lapoknak A -n kívül nem lehet további közös csűcsa, mert így a két lapnak lenne az A csűcsra illeszkedő metszészvonala, így ellentmondásba kerülne azzal, hogy az S_2 osztályt közöséges poliéderek alkotják. Eszerint minden S_2 -beli toroidnak van legalább kilenc csűcsa, így a 4. ábra valóban egy minimális lap- és csűcsszámú S_2 -beli toroidot ábrázol.

Ez a toroid támasztja alá az A_2 állítást. A fentiek alapján azonban nem írhatunk egyenlőségjelet az $F(3, 2, 1) \equiv 9$ egyenlőtlenségjel helyére, mivel az A_2 állítás feltételei között nem szerepel a szabályos megszorítás.

Ha ebből a kilenc lapú és kilenc csűcsű toroidból több egybevágót egymáshoz illesztünk az egybevágó lapok mentén, akkor ezzel olyan 1-nél magasabb nemszámú toroidokhoz jutunk, melyek indokolják az A_6 , A_7 és A_8 állítást. Némely nemszám



4. ábra. Kilenclapú, kilenccsúcsú szabályos toroid

esetén kaphatunk az A_8 -ból adódónál finomabb eredményt is. Pl. a $p=7$ nemszámú toroidokra A_8 -ból $F(3, 2, 7) \cong 7 \cdot 7 = 49$ adódik, az 1. ábrán bemutatott $p=7$ nemszámú toroid, — melyet háromélű prizma alakú rudakból épített élvázis oktaédernek is tekinthetünk — 12 db egybevágó hatszögből és $8 \cdot 3 = 24$ egybevágó szimmetrikus trapézából áll, így ez alapján kimondhatjuk, hogy $F(3, 2, 7) \cong 36$.

2. Az eredeti Császár-poliéder [5]-ben (és [3]-ban is) leírt numerikus adatait vizsgálva kitűnt, hogy a poliéder lapszögei között vannak olyanok, melyek igen közel vannak a 0° -hoz, ill. 360° -hoz, így a poliéder modellje „zsúfoltnak” tűnik. Egy „szellősebb” változat keresése érdekében célszerűnek tűnt egy olyan számítógépi programot készíteni, amely a hét csúcs derékszögű koordinátáiból kiindulva először ellenőrzi, hogy a hét pont által meghatározott poliéder nem önátmetsző-e, majd kiszámítja a poliéder éleinek hosszát, élszögeit és lapszögeit. A számítógépi programot alkalmazva a koordináták „finom” változtatásával sikerült egy szellősebb, és több szempontból is tetszetősebb változatot kapni. Sőt a hét pont helyét, egymáshoz való viszonyát alapvetően átrendezve sikerült egy az eredetitől lényegesen különböző, de a Császár-poliéder összes tulajdonságával rendelkező változathoz jutunk. Az 1. táblázatban C_0 jelöli az eredeti, C_1 az ettől kissé eltérő változat, C_2 a lényegesen eltérő változat numerikus adatait.

A poliéderek modelljeinek az elkészítéséhez tudnunk kell még, hogy a hét pont által meghatározott $\binom{7}{3} = 35$ háromszög közül melyik az a 14, amely a poliéder felületét alkotja, és ezek milyen sorrendben csatlakoznak egymáshoz. A 2. táblázatban ezeket a háromszögeket a csúcsaik számával adjuk meg. Megadjuk továbbá, hogy az egy-egy csúcsba befutó élek milyen ciklikus sorrendben követik egymást.

Az 1. táblázatban megadott koordinátákat vizsgálva kitűnik, hogy — mindhárom változatban — az 1. és 6., 2. és 5., valamint a 3. és 4. csúcs egymásnak a koordinátarendszer z tengelyére vonatkozó tükörképe, így a 2. táblázatban egymás alá írt háromszögek nyilvánvalóan egybevágók, tehát valóban hét különböző háromszög-pár alkotja a poliédert, mint azt A_{10} állítja. Ugyancsak egybevágók az előbbi csúcs-párokhoz tartozó testszögletek is. Így a poliédernek négy nem egybevágó testszöglete van.

Az 1. táblázat adatait vizsgálva kitűnik, hogy C_0 és C_1 kapcsolata valóban szorosabb, mindkettőnek ugyanott vannak konkáv lapszögei, folytonosan változtatva a csúcsok koordinátáit átalakítható egyik a másikká úgy, hogy eközben soha ne legyen önátmetsző a poliéder. C_1 -re és C_2 -re ugyanez nem mondható el, csak topológiaiilag egyeznek meg.

C_0 -nak a legkisebb élszöge a $2-7-3$ szög alig több 7° -nál. C_1 -ben ezt az élszögek szempontjából kritikus $(2-3-7)$ háromszöget sikerült egyenlőszárúvá alakítani, amelynek az alapon fekvő szögei több, mint 15° -osak. C_1 -ben az $(1-6-2)$ egyenlő-

1. táblázat

Csúcs	C ₀			C ₁			C ₂		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1.	3	-3	0	$4\sqrt{15}$	0	0	-3	4	$\frac{13\sqrt{2}}{2}$
2.	3	3	1	0	8	4	0	12	0
3.	1	2	3	-1	2	11	12	0	$12\sqrt{2}$
4.	-1	-2	3	1	-2	11	-12	0	$12\sqrt{2}$
5.	-3	-3	1	0	-8	4	0	-12	0
6.	-3	3	0	$-4\sqrt{15}$	0	0	3	-4	$\frac{13\sqrt{2}}{2}$
7.	0	0	15	0	0	20	0	0	$\frac{26\sqrt{2}}{3}$

Élek	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög
(1-6)	8,49	153°28'	30,98	126°52'	10	76° 8'
(2-5)	8,49	321° 3'	16	343°44'	24	70°32'
(3-4)	4,47	253°24'	4,47	256°53'	24	54°26'
(2-4)=(5-3)	6,71	78°20'	12,25	69° 8'	24	51° 3'
(2-3)=(5-4)	3	216°23'	9,27	208°37'	24	52°43'
(3-7)=(4-7)	12,21	268°39'	9,27	279°25'	12,89	340° 8'
(2-7)=(5-7)	14,63	18°17'	17,89	35°54'	17,15	74°25'
(1-5)=(6-2)	6,08	87°29'	17,89	90°	18,69	339°19'
(1-2)=(6-5)	6,08	44°17'	17,89	67° 6'	12,55	156°51'
(1-4)=(6-3)	5,1	352° 5'	18,3	343°23'	12,55	204°28'
(1-3)=(6-4)	6,16	58° 7'	19,92	57° 6'	17,36	41°40'
(1-7)=(6-7)	15,59	76°20'	25,3	56°50'	5,86	243°30'

