

54683

1989 FEB 20 54683/1178

**ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE SZEGEDIENSIS
SERIES PHYSICA CHEMICA MATHEMATICA**



**A
JUHÁSZ GYULA
TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI**

SZEGED, 1987—1988.



**ACTA ACADEMIAE PAEDAGOGICAE SZEGEDIENSIS
SERIES PHYSICA CHEMICA MATHEMATICA**

**A
JUHÁSZ GYULA
TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI**

SZEGED, 1987—1988.

**TANULMÁNYOK
A FIZIKA, KÉMIA, MATEMATIKA
TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL**

Szerkesztette:

SZENDREI JÁNOS

Technikai szerkesztő:

HALÁSZ TIBOR

ISSN 0236-7742
Acta Acad. Paed. Szeged.
Ser. Phys. — Chem. — Math.
1987—1988.

A HOLOGRÁFIA SZÁMÍTÓGÉPI SZIMULÁCIÓJÁNAK SZEIZMIKUS ALKALMAZÁSA

KISS LAJOS—PINTÉR FERENC

Bevezetés

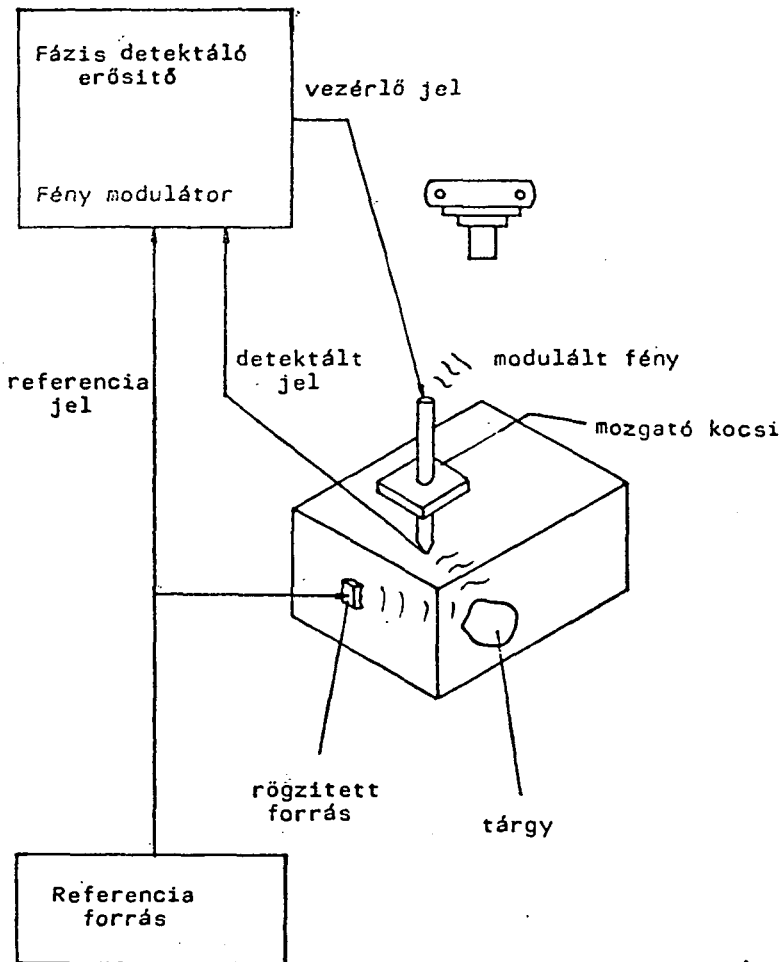
A nyersanyagkutatás leghatékonyabb felszíni geofizikai módszere a szeizmika, mind tudományos, mind alkalmazói szférákat tekintve az érdeklődés homlokterébe került. Ez kellőképpen aláhúzza a szeizmikus adatelemző eljárások továbbfejlesztésére, illetőleg az eljárások körének bővítésére irányuló kutatások fontosságát. A témával kapcsolatban az utóbbi időben megnövekedett figyelem, a holográfia széleskörű alkalmazása az optikában [1], valamint az akusztikai holográfia sikerei az ipari anyagok roncsolásmentes vizsgálata terén [2] hívták életre azt a gondolatot, hogy meg kellene próbálkozni a szeizmikus mérési adatok holográfiára alapozott kiértékelésével.

A szeizmika szokásos módszereinek valamelyikével, például robbantással vagy úgynevezett vibroszeizmikus eljárással létrehozott szeizmikus teret a föld felszínén alkalmasan elhelyezett detektorokkal regisztráljuk, majd meghatározzuk a szeizmikus hullám spektrumát és kiválasztjuk a megfelelő monokromatikus hullámösszetevőt. Ez a monokromatikus hullámkomponens információt tartalmaz a talaj inhomogén szerkezetére vonatkozóan. Az információ a hullám komplex amplitúdójába van kódolva. A holográfia képalkotó folyamatának számítógépi szimulálásával ezt az információt mintegy dekódoljuk és előállítjuk a vizsgált inhomogén struktúra valódi képét megadó függvényt.

A holográfia rövid áttekintése

A holográfiát, azaz a hullámfrontok interferometrikus rögzítésének és későbbi visszaállításának a módszerét Gábor Dénes fedezte fel [3]. Eredetileg módszerével az elektronmikroszkópok felbontóképességét kívánta tökéletesíteni. Közvetlenül a holográfia felfedezését megelőző években az elektronmikroszkóp objektívek felbontóképessége 1 nm körüli érték volt, és a szferikus aberráció okozta hiba miatt az elméleti határt 0,5 nm-re jósolták. Ennek a problémának a hatására fogalmazódott meg az a gondolat, miszerint miért ne lehetne úgy eljárni, hogy a tárgyon diffraktálódott, de az aberrációs hiba miatt torzított elektronhullámot — amely ha torz formában is, de a tárgy képét meghatározó valamennyi információt tartalmazza — a koherens háttérrel interferáltatva fotografikus emulzióban rögzítjük, majd a kapott interferenciaképet fényhullámmal átvilágítva és a mintán diffraktálódó hullámot optikai úton korrigálva, létrehozuk az eredeti tárgy képét már torzításmentesen szolgáltató fényhullámot. Annak a kísérleti igazolására, hogy a hologram átvilágításával tényleg a tárgyon diffraktálódott eredeti hullámmal ekvivalens hullámot kaphatunk, Gábor Dénes elkészítette az első hologramot, elektronhullámok helyett fényhul-

lámokkal. Ennek a kísérletnek a nyomán megszületett az optikai holográfia, amely a laser felfedezése, valamint Leith és Upatnicks témához tartozó első eredményei [4] óta az optika dinamikusan fejlődő és a gyakorlatban igen sokat alkalmazott fejezete. Az optikai holográfia sikereinek hatására fejlődött ki a holográfiának egy új ága, az akusztikai holográfia [5]. Az akusztikai holográfiában számos hologramfelvételi módszer ismeretes [6], [7]. A leglényegesebb különbség ezek között a módszerek között az akusztikai tér kimérése során alkalmazott technikában van. Detektorként leginkább a mikrofonok és piezoelektromos érzékelők terjedtek el. Ezek az eszközök közvetlenül az akusztikai hullám pillanatnyi amplitúdóját mérik. Ez lehetővé teszi, hogy alkalmas elektromos referencia jel helyettesítse az akusztikai referencia hullámot. Az akusztikai hologramot pontról pontra kell kialakítani [6], [7]. Ez úgy történik, hogy a detektor alkalmas mechanikus mozgató szerkezet segítségével a hologram felületének valamennyi pontja felett elhalad, azaz letapogatja a hologram teljes felületét. Amint az 1. ábrán látható, a letapogatást végző detektor jele a referencia jellel kerül összekeverésre olyan módon, hogy a tárgy képét meghatározó amplitúdó



1. ábra

és fázis információ vezérlő jelként a fényforráshoz kerül. A fényforrás a vezérlő jel változásainak megfelelően változó intenzitású fényt bocsát ki, miközben a detektorral szinkronban mozog a letapogatásra kijelölt felület felett. Így a fényforrás fényének intenzitását, mint a fényforrás helyzetének a függvényét, fényképezőlemezen rögzíteni lehet. Előhívás után ez a film szolgál hologramként. A hologramot koherens fényvel megfelelően átvilágítva az akusztikai tárgy hullámnak megfelelő optikai hullámhoz jutunk, azaz a tárgy vizuálisan megfigyelhetővé válik. Az általunk vizsgált szeizmikus esetben a tárgy hullám szeizmikus hullám, a hologram diszkrét matematikai operátor, a vizsgálat föld alatti térrészt jellemző rekonstruált hullám pedig a hologram felhasználásával a holografikus hullámfront rekonstrukció számítógépi szimulálása útján származtatható.

A módszer elmélete Szeizmikus mérések

A szeizmikus kísérletek első lépése a szeizmikus hullámkeltés, amely a szokásos robbantásos és egyéb hagyományos lehetőségen túl, újabban igen sokszor úgynevezett vibroszeizmikus módszerrel történik. Ennek során a szeizmikus hullámot egy változó körfrekvenciával forgatott tengelyhez excentrikusan rögzített tárcsa ütése hozza létre. A szeizmikus hullámok detektálása a felszínen elhelyezett szeizmometerekkel, az úgynevezett geofonokkal történik. A szeizmometerek, típusuktól függően, a mérési pont pillanatnyi elmozdulásával, sebességével vagy gyorsulásával arányos feszültséget hoznak létre. A szeizmometerek kimenetén megjelenő pillanatnyi feszültséget felerősítik, majd a jeleket a regisztráló egységek rögzítik. A szeizmometert a hozzá csatlakozó erősítővel és regisztrálóval együtt szeizmikus csatornának szokás nevezni. A szokásos terepi mérések lebonyolítása vonalban, láncszerűen telepített szeizmikus csatornák alkalmazásával történik. Az egyes csatornák által rögzített jelek, a szeizmogramok vagy szeizmikus regisztrátumok, eljárásunk alapvető kiinduló információi. A számolásokhoz, a szokásosnál bővebb, síkbeli rácsszerű szeizmometér elrendezést tételezünk fel, és ez a szeizmometér rács definiálja Descartes-féle vonatkoztatási rendszerünk x , y síkját. A z tengely függőlegesen felfelé mutat.

A monokromatikus tárgy hullám

A j -dik geofon által detektált szeizmikus zavart jelöljük $g(\bar{s}_j, t)$ -vel, ahol \bar{s}_j , az említett geofon helyzetét megadó vektor és t az idő. A $g(\bar{s}_j, t)$ hullámot fogjuk fel infinitezimális monokromatikus hullámok összegeként, azaz

$$g(\bar{s}_j, t) = \int G(\bar{s}_j, f) \exp(2\pi i f t) df,$$

ahol f a frekvencia. A mérési procedúra által megengedett legnagyobb frekvenciát jelölje F . A $g(\bar{s}_j, t)$ függvény tehát sávkorlátos, azaz a mintavételi tétel szerint diszkrétizálva a következő szeizmikus regisztrátummal egyenértékű adathalmazhoz jutunk:

$$g(\bar{s}_j, m\Delta t) = g\left(\bar{s}_j, \frac{m}{2F}\right),$$

ahol figyelembe vettük, hogy a mintavételi tételből származó időlépték

$$\Delta t = \frac{1}{2F}.$$

Tegyük fel, hogy a $g(\bar{s}_j, t)$ függvény nemcsak sávkorlátos, hanem időhatárolt is a következő intervallumra $0 \leq t \leq T$. Ez a feltevésünk nem teljesen korrekt, hiszen sávkorlátos függvény nem lehet időhatárolt is és így a számolások során némi hibát követünk el. Ez a hiba azonban, ha $FT \gg 1$ és ez szeizmikus regisztrátumok esetében mindig teljesül, a számolási hiba elhanyagolható. Ekkor

$$f = \frac{n}{2F},$$

ahol $n \leq 2FT$ és n egész szám. A $G(\bar{s}_j, f)$ a $g(\bar{s}_j, m\Delta t)$ szeizmikus adathalmaz diszkrét — Fourier transzformáltjaként írható fel, azaz

$$G\left(\bar{s}_j, \frac{n}{2T}\right) = \frac{1}{2F} \sum_{m=0}^M g\left(\bar{s}_j, \frac{m}{2F}\right) \exp\left(\pi i \frac{mn}{2FT}\right),$$

ahol M a j -edik geofon által detektált $g(\bar{s}_j, t)$ időhatárolt szeizmikus regisztrátumból vett minták teljes száma. Az így meghatározott $G\left(\bar{s}_j, \frac{n}{2T}\right)$ adathalmaz, rögzített n értékhez tartozó részhalmaza szolgál a vizsgált föld alatti térrész geofon pozícióként mintavételezett monokromatikus tárgy hullámának komplex amplitúdójaként.