2. táblázat

A Császár-poliéder lapjai:

(1-6-2) (1-4-2) (2-4-5) (1-3-4) (1-5-7) (5-4-7) (4-6-7)
(6-1-5) (6-3-5) (5-3-2) (6-4-3) (6-2-7) (2-3-7) (3-1-7)

Csúcs	Szomszédainak ciklikus sorrendje					
1.	3,	4,	2,	6,	5,	7
2.	6,	1,	4,	5,	3,	7
3.	2,	5,	6,	4,	1,	7
4.	5,	2,	1,	3,	6,	7
5.	1,	6,	3,	2,	4,	7
6.	4,	3,	5,	1,	2,	7
7.	1,	5,	4,	6,	2,	3

szárú háromszög csúcsszöge 120°, az (1-5-7) háromszög pedig egyenlőszárú derékszögű. (A. 3. ábra a C₁ poliéder axonometrikus képe.) A C₂ poliéder csúcsait úgy választottuk, hogy az 1, 6, 3, 4 csúcsok szabályos tetraédert alkossanak. Itt a konstrukció szempontjából az (1-2-4) háromszög „kritikus”. Az 1,6 csúcs-pár alkalmas megválasztásával elértük, hogy ez a háromszög egyenlőszárú legyen, és az alapon fekvő szögei több, mint 17°-osak.

Felvethető a kérdés, hogy a koordináták változtatásával kaphatunk-e ezeknél lényegesen „szellősebb” változatokat. létezik-e az eddigi két változattól is lényegesen eltérő további átló nélküli toroid. C_1 és C_2 lényegesen különböző volta sugallja a kérdést, hogy az először említett hétlapú toroidnak van-e ettől lényegesen különböző változata.

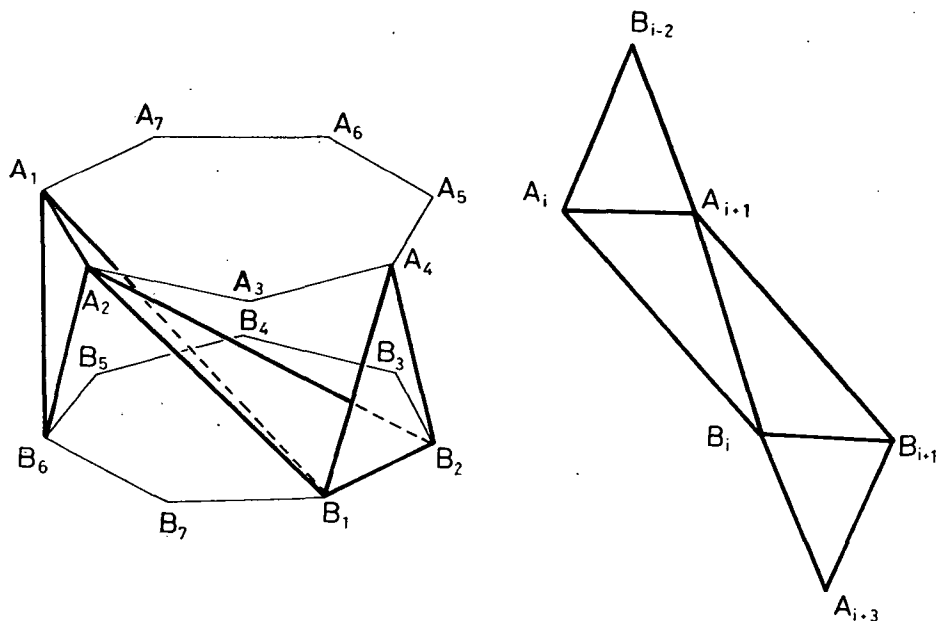
3. A tóruszra rajzolható Heawood-féle hétszínű térkép poliéderekkel való realizálása az A_1 állításon kívül még több érdekes poliéder konstruálására ad lehetőséget. Pl. Stewart konstruált egy olyan szabályos háromszögekből, négyzetekből és szabályos hatszögekből álló toroidot, melynek a lapjait alkalmas módon színezve minden szín szomszédos lesz az összes többivel ([3] 198—199. old.). Ugyancsak Stewart állított elő egy olyan toroidot is, amelynek egy-egy részét alkalmas módon színezve minden szín szomszédos lesz az összes többivel, ugyanakkor mind a hét — különböző színű — tartománya egybevágó is egymással ([3] 202—203. old.). Ennek minden tartománya két téglalapból, egy háromszögből és további két — eléggé bonyolult — általános négyszögből áll. Ezt az alakzatot sikerült úgy egyszerűsíteni, hogy minden tartománya négy háromszögből áll, melyek közül kettő-kettő egybevágó.

Előállításához tekintsük az A_1, A_2, \dots, A_7 szabályos hétszöget. Forgassuk el a középpont körül $2,5 \cdot \frac{360^\circ}{7}$ nagyságú szöggel, majd toljuk el a síkjára merőleges irányban. Ily módon a B_1, B_2, \dots, B_7 szabályos hétszöghöz jutunk. Színezzük azonos színűre, és nevezzük egy tartománynak az $A_i A_{i+1} B_{i-2} \Delta$, $A_i A_{i+1} B_i \Delta$, $B_i B_{i+1} A_{i+1} \Delta$, $B_i B_{i+1} A_{i+3} \Delta$ háromszögekből álló alakzatot, ahol $i=1, 2, \dots, 7$. (5. ábra). (Ha valamely i index nem esik 1 és 7 közé, akkor helyette természetesen az $1 \leq i' \leq 7$ indexet kell vennünk, ahol $i' \equiv i \pmod{7}$). Az alakzat háromszögei közül kettő-kettő egybevágó, és egyik háromszögpár egyenlőszárú. Ha az i -edik tartományt $\frac{360^\circ}{7}$ fokkal elforgatjuk a két szabályos hétszög középpontjára illeszkedő tengely körül, akkor az $(i+1)$ -edikhez jutunk. Így ezek a tartományok valóban egybevágóak, együtt egy toroidot alkotnak, és a tartományt határoló élek indexeit vizsgálva beláthatjuk, hogy mindegyik tartomány mindegyikkel szomszédos. (Pl. az i -edik tartomány $A_i B_i$ éle menti szomszédja az $(i-1)$ -edik, $A_i B_{i-2}$ éle menti szomszédja az $(i-3)$ -adik stb.)

A poliéder előállításához teszölegesen megadhatjuk a szabályos hétszög köré írt körét, és a két hétszög síkjának a távolságát, vagy pl. az $A_i A_{i+1} B_{i-2}$ egyenlőszárú háromszög oldalait. A megadott ill. kiszámított élhosszak mellett közöljük az élhez tartozó lapszög nagyságát is. A 3. táblázat a toroid három, — méreteiben különböző — változatának az adatait tartalmazza.

Ez a poliéder már önmagában is finomítja a bevezetőben közölt A_{11} állítást, hiszen eszerint $F(4, 2, 1) \leq 4 \cdot 7 = 28$, ráadásul a kapott poliéder nemcsak szabályos, hanem bármely két testszöglete is egybevágó. Még további finomításra is van lehetőség, ha hétoldalú helyett hatoldalú szabályos sokszöget veszünk a konstrukció alapjául. Ebből $F(4, 2, 1) \leq 24$ érték adódik. Ez a poliéder az előzőhöz hasonlóan állítható elő. Három — ugyancsak méreteiben különböző — változatának a numerikus adatait tartalmazza a 4. táblázat. Erre a toroidra hivatkozva kimondhatjuk tehát, hogy *létezik olyan — S_1 osztályba tartozó — szabályos toroid, melynek huszonnégy — az egybevágóság szempontjából kétféle — háromszög-lapja van, és mind a tizenkét testszöglete egybevágó.*

A 3. és 4. táblázat adatait összehasonlítva láthatjuk, hogy az utóbbi sokkal „zsúfoltabb”. Ezen az úton nem juthatunk még kevesebb lapszámú poliéderhez,



5. ábra. Hét tartományból álló szabályos toroid: bármely két tartománya szomszédos, bármely két tartománya egybevágó

3. táblázat

Hét egybevágó, páronként szomszédos tartományú toroid

él	1. változat		2. változat		3. változat	
	élhossz	lapszög:	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:
$\overline{A_i A_{i+1}}$	6	$64^\circ 1'$	6	$51^\circ 45'$	6	$43^\circ 21'$
$\overline{A_i B_{i-2}}$	6	$150^\circ 13'$	8	$152^\circ 13'$	10	$153^\circ 1'$
$\overline{A_i B_i}$	13,48	$51^\circ 12'$	14,48	$65^\circ 11'$	15,68	$74^\circ 33'$
$\overline{A_{i+1} B_i}$	10,04	$332^\circ 15'$	11,35	$325^\circ 13'$	12,84	$320^\circ 43'$

$$i = 1, 2, \dots, 7$$

4. táblázat

Húszonnégyszögű lapú, egybevágó testszögletű toroid

él	1. változat		2. változat		3. változat	
	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:	élhossz:	lapszög:
$\overline{A_i A_{i+1}}$	6	$66^\circ 50'$	6	$54^\circ 15'$	6	$45^\circ 36'$
$\overline{A_i B_{i-2}}$	6	$145^\circ 13'$	8	$147^\circ 35'$	10	$148^\circ 31'$
$\overline{A_i B_i}$	12,68	$44^\circ 5'$	13,74	$56^\circ 27'$	14,99	$64^\circ 46'$
$\overline{A_{i+1} B_i}$	9,92	$344^\circ 12'$	11,24	$340^\circ 4'$	12,74	$337^\circ 24'$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

mert pl. szabályos ötszöget véve alapul, az összes $\overline{A_i B_i}$ él egy pontra, az alakzat szimmetria-centrumára illeszkedne.

4. Mint láttuk, az S_3 osztály minimális lapszámú toroidjának (2. ábra) hét lapja van, melyek egy egybevágóság szempontjából négy osztályba, testszöglelei hét osztályba sorolhatók. Be fogjuk látni, hogy létezik olyan kilenc lapú (S_3 osztálybeli) szabályos toroid, melynek az egybevágóság szempontjából kétféle lapja, háromféle testszöglete van.

Vetítsünk egy kockát merőlegesen az egyik kiválasztott testátlójára merőleges π képsíkra! A keletkező vetület szabályos hatszög alakú, így a kocka szomszédos lapjaira illeszkedő, egymáshoz képest kitérő, π -vel párhuzamos lapátlóinak a vetületei harmadolják egymást. Ez azt jelenti, hogy a szöbänforgó lapátlók megfelelő harmadolópontjait összekötő szakaszok párhuzamosak a kiválasztott testátlóval.

Ezt kihasználva fúrjuk át a kockát egy olyan háromélű prizmával, melynek élei párhuzamosak a kocka testátlójával, és illeszkednek a kocka két-két kitérő lapátlójának a harmadolópontjaira (6. ábra).

A keletkező toroid-felület „külső” részét a kockalapokból megmaradt, egymással egybevágó, hat darab konkáv hatszög, „belső” részét pedig az áthatás során keletkezett három, egymással szintén egybevágó, konvex hatszög alkotja.

Ít jegyezzük meg, hogy az összes eddig említett poliéderek — az 1. és a 4. ábra poliédereit kivéve — van egy „jobbos” és egy „balos” változata, melyek csak síkra vonatkozó tükrözéssel vihetők át egymásba, térbeli mozgatással nem.