Szintetikus hologram

A holográfia további modellezése érdekében definiáljunk egy olyan fiktív közeget, az úgynevezett referencia közeget, amelyről feltételezzük, hogy szimulált hullámaink terjesztő közege. A referencia közegtől megköveteljük, hogy legyen végtelen, homogén, izotrop és lineáris valamennyi a későbbiekben felhasználandó fizikai paraméterünk tekintetében. A referenciahullám legyen a referencia közegre vonatkoztatott hullámegyenlet gömbhullám megoldása. Ekkor a j -edik geofon helyén a referenciahullám komplex amplitúdója $V(\bar{s}_j)$ az alábbi módon adható meg:

$$V(\bar{s}_j) = \frac{B}{|\bar{s}_j - \bar{q}|} \exp\left(-i \frac{2\pi f}{v} |\bar{s}_j - \bar{q}|\right),$$

ahol B konstans, \bar{q} a referencia forrás helyzetét megadó vektor, v pedig a hullám terjedési sebessége a referencia közegben. A referenciahullámot hozzáadva az előző szakaszban megkonstruált fiktív szeizmikus tárgy hullámhoz, a geofonokkal kijelölt pozíciókban egy szimulált interferencia térhez jutunk. Az interferenciamező intenzitásának alkalmas része, $P_{\mp}(\bar{s}_j)$ szolgál szintetikus hologramként a holografikus rekonstrukciós folyamat tekintetében a következők szerint:

$$P_{\mp}(\bar{s}_j) = \frac{BA(\bar{s}_j)}{|\bar{s}_j - \bar{q}|} \exp\left(\pm i(\alpha(\bar{s}_j) - \frac{2\pi f}{v} |\bar{s}_j - \bar{q}|)\right),$$

ahol

$$A(\bar{s}_j) = |G(\bar{s}_j, f)|$$

és

$$\alpha(\bar{s}_j) = \arg G(\bar{s}_j, f)$$

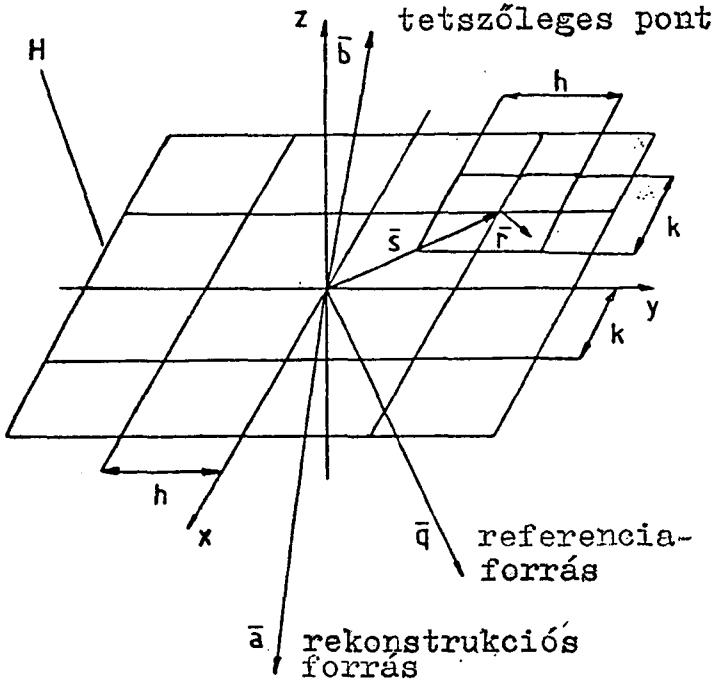
A $P_{-}(\bar{s}_j)$ operátor használható valós képek, $P_{+}(\bar{s}_j)$ pedig a konjugált képek meghatározására.

Szimulált rekonstrukció

A szimulált holografikus hullámfront rekonstrukció a Kirchhoff-féle diffrakciós elmélet alkalmazásán alapszik. A 2. ábrán definiáljuk a használt mennyiségeket.

A $W(\vec{r})$ rekonstrukciós hullám legyen a referenciahullámhoz hasonlóan gömbhullám. A frekvenciák azonban nem kell, hogy feltétlenül egyenlők legyenek, azaz a $W(\vec{r})$ komplex amplitúdó a következő:

$$W(\vec{r}) = \frac{c}{|\vec{r} + \vec{s}_j - \vec{a}|} \exp\left(-i \frac{2\pi w}{v} |\vec{r} + \vec{s}_j - \vec{a}|\right),$$



2. ábra. k a geofonok közötti távolság x irányú vetülete, h a geofonok közötti távolság y irányú vetülete, H a geofonrács által lefedett felület, \vec{s}_j a j -edik geofon helyzetét megadó vektor, D , a j -edik geofon körüli négyzet, $\vec{r}(x, y)$ a D , négyzet tetszőleges pontjába mutató vektor.

ahol C konstans és w a frekvencia. A diffrakciós elmélet szerint a rekonstruált hullám $U(\vec{b})$ komplex amplitúdója a következő integrállal állítható elő [8]:

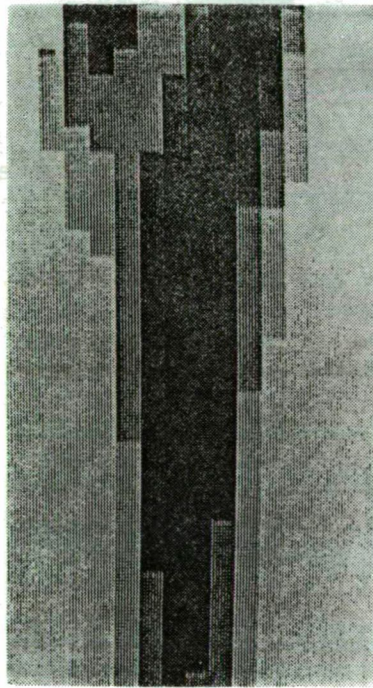
$$U(\vec{b}) = \frac{1}{2\pi} \iint P_+(\vec{r}) W(\vec{r}) \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} + \vec{s}_j - \vec{b}|} + i \frac{2\pi w}{v} \right) \cdot \frac{b_z}{|\vec{r} + \vec{s}_j - \vec{b}|} \exp\left(-i \frac{2\pi w}{v} |\vec{r} + \vec{s}_j - \vec{b}|\right) dx dy.$$

Az előző szakaszban meghatározott $P_+(\vec{r})$ valamint $W(\vec{r})$ függvények konkrét alakját az integrál kifejezésbe helyettesítve $U(\vec{b})$ közvetlenül algoritmizálható közelitéséhez jutunk [9]. A szokásos képintenzitást ezután az $U(\vec{b})U^*(\vec{b})$ szorzat kiszámításával határozzuk meg.

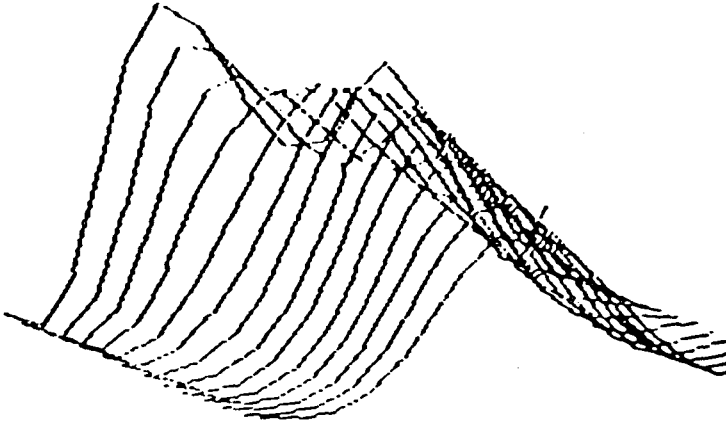
Alkalmazási tapasztalatok

A 3. fejezetben megadtuk azokat az összefüggéseket, amelyek felhasználásával a szeizmikus regisztrátumok alapján, a talaj inhomogén szerkezetének a képét jellemző függvény tetszőleges pontokban meghatározható. A konkrét számításokat az említett összefüggések alapján elkészített számítógépi programrendszerrel végeztük el. Az eredmények vizuális megjelenítését a rendszer grafikus modulja tette lehetővé.

A geofizikai barnaszén kutatási, feltárási program keretei között nyílt alkalom az előzőekben leírt holografikus módszer kipróbálására. A geofizikai kutatások fő célja a legjelentősebb törések meghatározása volt egy tervezett bányászati fővágat körzetében [10]. A szeizmikus mérések szokásos kiértékelése törések jelenlétét jelezte. Izgalmas kérdésként merült fel ezután, hogy a holografikus eljárás vajon képes-e a törések jelenlétének kimutatására, a törések méreteinek, alakjának esetleges megadására. 120 szeizmikus regisztrátum alapján végeztük az értékelést. Az adatok a legjelentősebbnek detektált törésvonal felett vonalban letelepített szeizmikus csatornacsoportoktól származtak. A feldolgozás eredményei a 3. és a 4. ábrán láthatók, ame-



3. ábra



4. ábra

lyek a normál szeizmikus feldolgozás és a kutatófúrások alapján elvégzett értékelésekkel összhangban vannak.

Ezek az eredmények egyértelműen igazolják a holográfia számítógépi szimulációjára alapozott módszer alkalmazhatóságát geofizikai kutatások során földtani inhomogenitások kimutatására.

IRODALOM

- [1] R. I. COLLIER, C. B. BRUCKHARDT, L. H. LIN: Optical Holography, Academic Press, New York. (1971).
- [2] B. P. HILDEBRAND: Holograms, ultrasound computers combined to detect flaws, Industrial Research and Development November, 102—104, (1982)
- [3] D. GABOR: A New Microscopy Principle, Nature 161, 777—778 (1948)
- [4] E. N. LEITH, I. UPATNICKS: Reconstructed wavefronts and communication theory, J. Opt. Soc. Am. 52, 1123—1130 (1962)
- [5] P. GREGUS: Techniques and information content of sonoholograms, I. Phot. Sci. 23, 143—144, (1966)
- [6] E. CAMATINI: Optical and Acoustical Holography, Academic Press, New York, (1972)
- [7] G. WADE: Acoustical Holography Vol. 4., Plenum Press, London, (1972)
- [8] M. BORN, E. WOLF: Principles of Optics, 5th. ed., Pergamon Press, Oxford, (1975)
- [9] L. KISS: Computer Simulation of Holography for Seismic Purposes, Mathematics and Computers in Simulation, 28, 325—330 (1986)
- [10] Annual Report of ELGI of Hungary, (1980—1984)

DIE RECHNENMASCHINENSIMULATION DER HOLOGRAPHIE ZU SEISMISCHER ANWENDUNG

KISS, LAJOS—PINTÉR, FERENC

In der Arbeit wird das Herangehen an die mathematische Simulation der Holographie behandelt, das für die spezielle Bearbeitung seismischer Daten ein geeignetes Verfahren bedeutet. Das Verfahren wurde als ein Programmsystem mit Rechenmaschine durchgeführt.