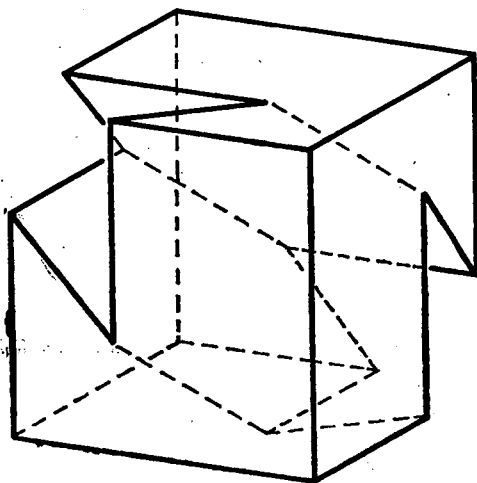
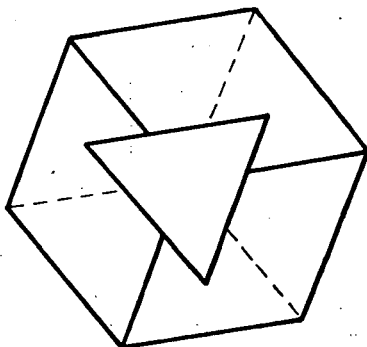
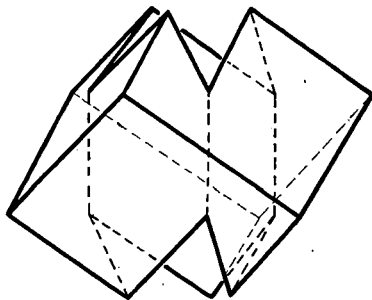
5. Az A_{11} állítás igazolása L. Alaoglu és J. H. Giese nevéhez fűződik ([2].) Az általuk előállított 36 lapú, szabályos toroidot olyan háromszöglapok alkotják, amelyek az egybevágóság szempontjából két osztályba sorolhatók. Ezt a konstrukciót finomította B. M. Stewart azzal, hogy a [2]-ben leírt poliédert csupa egybevágó, egyenlőszárú háromszögekből állította elő ([3] 250—253. old.); így az — A_{11} -nél szigorúbb — A_{12} állításhoz jutott.

Az A_{12} állítás tovább finomítható $F(4, 1, 1) \cong 24$ -re az alábbi poliéder előállításával:

Tekintsünk egy a oldalú szabályos háromszöget, forgassuk el a középpontja körül 60° -kal, majd toljuk el a síkjára merőleges irányban — később meghatározandó — x távolsággal. Az így keletkezett hat pont meghatároz hat darab a alapú és b szárú egyenlőszárú háromszöget. Ezek alkotják a keletkező toroid-felület „belső” részét. A toroid felületének a „külső” részét ezekkel egybevágó egyenlőszárú háromszögek fogják majd alkotni. Ehhez újabb hat csücsöt kell felvennünk úgy, hogy azok egymástól b , az előbb felvett csücsöktől a ill. b távolságra legyenek. A 7. ábra a poliéder Monge-féle képe.

Jelölje t az alapul vett szabályos háromszög középpontjára illeszkedő, síkjára merőleges egyenest. A keresett alakzat invariáns lesz a t körüli 120° -os elforgatásra, és centrálisan szimmetrikus az először felvett hat pontból álló „belső” felületrész szimmetria centrumára. Így az utóbb felvett hat pont Monge-féle első képe szabályos hatszög alakú.

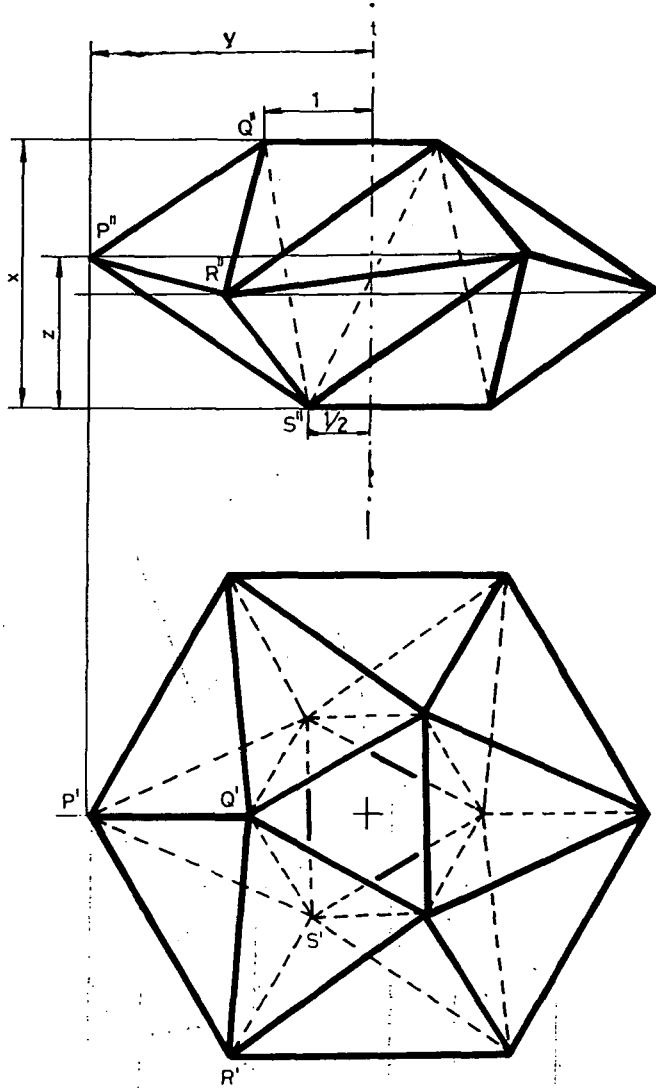
Feladatunk az, hogy úgy válasszuk meg a már említett x távolságot, — vagyis az a és b oldalak arányát — hogy a 6. ábrán jelölt P , Q , R és S pontokra teljesüljenek a $\overline{PQ}=a$, $\overline{PR}=b$ és $\overline{PS}=b$ egyenlőségek. Legyen az alapul vett szabályos háromszög köré írt körének a sugara egységnyi. Ekkor $a=3$, $b=x^2+1$, mivel $Q'S'=1$, Q és S magasság-különbsége pedig x .



6. ábra. Kétféle hatszögből álló kilenc lapú szabályos toroid

Jelölje y a P pont és a t egyenes távolságát, azaz a „külső” vetület-hatszög köré írt kör sugarát, z a P pontnak az első képsíktól mért távolságát. A $\overline{PQ} = a$ feltételből

$$(1) \quad (y-1)^2 + (x-z)^2 = 3,$$



7. ábra. Huszonnégy egybevágó, egyenlőszárú-háromszögből álló toroid

az a $\overline{PR} = b$ feltételből $\overline{P'R'} = y$ -t kihasználva

$$(2) \quad y^2 + (x - 2z)^2 = x^2 + 1,$$

valamint a $\overline{PS} = b$ feltételből a $(\overline{P'S'})^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ kihasználásával a

$$(3) \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 = x^2 + 1$$

egyenletek adódnak.

Az (1), (2), (3) egyenletekből álló egyenletrendszer pozitív gyökei: $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$,

$y = 1 + \sqrt{2}$, $z = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Ebből $b = \frac{\sqrt{15+6\sqrt{2}}}{2}$, innen pedig a poliéderfelület mo-

delljének az előállításához szükséges egyetlen adat, az $a:b$ arány, $a:b=2:\sqrt{5+2\sqrt{2}} = 2:2798$ adódik.

A kapott poliéder „belső” részét hat, a „külső” részét $2 \cdot 9 = 18$ háromszög alkotja, így valóban az A_{12} állítás helyett kimondhatjuk a szigorúbb $F(4, 1, 1) \cong 24$ állítást. *Létezik tehát egy olyan huszonnégylapú toroid, amelynek a lapjai egybevágó, egyenlőszárú háromszögek.* Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a poliéder nem szabályos, hiszen P -be öt, Q -ba hét él fut be. A testszögletek egybevágóságuk alapján két osztályba sorolhatók.

A bevezetőben említett tizennyolc állítás lényegében felvetett problémának is tekinthető, hiszen — kettő kivételével — még nem írhattunk egyenlőségjelet az egyenlőtlenységjelek helyére. A kérdéscsoport alaposabb vizsgálata minden bizonnyal további érdekes elemi geometriai összefüggés feltárásához vezetne.

IRODALOM

- [1] H. S. M. COXETER: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Bp., p. 379. 1973.
 [2] L. ALAOGU, J. H. GIESE: Uniform isohedral tori, American Math. Monthly, 53 14—17., 1946.
 [3] B. M. STEWART: Adventures among the toroids, Okemos, Michigan, Revised second edition p. 240. 1980.
 [4] SZILASSI L.: Egy poliéder, melynek bármely két lapja szomszédos, A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, 131—139. 1977.
 [5] CSÁSZÁR Á.: A polyhedron without diagonals, Acta Sci. Math. 13 140—142. 1949—50.

EXTREMALE TOROIDE

LAJOS SZILASSI

Die Arbeit befasst sich mit der Herstellung von Toroiden minimaler Blattzahl — topologisch torusartiger gewöhnlicher Polyeder — unter gegebenen Bedingungen.

Es werden zwei neue Varianten des als erstes in [5] beschriebenen diagonalfreien Toroid (C_0) vorgestellt, von denen C_1 (Abb. 3) nur in seinen Maßen, C_2 aber auch in der Anordnung der Ecken von C_0 abweicht. Tabelle 1 enthält die numerischen Daten der Toroide und Tabelle 2 die Symbole der die Oberfläche bildenden Dreiecke und ihre Anordnung.

Es wird ein Toroid vorgestellt, das sieben, paarweise benachbarte und paarweise kongruierende Bereiche hat, wo ein jeder Bereich aus vier Dreiecken besteht (Abb. 5, Tab. 3). Diese Konstruktion verfeinert die in [2] ausgesprochene Behauptung, wonach es ein 36-flächiges Toroid gibt, dessen Flächen Dreiecke sind, welche hinsichtlich der Kongruenz in zwei Klassen zu ordnen sind. Weiter zu verfeinern ist diese Behauptung auf 24, wenn anstatt des als Ausgang genommenen regelmässigen Siebenecks ein Sechseck verwendet wird (Tabelle 4). Die Körperecken dieser Toroide sind kongruent.

Auch B. M. Stewart hat die in [2] beschriebene Behauptung damit verfeinert: er konstruierte ein 36-flächiges, aus lauter kongruenten gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Toroid ([3] S. 250—253.). Durch weitere Verfeinerung dieses Ergebnisses kann ein solches Toroid auch aus 24 Flächen hergestellt werden (Abb. 6), wo die Basis der die Oberfläche bildenden gleichschenkligen Dreiecke $a=2$, und der Schenkel $b = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 2,798$.

ТОРОИДЫ ЭКСПЕРИМЕНЬНОГО ХАРАКТЕРА

СИЛАШШИ ЛАЙОШ

Настоящая работа занимается созданием тороидов минимального количества граней, которые с топологической точки зрения представляют собой обыкновенные турсообразные полиэдры.

В работе показывается два новых вида бездиагональных торида (C_0), впервые описанных в (5), один из которых от C_1 (3 схема) отличается от C_0 только по своей величине, а другой C_2 , отличается и в расположении вершин. Таблица №1 изображает нумерические данные тороидов, а на таблица №2 изображаются знаки и место треугольников, составляющих поверхность.

Нами описывается тороид, состоящий из семи попарно смежных и конгруэнтных областей, где каждая область состоит из четырёх треугольников (Схема №5, Таблица №3). Эта конструкция в некотором отношении видоизменяет определения, данные (2), согласно которому есть такой тороид, который состоит из 36 граней, грани которого такие треугольники, которые с точки зрения конгруэнтности можно разделить на две группы. Это определение относится и к 24, если вместо семиугольника за основу возьмём шестиугольник. (Таблица №4). Многогранные углы этих тороидов являются конгруэнтными.

Определения, содержащиеся в (2) отчасти видоизменены Стюартом Б. М. тем, что им был сконструирован 36 гранный тороид, состоящий только из конгруэнтных, равнобедренных треугольников (3, стр. 250—253). Как дальнейшее развитие полученных результатов, тороид данного характера можно сконструировать и из 24 граней (Схема №7), где основание равнобедренных треугольников, составляющих его поверхность, равно $a=2$, бедро $b = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 2,798$.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТБРАЖЕНИЙ $P_2^3(\mu, e)$

ЯБЛОНСКАЯ Н. В. (Одесса)

1. В разное время многими авторами с различных точек зрения было рассмотрено несколько обобщений теории геодезических отображений. Наиболее известными являются теории проективных пространств (В. Ф. Каган [1], П. А. Широков [2], Т. Вранчану [3]), конциркулярная геометрия (К. Яно [4]), теория аналитически планарных отображений почти комплексных многообразий (С. Исихара [5], Я. Тасиро [6]), голоморфно-проективных отображений келеровых пространств (Г. Оцуки, Я. Тасиро [7]).