Die im Laufe der Anwendung dieses Systems gewonnenen Erfahrungen beweisen, dass die Kombination der Holographie und der Rechnungstechnik — mit Rücksicht auf gewisse seismische experimentale Erfahrungen — für die Darstellung der holographischen Bilder der sich unter der Erde befindenden, durch seismische Wellen „beleuchteten“ inhomogenen Strukturen mit vielversprechenden Erfolgen anzuwenden.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЛИРОВАНИЯ ГОЛОГРАФИИ НА ЭВМ В СЕЙСМИКЕ

КИШ, ЛАЙОШ—ПИНТЕР, ФЕРЕНЦ

В данной работе мы рассматриваем математическое моделирование голографии, которое представляет собой подходящий метод для специальной обработки сейсмических данных. Этот метод реализован нами в виде набора программ. В ходе применения данной системы программ пришли к заключению, что объединение голографии и вычислительной техники — с учётом специфики сейсмических исследований — можно эффективно применить для определения голографической картины неоднородных подземных структур, «просвеченных» сейсмическими волнами.

SCHIFF-BÁZISOK HIDROLÍZISE ETANOL—VÍZ ÉS METANOL—VÍZ OLDÓSZERELEGYBEN

NAGY PÁL—HERZFELD ROZÁLIA

A Schiff-bázisok hidrolízisének fontos szerepe van számos biokémiai folyamatban, enzimatis reakcióban. Így érthető, hogy különböző körülmények között széleskörűen tanulmányozták a reakció lejátszódását [1—11]. Ennek ellenére a folyamat mechanizmusa még ma sem tekinthető minden szempontból tisztázottnak. A p- és o-hidroxi-benzál-anilinek hidrolízisét vizsgálva pl. több kutató e vegyületcsoport „rendellenes” viselkedéséről számol be. Az anilingyűrűn szubsztituált o-hidroxi-benzál-anilinek hidrolízisével korábban már mi is foglalkoztunk [12]. Különböző vízkoncentrációjú pufferolatlan etanol—víz és metanol—víz elegyben mértük a hidrolízis sebességét azzal a céllal, hogy felderítsük a hidrolizáló közeg vízkoncentrációja és a hidrolízis sebessége közötti összefüggést. Jelen dolgozatunkban ezen vegyületeknél a hidrolízis sebessége és az oldószeranyag aciditási, illetve bázicitási paramétere (E_T^N , B_{KT}) közötti kapcsolatot vizsgáljuk, újabb adatokat szolgáltatva a hidrolízis mechanizmusának jobb megismeréséhez.

Kísérleti módszer

A vizsgált Schiff-bázisokat a komponensek etanolos oldatának összeöntésével állítottuk elő. Tisztaságukat, etanolból történő átkristályosítás után olvadáspont mérésével ellenőriztük. A hidrolízist pufferolatlan etanol—víz és metanol—víz oldószeranyagban, 25 °C-on végeztük. A Schiff-bázisok kezdeti koncentrációja 10^{-3} mol/dm³ nagyságrendű volt. A mérésekhez kétszer desztillált, minden esetben közel azonos vezetőképességű vizet használtunk. Az etanol és metanol a spektroszkópiában szokásos tisztaságú, gondosan víztelenített volt. A reakciók lejátszódását spektrofotometriás módszerrel követtük, mérve a bázisok elnyelési színeképében 440 nm környezetében jelentkező sáv intenzitását. Miután e sáv intenzitása függ az alkalmazott oldószer vízkoncentrációjától, a moláris abszorpciós koefficienseket minden mérésben a nulla időre extrapolált elnyelésből határoztuk meg.

A hidrolízis sebessége — miután a vízkoncentráció változása elhanyagolható — kinetikusan pszeudó elsőrendűnek adódott. A folyamat azonban egyensúlyra vezet, ezért k_h értékét a

$$k_h = \frac{2,3 x_e}{t(2a_0 - x_e)} \log \frac{a_0 x_e + x(a_0 - x_e)}{a_0(x_e - x)} \quad (1)$$

összefüggéssel számoltuk, ahol az e index az egyensúlyi koncentrációra utal.

Az oldószeranyag aciditásának jellemzésére a Reichardt által bevezetett

E_T^N [13], a bázicitás jellemzésére a Krygowski által módosított [14] Kamlet—Taft-féle B_{KT} paramétert alkalmaztuk. A különböző összetételű etanol—víz és metanol—víz elegyek E_T^N , illetve B_{KT} értékeit, a Krygowski és munkatársai által közölt [15] adatokból nyertük, a hidrolízisnél alkalmazott vízkoncentrációra interpolálva.

Kísérleti eredmények

A különböző összetételű, etanol—víz és metanol—víz elegyekben mért és az (1) egyenlettel számított k_h értékeket, a megfelelő aciditási, illetve bázicitási paraméterrel együtt az 1. és 2. táblázatban foglaltuk össze.

1. táblázat
ETANOL—VÍZ ELEGY

[H ₂ O] mol/dm ³	E_T^N	B_{KT}	k_h (min ⁻¹)		
			2-hidroxi-benzál- -anilin	2-hidroxi-benzál- -4'-metil-anilin	2-hidroxi-benzál- -4'-metoxi-anilin
5,55	0,68	0,69	$8,00 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-4}$	$3,60 \cdot 10^{-4}$
11,11	0,70	0,65	$1,69 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$8,90 \cdot 10^{-4}$
16,68	0,72	0,61	$3,07 \cdot 10^{-3}$	$2,10 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^{-3}$
22,22	0,74	0,58	$5,62 \cdot 10^{-3}$	$4,00 \cdot 10^{-3}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$
27,80	0,76	0,54	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$7,50 \cdot 10^{-3}$	$4,20 \cdot 10^{-3}$
33,35	0,79	0,50	$2,23 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$7,60 \cdot 10^{-3}$
36,10	0,82	0,42	$3,40 \cdot 10^{-2}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	—
38,90	0,84	0,36	$4,45 \cdot 10^{-2}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$
41,70	0,87	0,31	$6,08 \cdot 10^{-2}$	$4,17 \cdot 10^{-2}$	—
44,40	0,89	0,28	—	$5,55 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-2}$

2. táblázat
METANOL—VÍZ ELEGY

[H ₂ O] mol/dm ³	E_T^N	B_{KT}	k_h (min ⁻¹)		
			2-hidroxi-benzál- -anilin	2-hidroxi-benzál- -4'-metil-anilin	2-hidroxi-benzál- -4'-metoxi-anilin
5,55	0,78	0,54	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$6,30 \cdot 10^{-4}$	$6,00 \cdot 10^{-4}$
11,11	0,79	0,55	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-3}$
16,68	0,81	0,53	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$4,45 \cdot 10^{-3}$	$3,20 \cdot 10^{-3}$
22,22	0,82	0,50	$2,20 \cdot 10^{-2}$	$8,56 \cdot 10^{-3}$	$5,80 \cdot 10^{-3}$
27,80	0,84	0,45	$3,75 \cdot 10^{-2}$	$1,55 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$
33,35	0,86	0,39	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$
38,90	0,89	0,34	—	$5,55 \cdot 10^{-2}$	$3,20 \cdot 10^{-2}$

A különböző reakciók sebessége és az alkalmazott oldószer polaritási paramétere közötti kapcsolat leírására igen sok példa van az irodalomban. Különösen gyakran vizsgálták a sebességi állandó logaritmusát és az $E_T(30)$ aciditási paraméter korrelációját [16—19]. A multiparaméteres egyenlet alkalmazását az oldószerhatás leírására Katritzky és munkatársai vezették be [20]. Az eddigi fontosabb eredmények összefoglalása Svoboda és munkatársai közleményében található [21].

A Schiff-bázisok amincseréjénél tapasztalható oldószerhatás leírására mi is sikeresen alkalmaztuk a

$$\log k = a + b_1 E_T^N + b_2 B_{KT} \quad (2)$$

regressziós egyenletet. Ezt használtuk a hidrolízisre megállapított oldószerhatás jellemzésére is. Az 1., 2. táblázatban közölt mérési adatokkal a legkisebb négyzet módszer alkalmazásával meghatároztuk a (2) egyenlet állandóit és kiszámítottuk a többszörös korrelációs együtthatót (R). Az aciditás és bázicitás hatásának jobb összehasonlítása céljából, a regressziós együtthatókat (b_1, b_2) átszámítottuk ún. „béta együtthatókra” (β_1, β_2) az alábbi egyenletek szerint [22]:

$$\beta_1 = |b_1| \left(\frac{\sum_{i=1}^n (E_{T(i)}^N - \overline{E_T^N})^2}{\sum_{i=1}^n (\log k_i - \overline{\log k})^2} \right)^{1/2}, \quad \beta_2 = |b_2| \left(\frac{\sum_{i=1}^n (B_{KT(i)} - \overline{B_{KT}})^2}{\sum_{i=1}^n (\log k_i - \overline{\log k})^2} \right)^{1/2} \quad (3)$$

ahol „ i ” az adott oldószerben mért adatokat jelöli; $\overline{E_T^N}$, $\overline{B_{KT}}$, $\overline{\log k}$ az n mérési pontra vonatkozó átlagérték. β_1 és β_2 normálásával [22]

$$\beta'_1 = \frac{100 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \quad \beta'_2 = \frac{100 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (4)$$

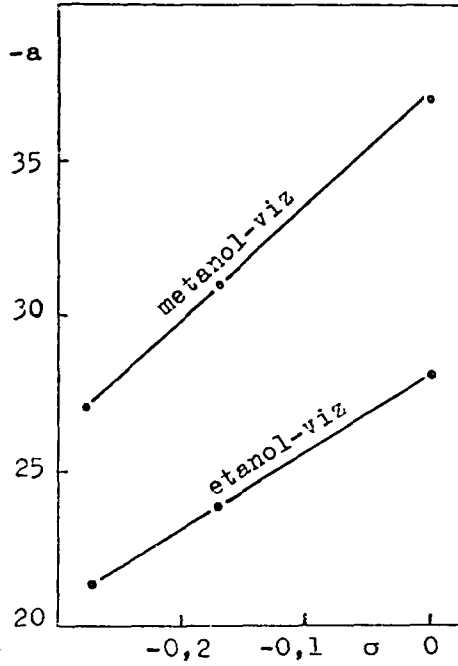
százalékban nyerjük az oldószerre jellemző aciditás és bázicitás hatásának megoszlását a vizsgált reakcióra. Az így számított adatokat a 3. táblázatban foglaltuk össze.