В 1963г. Н. С. Синюковым [8—10] было предложено широкое и естественное обобщение теории геодезических отображений на основе единой геометрической идеи — теория почти геодезических отображений и соответственно бесконечно малых почти геодезических преобразований аффинносвязных и римановых пространств.

Основополагающие результаты были получены им для пространств аффинной связности без кручения.

Все перечисленные выше теории содержатся в ней как частные случаи (для пространств аффинной связности без кручения).

Нами продолжается дальнейшее развитие теории почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности с кручением.

На этом пути было введено понятие почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности, доказано существование трех типов почти геодезических отображений; подробнее изучились специальные отображения $P_2^2(e)$, $P_2^3(e)$.

В данной статье продолжают исследования почти геодезических отображений второго типа $P_2^3(\mu, e)$ пространства аффинной связности с кручением, когда структурный аффинор μ_i^h удовлетворяет условию $\mu_i^{h3} = a\mu_i^h + e\delta_i^h$.

Найдено общее представление объектов связности пространств, допускающих эти отображения.

II. Рассмотрим два пространства аффинной связности с кручением A_n и \bar{A}_n , между которыми установлено почти геодезическое соответствие P_2 .

Отображение A_n на \bar{A}_n называется почти геодезическим, если в результате этого отображения каждая геодезическая линия пространства A_n переходит в почти геодезическую \bar{A}_n [11].

Отображения P_2 характеризуется следующими основными уравнениями [11].

$$C_{ij}^n = \varphi_{(i}\delta_{j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^h, \quad (1)$$

$$\mu_{(i,j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^{h2} + K_{ia}^k\mu_j^a + K_{ja}^k\mu_i^a = \sigma_{(i}\delta_{j)}^h + \nu_{(i}\mu_{j)}^h. \quad (2)$$

Здесь C_{ij}^h, K_{ij}^h симметрическая и кососимметрическая составляющие тензора деформации P_{ij}^h объекта связности при отображении $\Pi_2: A_n \rightarrow \bar{A}_n, \mu_i^h$ — аффинор, $\varphi_i, \psi_i, \tau_i, \nu_i$ — некоторые векторы, круглые скобки обозначают симметрирование по индексам i и j , „ \prime ” — знак ковариантной производной A_n .

Условия взаимности для почти геодезических отображений второго типа имеют вид [12].

$$\psi_{(i}\mu_{j)}^{h2} + K_{ia}^h\mu_j^a + K_{ja}^h\mu_i^a = p_{(i}\delta_{j)}^h + g_{(i}\mu_{j)}^h. \quad (3)$$

Для того, чтобы исследовать отображение Π_2 нам нужно рассмотреть условия взаимности (3), в которые входят квадраты аффинора μ_i^h . Структурный аффинор удовлетворяет своему минимальному полиному. Если он имеет вид $\mu_i^{h2} = a\mu_i^h + h\delta_i^h$ и, поскольку, уравнения (1), (2), (3) у нас определены с точностью до преобразования аффинора

$$\tilde{\mu}_i^h = q\mu_i^h + p\delta_i^h \quad (4)$$

2466 Туд. козл. (4) 9. 18. Ш—1900 Кне.

то, очевидно, инварианты p и q можно выбрать так, что

$$\mu_i^{h2} = e\delta_i^h, \quad (e = \pm 1, 0) \quad (5)$$

Почти геодезические отображения $\Pi_2^2(e)$ пространства A_n на \bar{A}_n , при которых μ_i^h удовлетворяет условию (5) нами были изучены ранее [11].

Многими авторами [13], [14] рассматривались также структуры, для которых

$$\mu_i^{h3} = \pm \mu_i^h.$$

Пусть

$$\mu_i^{h3} = q\mu_i^{h2} + p\mu_i^h + c\delta_i^h.$$

Из (4) следует, что инварианты p, q, c можно выбрать так, чтобы

$$\mu_i^{h3} = p\mu_i^{h2} + e\delta_i^h, \quad (e = \pm 1) \quad (6)$$

либо

$$\mu_i^{h3} = q\mu_i^{h2} + e\delta_i^h.$$

При $p, q=0$ приходим к отображениям $\Pi_2^2(e)$ [11]. Почти геодезические отображения Π_2 пространства A_n на \bar{A}_n при которых μ_i^h удовлетворяет уравнениям (6), ($p \neq 0$) в дальнейшем мы будем обозначать $\Pi_2^2(\mu, e)$.

III. Будем находить основные уравнения отображений. Свертывая соотношения (3) с μ_k^{i2} , просиметрировав затем результат по k и j , учитывая (3), получим

$$K_{ab}^h\mu_j^{a2}\mu_i^b + K_{ab}^h\mu_i^{a2}\mu_j^b = (p_i - \psi_a\mu_i^{a2})\mu_j^{h2} + (p_j - \psi_a\mu_j^{a2})\mu_i^{h2} + (g_a\mu_i^{a2} - e\psi_i)\mu_j^h + \\ + g_a\mu_j^{a2} - e\psi_j)\mu_i^h + (p_a\mu_j^{a2} + eg_j - pp_j)\delta_i^h + (p_a\mu_j^{a2} + eg_j - pp_j)\delta_j^h.$$

Из этих условий и соотношений (3), следует

$$a_{(i}\mu_{j)}^{h2} + b_{(i}\mu_{j)}^h + c_{(i}\delta_{j)}^h = 0, \quad (7)$$

где

$$a_i = ep_a\mu_i^a - p_e\psi_a\mu_i^a + eg_a\mu_i^{a2} - \psi_i,$$

$$b_i = -ep_a\mu_i^{\alpha^2} + pe\psi_a\mu_i^{\alpha^2} + \psi_a\mu_i^\alpha - g_i,$$

$$c_i = \psi_a\mu_i^{\alpha^2} - g_a\mu_i^\alpha - p_i.$$

Из (7) вытекает, что $a_i=0$, $h_i=0$, $c_i=0$. (8)

В противном случае, мы пришли бы к отображению $\Pi_2^3(e)$.

Соотношение (3) представляет собой систему неоднородных алгебраических относительно K_{ij}^h уравнений. Ее общее решение будет состоять из суммы частного решения K_{ij}^h и общего решения соответствующих однородных уравнений K_{ij}^h .