3. táblázat

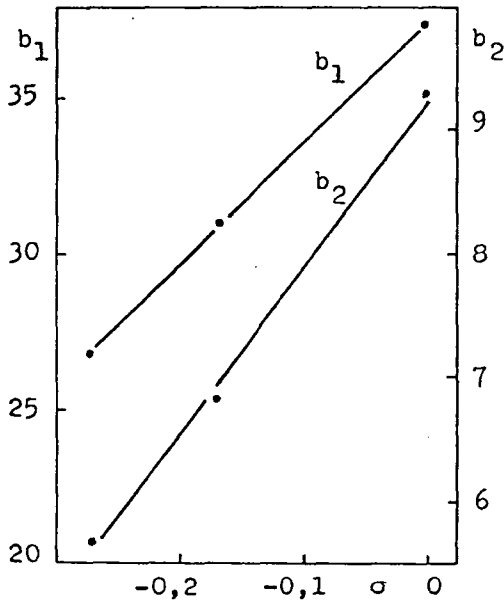
A (2)–(4) EGYENLETEK ALKALMAZÁSA AZ 1., 2. TÁBLÁZAT ADATAIRA

Schiff-bázis	Oldószer-elegy	a	b_1	b_2	β'_1	β'_2	n	R
2-hidroxi-benzál-anilin	etanol-víz elegy	-28,15	27,93	8,98	60,79	39,21	9	0,991
2-hidroxi-4'-metil-benzál-anilin		-23,83	23,32	7,08	62,29	37,71	10	0,985
2-hidroxi-4'-metoxi-benzál-anilin		-21,38	20,54	6,06	63,12	36,88	8	0,983
2-hidroxi-benzál-anilin	metanol-víz elegy	-37,04	37,41	9,29	66,11	33,89	6	0,994
2-hidroxi-4'-metil-benzál-anilin		-31,00	31,00	6,82	68,62	31,88	7	0,986
2-hidroxi-4'-metoxi-benzál-anilin		-27,06	26,75	5,69	69,38	30,62	7	0,988

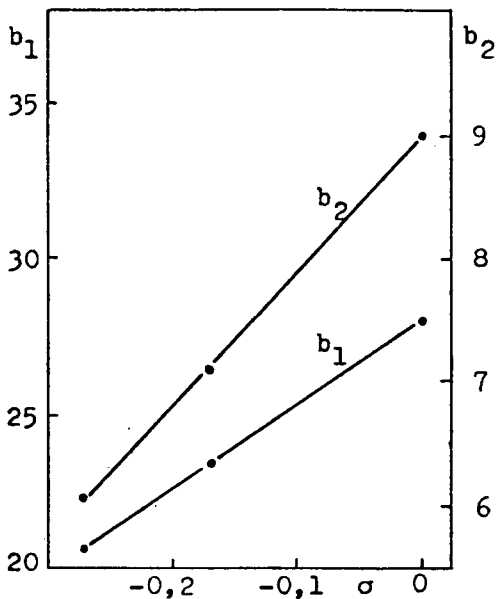
Megállapítható a táblázatból, hogy a korreláció mindegyik folyamatnál jó, tehát a (2) egyenlet megfelelően írja le a vizsgált Schiff-bázisok hidrolízisének függését az alkalmazott oldószer aciditásától, illetve bázicitásától. Figyelemre méltó a táblázatban lévő adatok szisztematikusan változása az anilinyűrűn lévő szubsztituensektől függően. Az a és β'_1 annál nagyobb, minél elektronküldőbb a szubsztituens, míg b_1, b_2, β_2 ellentétesen változik. Az 1–4. ábrán a 3. táblázat adatait ábráztuk a szubsztituensek σ -konstansainak függvényében. A linearitás jó, s ez a (2) összefüggést figyelembe véve a Hammett-egyenlet érvényességét jelenti a vizsgált vegyületek hidrolízisére.



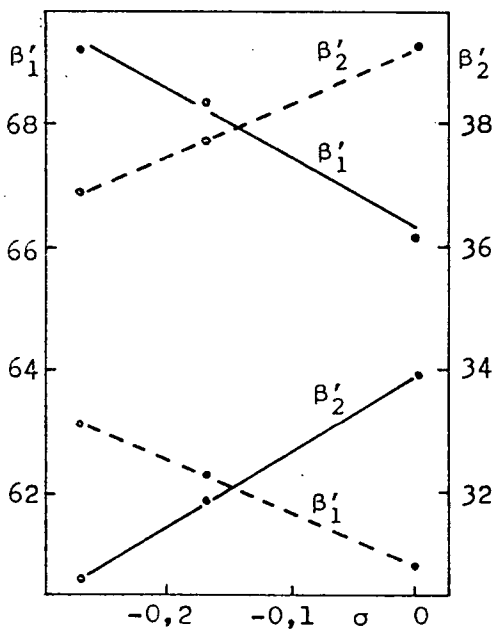
1. ábra. Az a konstans változása a vizsgált reakcióknál (3. táblázat), a szubsztituensek σ -értékének függvényében metanol-víz és etanol-víz elegyben



2. ábra. A b_1 és b_2 állandók változása a vizsgált reakcióknál (3. táblázat), a szubsztituensek σ -értékének függvényében metanol-víz elegyben

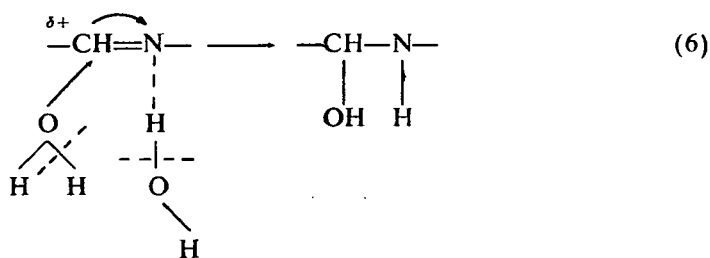
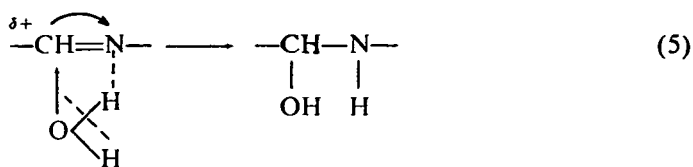


3. ábra. A b_1 és b_2 állandók változása a vizsgált reakcióknál (3. táblázat), a szubsztituensek σ -értékének függvényében etanol—víz elegyben



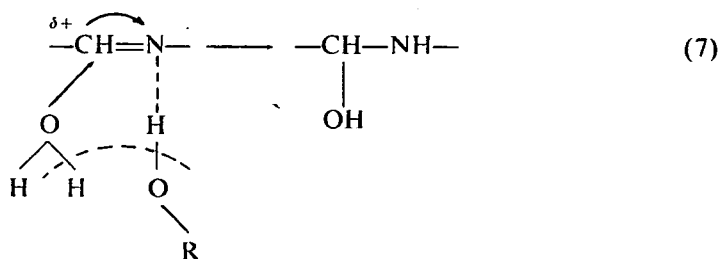
4. ábra. Az aciditás (β'_1) és bázicitás (β'_2) hatásának változása a vizsgált reakciókra (3. táblázat) a szubsztituensek σ -értékének függvényében metanol—víz (—) és etanol—víz (---) elegyben

Korábbi dolgozatunkban [12] feltételeztük, hogy az alkohol—víz elegyben lejátszódó hidrolízist az azometin-nitrogén és az oldószermolekulák közötti hidrogénkötés kialakulásával egy előegyensúly vezeti be. A vízzel asszociált Schiff-bázis molekuláknál ezt a hidrolízis sebességmeghatározó lépése, amely az alábbi két módon lehetséges:



A karbonil-amin közttermék bomlásából végül a hidrolízis termékek keletkeznek. Annak eldöntésére, hogy az (5), (6) folyamatok közül melyik a valószínűbb, a jelzett korábbi vizsgálatok nem adtak elég támpontot, csupán feltételeztük, hogy számottevő mértékben a (6) reakció játszódik le. A jelenlegi vizsgálati eredmények ezt a feltételezést megerősítik. A (2) egyenlet, illetve a 3. táblázat szerint ugyanis az oldószernek mind az aciditása, mind a bázicitása növeli a reakciósebességet, ami a (6) egyenletnek felel meg. A bázicitás kisebb arányú érvényesülése ($\beta'_2 < \beta'_1$) is összhangban van ezzel, mert várható, hogy az oldószermolekulák nagyobb valószínűséggel kötődnek az azometin-nitrogénhez, mint az azometin szénatomhoz. Látható továbbá, hogy a $-\text{H}$, $-\text{CH}_3$, $-\text{OCH}_3$ szubsztituensek sorrendjében az oldószer aciditásának szerepe nő, a bázicitásé csökken. Ez is a (6) folyamatot valószínűsíti, hiszen az elektronküldőbb szubsztituens növeli a nitrogén elektron-donáló képességét, de ugyanakkor csökkenti az azometin szénatom elektrofil jellegét.

Az 1., 2. táblázatban az oldószerelegyre vonatkozó E_T^N és B_{KT} értékek szerepelnek és ezeket használtuk a (2) regressziós egyenlet állandóinak meghatározásánál is. Úgy véljük ebből az következik, hogy a hidrolízis lejátszódásánál nem csupán a vízzel, hanem az alkohollal asszociált bázismolekuláknak is szerepe van, ami az alábbi folyamat szerint lehetségesnek látszik:



A fentiek alapján továbbá valószínű, hogy a nevezett vizsgálati körülmények között a hidrolízis mellett alkoholízis [23, 24] is lejátszódik.

Összefoglalás

Az anilingyűrűn szubsztituált szaliciliden-anilinek hidrolízisét vizsgáltuk etanol—víz és metanol—víz elegyben, az oldószer aciditási és bázicitási paraméterének (E_T^N , B_{KT}) függvényében. A kísérleti adatokra az alábbi regressziós egyenlet érvényességét állapítottuk meg:

$$\log k = a + b_1 E_T^N + b_2 B_{KT}.$$

A szubsztituensek szisztematikusan befolyásolják az a , b_1 , b_2 konstansokat, amiből következtetéseket vonhatunk le a reakciómechanizmusra.

IRODALOM

- [1] B. A. PORAJ—KOSIC, E. M. POZNANSZKAJA, V. SZ. SZEVCSENKO, L. A. PAVLOVA: Zs. Obsej. Himij. 17. 1774, 1947.
- [2] A. V. WILLI, R. E. ROBERTSON: Canad. J. Chem. 31. 361. 1953.
- [3] A. V. WILLI: Helv. Chim. Acta, 39, 1193, 1956.
- [4] B. KASTENING, L. HOLLECK, G. A. MELKONIAN: Z. Elektrochem, 60, 130, 1956.
- [5] R. L. REEVES: J. Amer. Chem. Soc. 84, 3332, 1962.
- [6] E. H. CORDES, W. P. JENCKS: J. Amer. Chem. Soc. 84, 832, 1962., 85, 2843, 1963.
- [7] K. KOEHLER, W. SANDSTROM, E. H. CORDES: J. Amer. Chem. Soc. 86, 2413, 1964.
- [8] J. CHARETTE, C. DECOENE, G. FALTSHAUSL, PH. TEYSSIE: Bull. Soc. Chim. Belg. 74, 518, 1965.
- [9] W. BRUYNEEL, J. CHARETTE, E. HOFFMANN: J. Amer. Chem. Soc. 88, 3808, 1966.
- [10] A. V. WILLI, J. F. SIMAN: Canad. J. Chem. 46, 1589, 1968.
- [11] J. CHARETTE, E. HOFFMANN: J. Org. Chem. 44, 2256, 1979.
- [12] NAGY P.: Szegedi Tanárképző Főisk. Tud. Közl. 197, 1969.
- [13] C. REICHARDT, E. HARBUSCH-GÖRNERT: Liebigs. Ann. Chem. 721, 1983.
- [14] T. M. KRYGOWSKI, E. MILCZAREK, P. K. WRONA: J. C. S. Perkin II. 1563, 1980.
- [15] T. M. KRYGOWSKI, P. K. WRONA, U. ZIELKOWSKA: Tetrahedron 41. 4519, 1985.
- [16] H. ELIAS, G. GUMBEL, S. NEITZEL, H. VOLZ: Fresenius Z. Anal. Chem. 306, 240, 1981.
- [17] H. ELIAS, K. J. WANNOWIUS: Inorg. Chim. Acta 64, L 157, 1982.
- [18] C. REICHARDT: Pure Appl. Chem. 54, 1867, 1982.
- [19] C. REICHARDT: Molecular Interactions, Wiley, Chichester, New York, Vol. 3, p. 241. 1982.
- [20] F. W. FOWLER, A. R. KATRITZKY, R. J. D. RUTHERFORD: J. Chem. Soc. B 460, 1971.
- [21] P. SVOBODA, O. PYTELA, M. VECERA: Collection Czechoslovak Chem. Commun, 48, 3287, 1983.
- [22] T. M. KRYGOWSKI, W. R. FAWCETT: J. Amer. Chem. Soc. 97, 2143, 1975.
- [23] HIRES J: Kandidátusi disszertáció, Szeged, 1959.
- [24] Nagy P.: Kandidátusi disszertáció, Szeged, 1966, p. 77—78.

DIE HYDROLYSE DER SCHIFFBASEN IN ETHANOL—WASSER UND METHANOL—WASSERLÖSCHGEMISCH

NAGY, PÁL—HERZFELD, ROZÁLIA

Die Verfasser haben die Hydrolyse der auf dem Anilinring substituierten Saliziliden-Anilinen in Ethanol—Wasser und Methanol—Wasserlöschgemisch im Zusammenhang mit dem Aziditäts- und Basizitätsparameter (E_T^N , B_{KT}) des Löschgemisches untersucht. Im Bezug auf die Messergebnisse wurde die Gültigkeit der folgenden Regressionsgleichung festgestellt:

$$\log k = a + b_1 E_T^N + b_2 B_{KT}.$$

Die Substituenten beeinflussen systematisch die a , b_1 , b_2 Konstanten, woraus bezüglich des Reaktionsmechanismus Schlussfolgerungen gezogen wurden.

**ГИДРОЛИЗ ШИФФ-БАЗИСОВ В РАСТВОРИТЕЛЬНОЙ СМЕСИ
ЭТАНОЛ—ВОДЫ И МЕТАНОЛ—ВОДЫ
НАДЬ, ПАЛ — ХЕРЦФЕЛДЬ, РОЗАЛИЯ**

Нами был исследован гидролиз салицилиден-анилинов, полученных путём субституции в анилиновом кольце, в смеси этанол—воды и метанол—воды, в зависимости от параметров кислотности и щёлочности (E_T^N , B_{KT}). Было установлено, что экспериментальные данные удовлетворяют следующему регрессивному уравнению:

$$\log k = a + b_1 E_T^N + b_2 B_{KT}.$$

Заменители систематически влияют на постоянные a , b_1 , b_2 . Из этого мы сделали соответствующие выводы относительно механизма реакции.

NÉHÁNY OLDÓSZERELEGY ACIDITÁSI ÉS BÁZICITÁSI PARAMÉTERÉNEK (E_T^N , B_{KT}) VÁLTOZÁSA AZ ELEGY ÖSSZETÉTELÉVEL

HERZFELD ROZÁLIA—NAGY PÁL—MAHLER HAJNALKA

A folyadékfázisban lejátszódó kémiai reakciók sebességét a reagáló anyagok természetén, koncentrációján, a rendszer hőmérsékletén és az esetleg jelenlevő katalizátoron túl jelentős mértékben befolyásolhatja az a közeg is, amelyben végbemegy. Az oldószerek reakciósebességre, reakciómechanizmusra, egyensúlyi állapotra kifejtett hatását azonban — a probléma összetettsége miatt — a széleskörű vizsgálatok ellenére sem tudjuk általánosan leírni. Ezért az utóbbi időben az oldószert hatás jellemzésére elterjedten használnak különböző empirikus paramétereket, melyek meghatározására gyakran spektroszkópiai módszert alkalmaznak. Így definiálta pl. Kosower [1] a Z -értéket, illetve Zelinszkij és munkatársai [2] az S -paramétert. Igen széleskörűen alkalmazható a Dimroth—Reichardt [3] által bevezetett $E_T(30)$ -skála, amely az alkalmazott oldószert aciditási viszonyait tükrözi. A bázicitás jellemzésére jól használható a Krygowski és munkatársai által módosított [4] Kamlet—Taft-féle [5] B_{KT} paraméter.

Előző közleményeinkben [6—8] etanol—benzol, etanol—hexán, etanol—ciklohexán, etanol—víz és metanol—víz oldószerelegyekben vizsgáltuk az aciditási és bázicitási paraméterek változását az elegyek összetételével. E vizsgálatok célja a Schiff-bázisoknál tapasztalható amincsere és hidrolízis reakciómechanizmusának jobb megismerése volt, illetve kapcsolatot kerestünk az oldószert-paraméterek, a reakciósebesség és az etanol aktivitási koefficiense között [9]. Az alábbi, igen jó korrelációt kifejező regressziós egyenletek érvényességét állapítottuk meg:

$$\log k = x_1 \log k_1 + x_2 \log k_2 + (a_k + b_k \gamma_1) x_1 x_2 \quad (1)$$

$$\log k = a + b_1 E_T^N + b_2 B_{KT} \quad (2)$$

$$E_T^N = x_1 (E_T^N)_1 + x_2 (E_T^N)_2 + (a_E + b_E \gamma_1) x_1 x_2 \quad (3)$$

$$B_{KT} = x_1 (B_{KT})_1 + x_2 (B_{KT})_2 + (a_B + b_B \gamma_1) x_1 x_2 \quad (4)$$

ahol k a vizsgált Schiff-bázisok amincserejének, illetve hidrolízisének sebességi állandója az oldószerelegyen, k_1 az etanolban, k_2 az aprotonos oldószertben, E_T^N az elegyenben, $(E_T^N)_1$ az etanolban, $(E_T^N)_2$ az aprotonos oldószertben mért aciditási paraméter, B_{KT} az elegyenben, $(B_{KT})_1$ az etanolban, $(B_{KT})_2$ az aprotonos oldószertben mért bázicitási paraméter; x_1 , x_2 a megfelelő móltörtek, a , a_k , a_E , a_B illetve b_1 , b_2 , b_E , b_B állandók és γ_1 az etanol aktivitási koefficiense a vizsgált elegyenben. Ezek az összefüggések újabb adatokat szolgáltattak a Schiff-bázisok amincserejének és hidrolízisének mechanizmusához, és az oldószerelegyek tulajdonságainak további megismeréséhez. A megfigyelt törvényszerűségek érvényességi körének megállapítása cél-

jából etanol—n-heptán, etanol—széntetraklorid, metanol—benzol és n-butanol—benzol oldószeranyagokban is meghatároztuk az aciditási és bázicitási paramétereket és vizsgáltuk azok kapcsolatát az alkohol aktivitási koefficiensével. Dolgozatunkban az így nyert eredményekről számolunk be.

Kísérleti módszer

A vizsgált oldószeranyagok aciditásának jellemzésére a Dimroth—Reichardt-féle $E_T(30)$ [3], illetve E_T^N [10] értékeket alkalmaztuk. Ezen értékek meghatározásához a 2,6-difenil-4-(2,4,6-trifenil-1-piridinio)fenolat — erősen szolvatokrom festék — abszorpciós sávmaximumának helyét vizsgáltuk. Az oldószeranyag polaritásának növekedésével a festék hosszúhullámú abszorpciós sávja a rövidebb hullámhossz felé tolódik. Meghatározva a sávmaximum helyét (λ, nm), az $E_T(30)$ érték az alábbi összefüggéssel számolható [3]:

$$E_T(30) = \frac{2,859 \cdot 10^4}{\lambda} \text{ kcal} = \frac{1,197 \cdot 10^5}{\lambda} \text{ kJ} \quad (5)$$

$E_T(30)$ normálásával nyerjük a praktikusabban használható, dimenzió nélküli E_T^N értéket [10], amely a vizsgált oldószerben:

$$E_T^N = \frac{E_T(\text{oldószer}) - E_T(TMS)}{E_T(\text{víz}) - E_T(TMS)} \quad (6)$$

ahol $E_T(\text{víz})$ a vízben és $E_T(TMS)$ a tetra-metil-szilánban mért $E_T(30)$ érték. Így az E_T^N skála két végpontja a víz ($E_T^N=1$) és a tetra-metil-szilán ($E_T^N=0$). Irodalmi adatok felhasználásával [10].

$$E_T^N = \frac{E_T(\text{oldószer}) - 30,7}{32,4} \quad (7)$$

Az oldószeranyagok bázicitásának jellemzésére a módosított Kamlet—Taft-féle B_{KT} paramétert határoztuk meg, mérve a p-nitro-anilin (pNA) és N,N-dietil-p-nitro-anilin (DEpNA) hosszúhullámú sávmaximumának helyét. A mért adatokból a B_{KT} értékek kiszámítását a Krygowski és munkatársai [4] által leírt módszerrel végeztük.

Az abszorpciós sávmaximumok helyének meghatározását VSU 2P, illetve Spektromom 195-ös spektrofotométerrel végeztük. Az oldószeranyagot a spektroszkópiában szokásos módszerekkel tisztítottuk és gondosan víztelenítettük. A festékek koncentrációja az oldószeranyagokban 10^{-4} mol/dm³ volt. A méréseket 25 °C-on, illetve etanol—n-heptán oldószeranyagban 50 °C-on is elvégeztük a megfelelő hőmérsékleten termostált körülmények között.

Kísérleti eredmények és értelmezésük

Az (5), (7) egyenlettel, illetve a [4] alapján számított aciditási és bázicitási paramétereket az 1—3. táblázatban foglaltuk össze.

Az aciditási és bázicitási paraméterek változását az alkohol móltörtjének függvényében az 1—4. ábra szemlélteti. Korábbi vizsgálatainkkal összehangban az aciditási

1. táblázat

ETANOL—n-HEPTÁN ÉS ETANOL—SZÉNTETRAKLORID ELEGYEK
 E_T^N ÉS B_{KT} PARAMÉTEREI 25 °C-ON

[etanol] mol/dm ³	etanol—n-heptán		etanol—széntetrazklorid	
	E_T^N	B_{KT}	E_T^N	B_{KT}
0,000	0,049*	0,00*	0,090*	0,00*
0,426	—	—	0,379	0,30
0,852	0,515	0,70	0,402	0,38
1,704	0,528	0,87	0,444	0,53
3,409	0,549	0,91	0,483	0,69
5,113	0,570	0,88	0,505	0,73
6,818	0,573	0,90	0,539	0,75
8,522	0,594	0,85	0,558	0,75
10,226	0,601	0,84	0,570	0,75
11,931	0,617	0,82	0,591	0,75
13,635	0,625	0,80	0,606	0,75
15,340	0,634	0,79	0,620	0,75
17,044	0,655	0,78	0,650	0,77

* irodalmi adat [4, 10].

2. táblázat

METANOL—BENZOL ELEGY
 E_T^N ÉS B_{KT} PARAMÉTEREI 25 °C-ON

[metanol] mol/dm ³	E_T^N	B_{KT}^{**}
0,000	0,127*	0,07
0,614	0,444	—
1,228	0,492	—
2,455	0,532	0,35
4,910	0,571	0,45
7,365	0,602	0,49
9,820	0,621	0,52
12,275	0,638	0,54
14,730	0,661	0,55
17,185	0,687	0,56
19,640	0,706	0,56
22,096	0,730	0,58
24,551	0,771	0,62

* irodalmi adat [10].