Из (3), (7), (8) следует, что

$$K_{ij}^h = e(\psi_a\mu_i^{\alpha^2} - g_a\mu_i^\alpha)\mu_j^{\alpha^2} - e(\psi_a\mu_j^{\alpha^2} - g_a\mu_j^\alpha)\mu_i^{\alpha^2} + (ep_a\mu_i^\alpha + \psi_i)\mu_j^h - (ep_a\mu_j^\alpha + \psi_j)\mu_i^h.$$

Поскольку в каждой точке, в некоторой системе координат матрица μ_i^h может быть приведена к каноническому виду, то нетрудно проверить, что общее решение системы однородных уравнений

$$K_{ia}^h\mu_j^\alpha + K_{ja}^h\mu_i^\alpha = 0$$

будет иметь вид

$$K_{ij}^h = T_{ij}^h + eT_{\alpha\beta}^h\mu_i^{\alpha^2}\mu_j^\beta - eT_{\alpha\beta}^h\mu_j^{\alpha^2}\mu_i^\beta.$$

Следовательно, справедлива теорема

Теорема I. Почти геодезические отображения $\Pi_2^3(\mu, e)$ характеризуются уравнениями

$$\hat{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_{(i}\delta_{j)}^h + \psi_{(i}\mu_{j)}^h + e(\psi_a\mu_i^{\alpha^2} - g_a\mu_i^\alpha)\mu_j^{\alpha^2} - e(\psi_a\mu_j^{\alpha^2} - g_a\mu_j^\alpha)\mu_i^{\alpha^2} + (ep_a\mu_i^\alpha + \psi_i)\mu_j^h - (ep_a\mu_j^\alpha + \psi_j)\mu_i^h + T_{ij}^h + eT_{\alpha\beta}^h\mu_i^{\alpha^2}\mu_j^\beta - eT_{\alpha\beta}^h\mu_j^{\alpha^2}\mu_i^\beta, \quad (9)$$

$$\mu_{(i,j)}^h = \tau_{(i}\delta_{j)}^h + S_{(i}\mu_{j)}^h, \quad (10)$$

где φ_i , ψ_i , g_i , p_i , τ_i , S_i — векторы, T_{ij}^h — произвольный кососимметрический тензор.

IV. Перейдем к задаче определения связности с кручением, относительно которой данная структура удовлетворяет условиям (10).

Нетрудно показать, что соотношения (10) могут быть заменены эквивалентными им условиями в разрешенной относительно ковариантной производной от аффинора μ_i^h форме.

$$\mu_{i,j}^h = \tau_i\delta_j^h + S_i\mu_j^h + B_{\alpha j}^h\mu_i^\alpha - B_{\alpha i}^h\mu_j^\alpha - B_{ij}^\alpha\mu_\alpha^h - eB_{\beta\gamma}^\alpha\mu_i^\beta\mu_j^\gamma\mu_\alpha^{\alpha^2} + peB_{\alpha\beta}^h\mu_i^\alpha\mu_j^\beta,$$

где B_{ij}^h — произвольный кососимметрический тензор.

Теперь введем произвольную аффинную связность $\hat{\Gamma}_{ij}^h$ и обозначим A_n пространство с этой связностью:

$$\hat{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + A_{ij}^h \quad (11)$$

Здесь A_{ij}^h — некоторый тензор. Вследствие (11) для ковариантной производной μ_i^h в пространстве A_n получаем

$$\mu_{i,j}^h = \mu_{i,j}^h + A_{\alpha j}^h\mu_i^\alpha - A_{ij}^\alpha\mu_\alpha^h \quad (12)$$

(\wedge — символ ковариантного дифференцирования в пространстве A_n) и уравнения (10) представляются в виде

$$A_{\alpha j}^h \mu_i^\alpha - A_{i j}^\alpha \mu_\alpha^h = \mu_i^h - j - H_{ij}^h, \quad (13)$$

где

$$H_{ij}^h = \tau_i \delta_j^h + S i \mu_j^h + B_{\alpha j}^h \mu_i^\alpha - B_{\alpha j}^h \mu_\alpha^h - B_{i j}^\alpha \mu_\alpha^h - e B_{\beta \gamma}^\alpha \mu_i^\beta \mu_j^\gamma \mu_\alpha^{h\alpha} + p e B_{\alpha \beta}^h \mu_i^\alpha \mu_j^\beta \quad (14)$$

Общее решение системы (13) неоднородных алгебраических относительно A_{ij}^h уравнений состоит из суммы частного решения

$$A_{ij}^h = \frac{1}{2p^3 - 9} 4p^2 (H_{\alpha j}^h - \mu_{\alpha-j}^h) \mu_i^\alpha - 2p^2 e (\mu_{\beta-j}^\alpha - H_{\beta j}^\alpha) \mu_i^\beta \mu_\alpha^h + 9e (\mu_{\alpha-j}^h + H_{\alpha j}^h) \mu_i^{\alpha^2} + 3p (\mu_{\beta-j}^\alpha - H_{\beta j}^\alpha) \mu_i^{\beta^2} \mu_\alpha^h + 6p (\mu_{\beta-j}^\alpha - H_{\beta j}^\alpha) \mu_\alpha^h \mu_i^\beta \quad (15)$$

и общего решения соответствующей системы однородных уравнений

$$A_{ij}^h = B_{ij}^h + e B_{\beta j}^\alpha \mu_\alpha^h \mu_i^{\beta^2} + e B_{\beta j}^\alpha \mu_\alpha^h \mu_i^\beta, \quad (16)$$

где B_{ij}^h — произвольный тензор.

Следовательно, получили теорему

Теорема 2. Совокупность всех объектов связности пространств A_n , допускающих отображение $\Pi_2^3(\mu, e)$ определяются по формуле

$$\Gamma_{ij}^h = \hat{\Gamma}_{ij}^h + A_{ij}^h + A_{ij}^h,$$

где $\hat{\Gamma}_{ij}^h$ — произвольная связность с кручением, а A_{ij}^h и A_{ij}^h имеют вид (15) и (16) соответственно.