** irodalmi adatokból [11] extraponált értékek

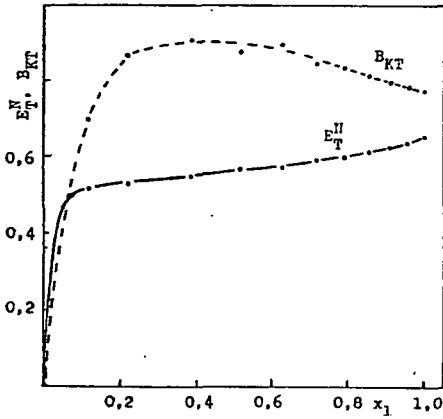
3. táblázat

n-BUTANOL—BENZOL ELEGY
 E_T^N ÉS B_{KT} PARAMÉTEREI 25 °C-ON

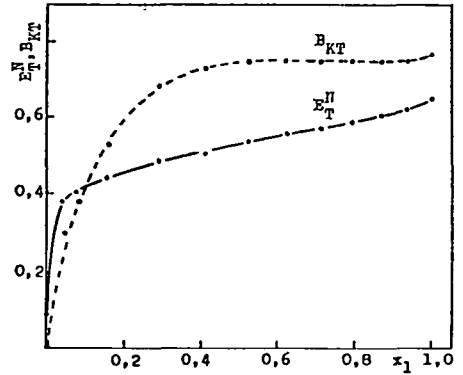
[n-butanol] mol/dm ³	E_T^N	B_{KT}
0,000	0,127*	0,08
0,546	0,346	0,17
1,093	0,385	0,24
2,185	0,422	0,38
3,278	0,452	0,46
4,370	0,476	0,55
5,463	0,501	0,59
6,555	0,517	0,66
7,648	0,524	0,72
8,740	0,540	0,79
9,833	0,557	0,83
10,925	0,607	0,86

* irodalmi adat [10]

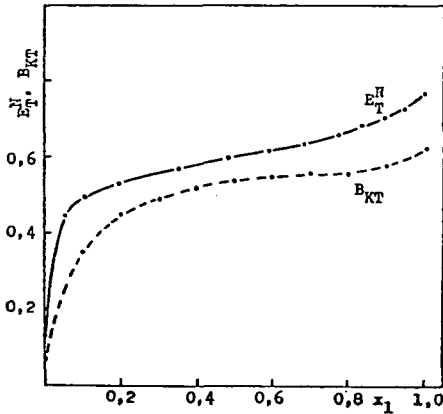
paraméterek a vizsgált oldószerkegyekben kis alkoholkoncentrációnál meredeken emelkednek, majd kb. 15%-nál nagyobb alkoholtartalom esetén a görbék ellaposodnak és közel lineárisan változnak. A bázicitási paraméterek az etanol—n-heptán oldószerkegy kivételével ugyancsak monoton változnak az alkohol móltörtjével, azonban kis alkoholtartalomnál az előzőeknél kisebb a görbék meredeksége és az n-butanol—benzol oldószerkegy esetében nagyobb alkoholtartalomnál sem változik



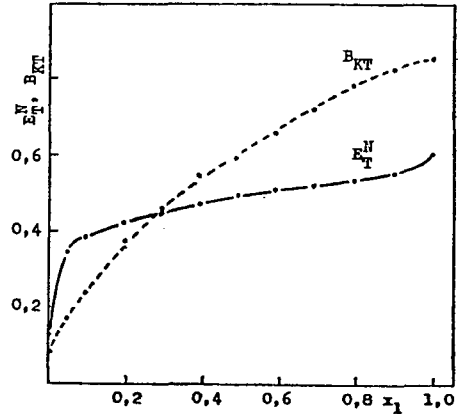
1. ábra. Az E_T^N és B_{KT} értékek változása etanol-n-heptán elegyben az etanol móltörtjének függvényében



2. ábra. Az E_T^N és B_{KT} értékek változása etanol-széntetraklorid elegyben az etanol móltörtjének függvényében



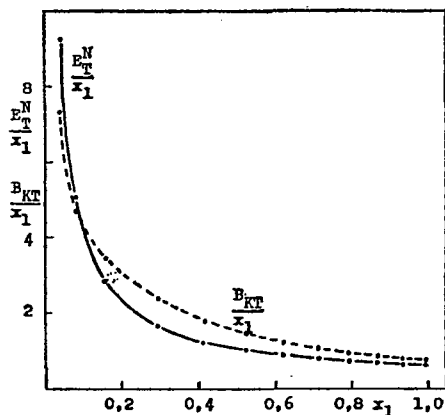
3. ábra Az E_T^N és B_{KT} értékek változása metanol-benzol elegyben a metanol móltörtjének függvényében



4. ábra Az E_T^N és B_{KT} értékek változása n-butanol-benzol elegyben a n-butanol móltörtjének függvényében

az jelentősen. Az etanol—n-heptán oldószerkeletben viszont a bázicitási paraméterek maximumgörbe mentén változnak az etanol móltörtjének függvényében. Összességében jellemző az 1—4. ábrák görbéire, hogy kis alkoholkoncentrációnál igen meredeken emelkednek, ami az elegyek belső szerkezetének az összetételtől függő változásával értelmezhető. A vizsgált oldószerkelet mindegyike két meglehetősen eltérő polaritású komponensből tevődik össze. Az alkoholmolekulák között — mint ismeretes — az alkilcsoport nagyságától függően különböző erősségű hidrogénkötések alakulnak ki, aminek következtében az alkoholmolekulák asszociálódnak. Az apoláris komponens koncentrációjának növekedésével viszont az eredeti szerkezet felbomlik és egyre kisebb mértékűvé válik az alkoholmolekulák asszociációja. Ezért csekély alkoholtartalomnál többnyire csak „szabad alkoholmolekulák” vannak, melyeknek így mind az aciditása, mind a bázicitása jól érvényesülhet. Összhangban van ezzel,

hogy az $\frac{E_T^N}{x_1}$ és $\frac{B_{KT}}{x_1}$ értékek (melyek lényegében az alkohol „fajlagos” aciditásának, illetve bázicitásának tekinthetők az elegyben) az alkoholkoncentráció csökkenésével minden esetben rohamosan nőnek, mint példaként az 5. ábrán látható.



5. ábra. $\frac{E_T^N}{x_1}$ és $\frac{B_{KT}}{x_1}$ változása az etanol-móltörtjének függvényében etanol-széntetraklorid elegyben

A görbék menetét továbbá a komponensek kölcsönhatása is befolyásolja. A vizsgált apoláris komponenseknek pl. nagyobb az aciditása, mint a bázicitása, ezért kis alkoholkoncentrációnál az alkoholoknak kevésbé érvényesül a bázicitása, mint az aciditása (1–4. ábrák).

Kiszámítottuk az elegyekben mért E_T^N és B_{KT} értékek additivitástól való eltérését az alábbi összefüggésekkel:

$$\Delta E_T^N = E_T^N - [x_1(E_T^N)_1 + x_2(E_T^N)_2] \quad (8)$$

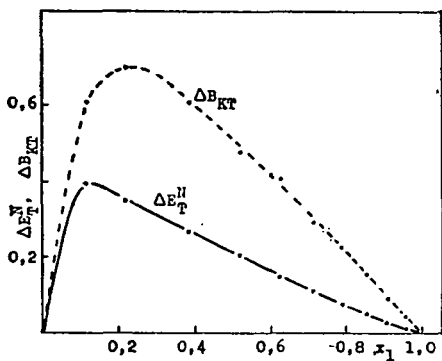
$$\Delta B_{KT} = B_{KT} - [x_1(B_{KT})_1 + x_2(B_{KT})_2] \quad (9)$$

ahol E_T^N , B_{KT} az elegyben, $(E_T^N)_1$, $(B_{KT})_1$ az alkoholban, $(E_T^N)_2$, $(B_{KT})_2$ az apoláris komponensben mért érték és x_1 , x_2 a komponensek móltörtje az elegyben. A 6–9. ábrákon az így számított adatokat ábráztuk az alkohol móltörtjének függvényében. Mint látható az additivitástól való eltérés kis alkoholkoncentrációnál a legnagyobb, ami összhangban van az előzőekkel és korábbi vizsgálatainkkal is [6].

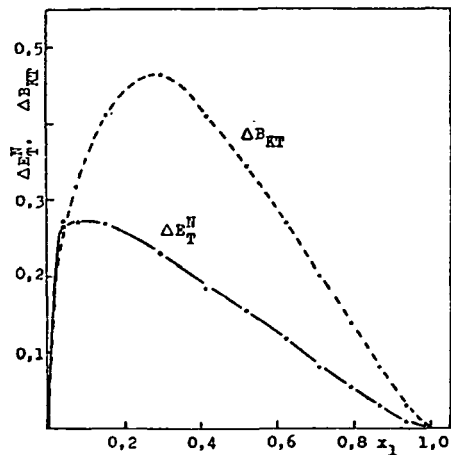
Előző közleményeinkben [7, 9, 12, 13] aromás Schiff-bázisok és alifás aminok etanol–ciklohexán, etanol–benzol és etanol–n-hexán elegyben lejátszódó amincseréjével foglalkoztunk és megállapítottuk, hogy a sebességi állandó az (1), illetve a (2) egyenlet szerint igen szoros kapcsolatban van az etanol aktivitási koefficiensével, illetve az oldószer elegy aciditási és bázicitási paraméterével. Az (1) és (2) regressziós egyenletet összevetve várható, hogy a (8), (9) egyenlettel számított ΔE_T^N -re és ΔB_{KT} -ra alkalmazható a következő összefüggés:

$$b_1 \Delta E_T^N + b_2 \Delta B_{KT} = x_1 x_2 (a_k + b_k \gamma_1) \quad (10)$$

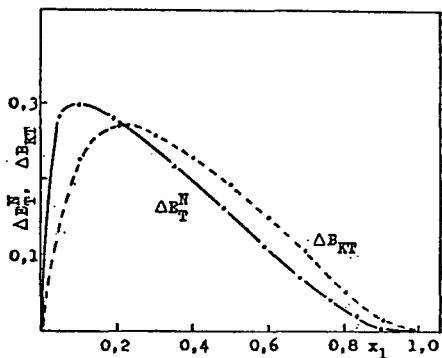
ahol γ_1 az alkohol aktivitási koefficiense az elegyben. Átrendezve (10)-et és az állan-



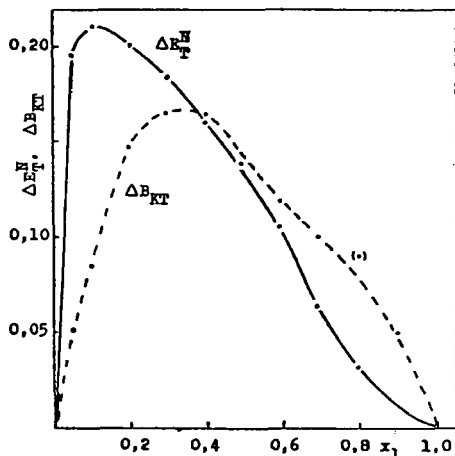
6. ábra. E_T^N és B_{KT} változása az etanol móltörtjének függvényében etanol-n-heptán elegyben



7. ábra. E_T^N és B_{KT} változása az etanol móltörtjének függvényében etanol-széntetraklorid elegyben



8. ábra. E_T^N és B_{KT} változása a metanol móltörtjének függvényében metanol-benzol elegyben



9. ábra. E_T^N és B_{KT} változása a n-butanol móltörtjének függvényében n-butanol-benzol elegyben

dókat B_1 -gyel, B_2 -vel, és A -val jelölve a

$$\gamma_1 = B_1 \frac{\Delta E_T^N}{x_1 x_2} + B_2 \frac{\Delta B_{KT}}{x_1 x_2} + A \quad (11)$$

multiparaméteres egyenletet nyerjük. Az irodalomból [14] vett γ_1 és a mérési adatainkból számított ΔE_T^N és ΔB_{KT} értékekkel a legkisebb négyzet módszert alkalmazva kiszámítottuk a (11) egyenlet állandóit és a többszörös korrelációs együtthatót (R). ΔE_T^N és ΔB_{KT} hatásának jobb összehasonlítása céljából a regressziós együtthatókat ún. „béta együtthatókra” (β_1, β_2) számítottuk át [15]. β_1 és β_2 normálá-

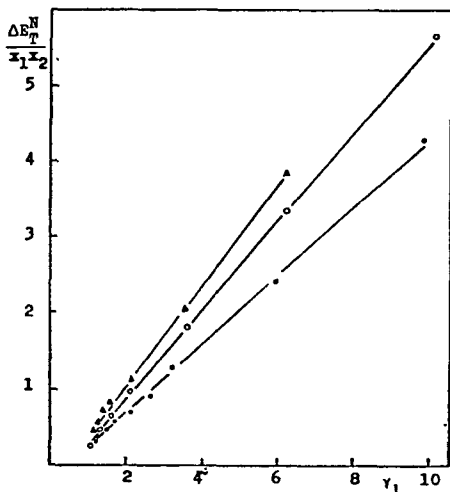
sával százalékban (β'_1, β'_2) nyertük az aciditás és bázicitás hatásának megoszlását a (11) összefüggésben. Az így számított adatokat a 4. táblázatban foglaltuk össze.

Mint látható, a korreláció mind a négy oldószerkelet esetében igen jó, tehát a (11) egyenlet megfelelően írja le az alkohol aktivitási koefficiensének kapcsolatát az elegy aciditási és bázicitási paraméterével. E tapasztalat feltehetően azzal értelmez-

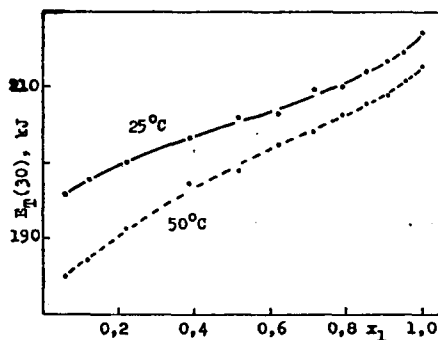
4. táblázat

A (11) ÖSSZEFÜGGÉS ALKALMAZÁSA AZ 1—3. TÁBLÁZAT ADATAIRA

	etanol—n-heptán	etanol—széntet- raklorid	metanol—benzol	n-butanol—benzol
B_1	1,285	1,941	1,775	2,109
B_2	0,116	-0,245	-0,190	0,145
A	0,507	0,647	0,745	0,610
β_1	0,884	1,132	0,630	0,986
β_2	0,112	0,136	0,061	0,012
β'_1	88,76	89,27	91,17	98,77
β'_2	11,24	10,73	8,83	1,23
n	10	11	10	10
R	0,9949	0,9982	0,9986	0,9977



10. ábra. $\frac{\Delta E_T^N}{x_1 x_2}$ változása az alkohol aktivitási koefficiensének (γ_1) függvényében etanol-n-heptán (\blacktriangle), metanol-benzol (\circ) és n-butanol-benzol (\bullet) elegyben



11. ábra. $E_T(30)$ változása 25 °C és 50 °C-on az etanol móltörjének függvényében etanol-n-heptán elegyben

hető, hogy a vizsgált oldószerelegyekben az alkoholmolekulák asszociációja, illetve annak mértéke játszik jelentős szerepet mind az aktivitási koefficiensnek, mind az aciditási és bázicitási paraméternek az összetételtől függő változásában. Látható továbbá a táblázatból, hogy az aktivitási koefficiens és az aciditási, illetve bázicitási paraméter kapcsolatában lényegesen nagyobb szerepe van az aciditási paraméternek ($\beta'_1 > \beta'_2$). Így érthető, hogy mindegyik elegendően jó korrelációt fejez ki a (10)-nél egyszerűbb

$$\Delta E_T^N = x_1 x_2 (a + b \gamma_1) \quad (12)$$

összefüggés is (10. ábra), hasonlóan mint a korábban vizsgált etanol—ciklohexán és etanol—benzol elegynél. ΔB_{KT} és γ_1 között a páros korreláció különösen az alkohol—benzol elegyeknél az előzőnél rosszabb, amit feltehetően az alkohol- és benzolmolekulák kölcsönhatása magyaráz. Figyelembe véve elsősorban azt, hogy a benzolnak viszonylag nagy az aciditási paramétere és ezért némileg gátolja az alkohol bázicitásának érvényesülését.

Etanol—n-heptán elegyben meghatároztuk az E_T (30) értékeket 50 °C-on is. Mint a 11. ábrán látható az alacsonyabb hőmérsékleten mért értékek nagyobbak. A hőmérséklet emelése ugyanis gyengíti a festék és az oldószer között kialakuló hidrogénkötést, és így kisebb energiával gerjeszhető a molekula.

Összefoglalás

Az E_T^N és B_{KT} paramétereket különböző összetételű etanol—n-heptán, etanol—széntetraklorid, metanol—benzol és n-butanol—benzol elegyekben határoztuk meg. Mindegyik elegyre érvényes korrelációs összefüggést állapítottunk meg az alkoholok aktivitási koefficiens, illetve az aciditási és bázicitási paraméter között. Vizsgálataink szerint valószínűsíthető, hogy a tapasztalt összefüggés alkohol és hidrogénkötésre nem képes oldószerek elegyére általános érvényű.

IRODALOM

- [1] M. E. KOSOWER: J. Amer. Chem. Soc. 80, 3253, 1958.
- [2] I. A. ZMIREVA, V. V. ZELINSZKIJ, V. P. KOLOBKOV, N. D. KRASNICKAJA: Doklady Akad. Nauk SzSzsR 129, 1089, 1959.
- [3] K. DIMROTH, C. REICHARDT, T. SIEPMANN, F. BOHLMANN: Liebigs. Ann. Chem. 661, 1, 1963.
- [4] T. M. KRYGOWSKI, E. MILCZAREK, P. K. WRONA: J. C. S. Perkin II. 1563, 1980.
- [5] M. J. KAMLET, R. W. TAFT: J. Amer. Chem. Soc. 98, 377, 1977.
- [6] NAGY, P., HERZFELD R.: Acta Phys. et Chem. Szeged, 31, 735, 1985.
- [7] NAGY P., HERZFELD R.: Acta Phys. et Chem. Szeged, 32, 1987. (megjelenés alatt)
- [8] NAGY P., HERZFELD R.: Juhász Gy. Tanárképző Főisk. Tud. Közl. (megjelenés alatt)
- [9] NAGY P.: Acta Chim. Hung. 112, 461, 1983.
- [10] C. REICHARDT, E. HARBUSCH-GÖRNERT: Liebigs. Ann. Chem. 721, 1983.
- [11] T. M. KRYGOWSKI, C. REICHARDT, P. WRONA, C. WYSZOMIRKSA, U. ZIELKOWSKA: J. Chem. Research 116, 1983.
- [12] NAGY P.: Juhász Gy. Tanárképző Főisk. Tud. Közl. 114, 1982.
- [13] GULYÁS I., NAGY P.: Magy. Kém. Lapja, 39, 234, 1984.
- [14] Landolt-Börnstein, 6. Auflage, 2/a Band, p. 475, 490, 558, 588.
- [15] T. M. KRYGOWSKI, W. R. FAWCETT: J. Amer. Chem. Soc. 97, 2143, 1975.

VERÄNDERUNG DES AZIDITÄTS — UND BASIZITÄTSPARAMETERS (E_T^N , B_{KT}) NACH DER ZUSAMMENSETZUNG DES LÖSCHGEMISCHES

HERZFELD, ROZÁLIA; NAGY, PÁL; MAHLER, HAJNALKA

Die Verfasser haben die Parameter (E_T^N und B_{KT}) in Ethanol-n-Heptan, Ethanol-Tetra-
chlorid, Methanol-Benzol und n-Butanol-Benzolgemischen verschiedener Zusammensetzung
bestimmt. Es wurde ein für alle Gemische gültiger Korrelationszusammenhang zwischen dem Ak-
tivitätskoeffizienten der Alkohole, beziehungsweise den Aziditäts — und Basizitätsparametern fest-
gestellt. Den Untersuchungen nach besteht eine reale Wahrscheinlichkeit, dass der festgestellte
Zusammenhang im Falle der zu einer Alkohol- und Wasserstoffbindung unfähigen Lösungsmit-
telgemische für allgemeingültig zu halten sei.

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КИСЛОТНОСТИ И ЩЕЛОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ РАСТВОРИТЕЛЬНЫХ СМЕСЕЙ (E_T^N , B_{KT}) В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТАВА СМЕСИ

ХЕРЦФЕЛЬД, РОЗАЛИЯ; НАДЬ, ПАЛ; МАЛЕР, ХАЙНАЛКА

Нами были определены параметры E_T^N и B_{KT} в смесях разного состава этанол-*n*-гептан,
этанол-углететрахлорид, метанол-бензол и *n*-бутанол-бензол. Для каждой смеси было ус-
тановлено корреляционное соотношение между коэффициентом активности спиртов и па-
раметрами кислотности и щелочности. На основании исследований кажется вероятным, что
данное соотношение является универсальным для растворительных смесей, не способных
образовывать связи со спиртами и водородом.



К ВОПРОСУ О ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ F -ПЛАНАРНЫХ КРИВЫХ

И. Н. КУРБАТОВА—Н. В. ЯБЛОНСКАЯ

Одесса

В последние десятилетия отечественными и зарубежными авторами обстоятельно исследовались всевозможные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств. Пожалуй, наиболее широкое обобщение — так называемые F -планарные отображения пространств аффинной связности без кручения с аффинорной структурой — было предложено проф. Синюковым Н. С. и Микешем Й. [1]. В основу этой теории положено понятие F -планарных кривых [2], в свою очередь обобщающих геодезические линии. Классу F -планарных кривых, помимо геодезических, принадлежат также известные аналитически-планарные кривые на комплексных многообразиях [3], квазигеодезические линии в теории наблюдаемых [4] и др.

Изучение диффеоморфизмов многообразий, при которых заданные кривые переходят в кривые того или иного типа, представляет интерес не только для геометрии многообразий, но и с прикладной точки зрения. Так, например, в теории моделирования физических полей решается задача о возможности моделирования движения пробной частицы в одном поле ее движением в другом поле, причем траектории частицы в различных полях определяются их энергетическими режимами.

Очевидным является факт, что глобальные свойства, а также существование (или несуществование) упомянутых выше диффеоморфизмов многообразий во многом зависят от экстремальных свойств отображаемых кривых. Поэтому целью настоящей работы является изучение F -планарных кривых именно с вариационной точки зрения.

1. По определению [1], кривая $\gamma: x^h = x^h(1)$, $h=1, 2, \dots, n$, пространства аффинной связности без кручения A_n , отнесенного к системе координат x^1, x^2, \dots, x^n , в котором определена аффинорная структура $F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$, где a — некоторый инвариант, называется F -планарной, если ее касательный вектор $\dot{x}^h(t)$ ($\neq 0$) при параллельном перенесении вдоль нее остается в площадке, образованной касательным вектором \dot{x}^h и вектором $F_\alpha^h \dot{x}^\alpha$. В соответствии с этим кривая γ является F -планарной тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x}^h = \varrho_1(t) \dot{x}^h + \varrho_2(t) F_\alpha^h \dot{x}^\alpha,$$

где ϱ_1, ϱ_2 — некоторые (произвольные) функции параметра t , $\nabla_{\dot{x}}$ — ковариантная производная по связности A_n в направлении векторного поля \dot{x}^h . Через любую точку в каждом направлении проходит множество F -планарных кривых, зависящих от одной произвольной функции.