Аналогично можно получить основные уравнения отображения $\Pi_2^4(\mu, e)$, т.е. при условии

$$\mu_i^{h4} = p \mu_i^{h3} + g \mu_i^h + e \delta_i^h$$

и более высокого порядка, а также найти общее представление объектов связности пространств, соответственно допускающих эти отображения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каган В. Ф.: Субпроективные пространства, М., физматгиз, 1961, 220 с.
- [2] Широков П. А.: Избранные работы по геометрии, Казань, Казанский ун-т, 1966, 432 с.
- [3] VRANCEANU G.: Lecons de géometrie différentielle, V. II. — Acad. RPR, 1957.
- [4] YANO K.: Conircular geometry I—IV. — Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16, p. 195—200, 354—360; 442—448; 505—511.
- [5] ISHINAZA S.: Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. J., 1957, 9, № 3, p. 273—297.
- [6] TASHIRO Y.: On holomorphically projective correspondences in an almost complex space. — Math. J. Okayama Univ., 1957, 6, № 2, p. 147—152.
- [7] OTSUKI T., TASHIRO Y.: On curves in Kählerian spaces. — Math. I. Okayama Univ., 1954, 4, 1, p. 57—78.
- [8] Синюков Н. С.: Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. ДАН СССР, 1963, 151 №4, с. 781—782.
- [9] Синюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств, М., Наука, 1979 225 с.

- [10] Синюков Н. С.: Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Итоги науки и техники., Серия: Проблемы геометрии, т. 13, М., 1982, 3—25 с.
- [11] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Одесский ун-т, Одесса, 1979, 17 с. библи. 4 назв. Рукопись деп. в ВИНТИ 19 уюня 1979 г., №2190—79 ДНД.
- [12] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения второго типа для пространств аффинной связности на е-структурах. XII Всесоюзная конф. по соврем. пробл. геометрии. Тезисы докл. Минск, Белор. ун-т, 1979, 234 с.
- [13] TONG-VAN-DUC: Sur les structures définies par une 1-forme vectorielle F telle que $F^3 = \pm F$. — Kodai Math. Semin. Repts, 1973, 25, № 3, 367—376 p.
- [14] SINGH K. D., SZIVASTAVA NILIMA: On some f-structure manifolds with tozsion. — Demonstr. math., 1974, 7, №2, p. 183—196.

$\Pi^3_2(u, e)$ TÍPUSÚ MAJDNEM GEODETIKUS LEKÉPEZÉSEK EGY OSZTÁLYÁRÓL

N. V. JABLONSKAJA

1963-ban N. Sz. Szinjukov kezdeményezte az affinösszefüggő terek geodetikustartó leképezéseinek vizsgálatára kiépített elmélet kiterjesztését a geodetikus 2-síkállást megőrző, másszóval majdnem geodetikus leképezések tanulmányozására. A szerző jelen dolgozatában folytatja azokat a korábbi vizsgálatait, amelyek a nemeltűnő torziójú affinösszefüggő terekre vonatkoznak. Szükséges és elegendő feltételt igazol a $\Pi^3_2(u, e)$ típusú, majdnem geodetikus leképezés létezésére abban az esetben, amikor a teret jellemző u^k_i tenzor eleget tesz a harmadfokú

$$(u^k_i)^3 = pu^k_i + e\delta^k_i \quad (e = \pm 1)$$

egyenletnek.

ÜBER EINE KLASSE DER FAST-GEODETISCHEN ABBILDUNGEN VON TYP $\Pi^3_2(u, e)$

N. V. JABLONSKAJA

Im Jahre 1963 hat N. S. Sinjukov die Untersuchungen für fast-geodetische Abbildungen ausgedehnt. In dieser Arbeit setzt die Verfasserin ihre Untersuchungen bezüglich des affinzusammenhängenden Räumen mit nichtverschwindender Torsion fort. Eine notwendige und hinreichende Bedingung wird für die Existenz von fast-geodetischer Abbildung mit Typ $\Pi^3_2(u, e)$ bewiesen, falls die für den Raum charakteristische Tensor die Gleichung

$$(u^k_i)^3 = pu^k_i + e\delta^k_i \quad (e = \pm 1)$$

erfüllt.

TARTALOM

<i>Pintér Ferenc—Vize László—Gáti László—Klebniczki József: Impulzusüzemű festék-lézersugárzás polarizációs tulajdonságainak elméleti és kísérleti vizsgálata</i>	3
<i>Szagarda, V. V.—Keresztény István—Halász Tibor: Az optika jelentősége az oktatott fizikában</i>	31
<i>Nagy Pál: Oldószerhatás a Schiff-bázisok aminocseréjénél III.</i>	35
<i>Szilassi Lajos: Extremális tulajdonságú toroidok</i>	43
<i>Jablonszkaja, N. V.: A majdnem geodetikus $\pi_2^3(u, e)$ leképezések egy osztályáról</i>	57

INHALT

<i>Pintér, Ferenc—Vize, László—Gáti, László—Klebniczki József: Theoretische und experimentelle Untersuchung der Polarisationseigenschaften Farbstofffaserstrahlung</i>	3
<i>Szagarda, V. V.—Keresztény, István—Halász, Tibor: Die Bedeutung der Optik im Physikunterricht in der Schule</i>	31
<i>Nagy, Pál: Lösungsmittelleffekt beim Aminaustausch der Schiff-Basen, III.</i>	35
<i>Szilassi, Lajos: Extremale Toroide</i>	43
<i>Jablonskaja, N. V.: Über eine Klasse der fast-geodetischen Abbildungen von Typ $\pi_2^3(u, e)$</i> ...	57

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Пинтер, Ференц; Визе, Ласло; Гати, Ласло; Клебнишки, Йозеф: Теоретическое и экспериментальное исследование степени поляризации излучения импульсного лазера на красителе</i>	3
<i>Сагарда, В. В.; Керестень, Иштван; Халас, Тибор: Значение оптики в процессе преподавания физики</i>	31
<i>Надь, Пал: Влияние разбавителя при аминокобмене базисов (Изменение константа скорости реакции в меси разбавителя 1, 2 дихлорэтан-бензола)</i>	35
<i>Силаши, Лайош: Торойды экстремального характера</i>	43
<i>Яблонская, Н. В.: Об одном классе почти геодезических отображений $\pi_2^3(u, e)$</i>	58

Felelős kiadó: Dr. Szendrei János
84-2466 Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató
Készült mono szedéssel, íves magasnyomással, 5,5A/5 ív terjedelemben,
az MSZ 5601—59 és 5602—55 szabvány szerint
Példányszám: 225