Прежде всего нам следовало бы подобрать соответствующую вариационную задачу таким образом, чтобы ее решениями являлись если не произвольные F -планарные кривые, то достаточно широкий их класс.

Пусть (V_n, g) — n -мерное риманово пространство, отнесенное к системе координат x^1, x^2, \dots, x^n ; $P=(x_1^1, \dots, x_1^n)$, $Q=(x_2^1, \dots, x_2^n)$ — фиксированная пара точек; $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \cong t \cong b$ (с фиксированными a, b) — множество кривых, содержащих эти точки: $P=(x^i(a))=(x_1^i)$, $Q=(x^i(b))=(x_2^i)$.

Рассмотрим функционал вида

$$S[\gamma] = \int_P^Q (1/2 g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha) dt. \quad (1)$$

Не вдаваясь в подробности, отметим, что лагранжиан

$$L = 1/2 g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha$$

мы выбрали по аналогии с известным в электродинамике классическим действием для зарядов, движущихся в электромагнитном поле [5] (в этом случае A_α — вектор-потенциал электромагнитного поля, а фигурирующий далее в уравнениях Эйлера—Лагранжа объект $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = F_{ij}$ — тензор электромагнитного поля; функция $\varrho(t)$ выражает плотность распределения заряда в пространстве; второе слагаемое под интегралом характеризует взаимодействие между частицами и полем).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Уравнения Эйлера—Лагранжа для экстремалей функционала (1) имеют вид:

$$\ddot{x}^j + \Gamma_{\alpha\beta}^j \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\varrho(t) F_\alpha^j \dot{x}^\alpha - \dot{\varrho}(t) A^j, \quad (2)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^j$ — симметрическая связность, согласованная с метрикой g_{ij} ,

$$A^j = A_\alpha g^{\alpha j}, \quad F_i^j = g^{j\alpha} F_{\alpha i}, \quad F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \quad (3)$$

Доказательство проводится стандартным образом [6].

Итак, наше V_n наделено аффинорной структурой F_i^h , порожденной ковекторным полем A_i («вектором-потенциалом»), причем соответствующая 2-форма F_{ij} замкнута в силу (3).

Уравнения (2) определяют при $\varrho(t) \equiv 0$ (взаимодействия нет, т. е. частица не заряжена) — геодезические линии, при $\varrho(t) \equiv const$ (плотность распределения заряда в пространстве постоянна) — особый класс F -планарных кривых, в частности, в случае, когда F_i^j — комплексная структура — аналитически-планарные кривые.

Как известно, выполнение уравнений Эйлера—Лагранжа для экстремалей функционала $S[\gamma]$ является лишь необходимым условием того, что вдоль некоторой кривой γ функционал $S[\gamma]$ имеет минимум среди всех кривых, соединяющих точки P, Q . Достаточное условие (при выполнении необходимого) состоит в положительной определенности квадратичной формы $G_\gamma(\xi, \eta)$, соответствующей билинейной форме) второй вариации)

$$G_\gamma(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} S[\gamma + \lambda \xi + \mu \eta]_{\lambda=0},$$

определенной на векторных полях, заданных на кривой $\gamma(t)$ и орбитах $\gamma(a)=P$ и $\gamma(b)=Q$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Билинейная форма*

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} S[\gamma + \lambda \xi + \mu \eta] \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \mu=0}} = G(\xi, \eta)$$

для

$$S = \int_a^b \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha \right) dt$$

и любой экстремали $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, вдоль которой выполняются (2), имеет вид

$$\begin{aligned} G_\gamma(\xi\eta) &= - \int_a^b (\nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i - R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma + \varrho(t) (L F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) L A^i) \eta^m g_{im} dt = \\ &= - \int_a^b (J\xi)^i g_{ij} \eta^j dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$(J\xi)^i = \nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i - R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma + \varrho(t) (L F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) L A^i,$$

R_{jki}^i — тензор кривизны V_n , L_ξ — производная Ли вдоль векторного поля.

Доказательство получается непосредственным вычислением второй вариации для лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha$ с учетом (2), (3).

Напомним, что векторное поле ξ вдоль экстремали γ идущей из P в Q , называется якобиевым, если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi=0$ и обращается в нуль на концах P и Q .

Итак, поле Якоби вдоль экстремали (2) характеризуется уравнениями

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i - R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma + \varrho(t) (L F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) L A^i = 0 \quad (5)$$

представляющих собою систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка и, следовательно, однозначно определяется значениями ξ и $\nabla_{\dot{x}} \xi$ в одной точке $(x^i(a))$ кривой γ . Множество полей Якоби вдоль экстремали (2) функционала (1) есть, очевидно, векторное пространство над \mathbb{R} размерности $2n$.

2. Возвращаясь к вопросу о кривых, вдоль которых функционал $S[\gamma]$ имеет минимум, сформулируем утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Если A^i — киллингово векторное поле, то на достаточно малом интервале длин кривые (2) с уравнениями $x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, дают минимум функционала (1) $S[\gamma]$ среди всех гладких кривых, соединяющих точки $P = (x^i(a))$ и $Q = (x^i(b))$.

Доказательство. Как мы уже говорили, условие минимальности экстремали $\gamma(t)$ функционала $S[\gamma]$ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ положительная для всех векторных полей ξ , обращающихся в нуль на концах.

Из (4) следует:

$$G_\gamma(\xi, \zeta) = - \int_a^b (\nabla_{\dot{x}}^2 \xi^i - R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma + \varrho(t)(L F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) L A^i) g_{ij} \xi^j dt.$$

Интегрирование по частям с учетом равенств $\xi(a) = \xi(b) = 0$ дает нам:

$$G(\xi, \zeta) = \int_a^b [\nabla_{\dot{x}} \xi^i g_{ij} \nabla_{\dot{x}} \zeta^j + (R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma + \nabla_{\dot{x}} \xi^i - \varrho(t)(L F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha - \dot{\varrho}(t) L A^i) g_{ij} \zeta^j] dt.$$

Ввиду того, что A^i — вектор Киллинга и на основании (2) последние три слагаемых под интегралом дают нуль. Далее, для достаточно малого интервала длин Δl имеет место оценка [6]

$$\left| \int_a^b R_{\alpha\beta\gamma}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \xi^\gamma g_{ij} \zeta^j dt \right| < c(\Delta l) \int_a^b \nabla_{\dot{x}} \xi^i g_{ij} \nabla_{\dot{x}} \zeta^j dt,$$

где $c(\Delta l)$ — некоторая константа, зависящая от метрики g_{ij} и длины Δl , причем $c(\Delta l) \rightarrow 0$ $\Delta l \rightarrow 0$. Учитывая положительную определенность метрики g_{ij} , получаем $G_\gamma(\xi, \zeta) > 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если векторное поле A^i порождает однопараметрическую группу движений, то несложно показать инвариантность лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha$ относительно этой группы. Следовательно, выполняется закон сохранения компоненты импульса вдоль поля A^i [6]

$$\frac{d}{dt} \left(A^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (A_\alpha \dot{x}^\alpha + \varrho(t) A_\alpha A^\alpha) = 0.$$

Это обстоятельство само по себе интересно, однако в рамках настоящей работы использоваться не будет.

3. Известным является факт, что поле Якоби вдоль геодезической в аффинносвязном пространстве A_n , рассматриваемое как кривая в его касательном расслоении TA_n , есть геодезическая относительно связности полного лифта [7].

В рассматриваемом случае также справедлива

ТЕОРЕМА 4. Поле Якоби вдоль экстермали функционала (1) $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, риманова пространства V_n, g , рассматриваемое как кривая в его касательном расслоении TV_n с метрикой полного лифта ${}^c g$, и обратно.

Доказательство. Пусть $x^1, x^2, \dots, x^{2n}, x^{n+1}, \dots, x^{2n}$ — локальная система координат в TV_n , индуцированная системой координат x^1, x^2, \dots, x^n в V_n . Условимся в дальнейшем, что индексы $i, j, k, \alpha, \beta, \dots$ принимают значения $1, 2, \dots, n$, а прописные T, J, A, B, \dots — $1, 2, \dots, 2n$. Если Γ — риманова связность многообразия V_n относительно (псевдо) римановой метрики g , то ${}^c \Gamma$ (полный лифт связности Γ) есть риманова связность в TV_n относительно (псевдо) римановой метрики ${}^c g$ (полного лифта метрики g) [7]. Напомним выраже-

ние компонент объекта связности ${}^c\Gamma$ в индуцированных координатах:

$$\begin{aligned} {}^c\Gamma_{jk}^i &= {}^c\Gamma_{j,k+n}^{i+n} = {}^c\Gamma_{j+n,k}^{i+n} = \Gamma_{jk}^i, \\ {}^c\Gamma_{j+n,k+n}^{i+n} &= {}^c\Gamma_{j,k+n}^i = {}^c\Gamma_{j+n,k}^i = {}^c\Gamma_{j+n,k+n}^i = 0, \\ {}^c\Gamma_{jk}^{i+n} &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^i} x^{i+n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где Γ_{jk}^i — компоненты объекта связности V_n в локальных координатах $x^1, x^2, \dots, \dots, x^n$.

Нам понадобятся также полные лифты тензорного поля $F\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ и векторного поля A из V_n в TV_n [7]:

$$\begin{aligned} {}^cF &= F_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + \frac{\partial F_j^i}{\partial x^k} x^{k+n} \frac{\partial}{\partial x^{i+n}} \otimes dx^j + F_j^i \frac{\partial}{\partial x^{i+n}} \otimes dx^{j+n}, \\ {}^cA &= A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} x^{j+n} \frac{\partial}{\partial x^{i+n}}, \end{aligned} \quad (7)$$

С функционалом (1) на V_n естественным образом ассоциируется функционал на TV_n

$$\tilde{S}[\tilde{\gamma}] = \int_a^b \left(\frac{1}{2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B + \varrho(t) A_B \dot{x}^B \right) dt, \quad (8)$$

где g_{AB} и A_B — полные лифты метрики g_{ij} и поля A_i из V_n в TV_n , соответственно.

Вдоль экстремали $\tilde{\gamma}: x^I = x^I(t)$, $a \leq t \leq b$, функционала $\tilde{S}[\tilde{\gamma}]$ в TV_n по необходимости выполняются уравнения (2):

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{AB}^i \dot{x}^A \dot{x}^B = -\varrho(t) F_A^i \dot{x}^A - \dot{\varrho}(t) A^i, \quad (9)$$

где

$$F_{JI} = g_{JA} F_A^I, \quad F_{JI} = \frac{\partial A_J}{\partial x^I} - \frac{\partial A_I}{\partial x^J}.$$

Поскольку для любой дифференциальной формы φ на V_n имеет место равенство [7]

$${}^c(d\varphi) = d({}^c\varphi),$$

аффинор F_j^i в конечном счете есть полный лифт из V_n в TV_n аффинора F_j^i .

Учитывая (6), (7), запишем (9) в виде системы уравнений:

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\varrho(t) F_\alpha^i \dot{x}^\alpha - \dot{\varrho}(t) A^i, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{i+n} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^\alpha} x^{\alpha+n} \dot{x}^j \dot{x}^k + 2\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^{k+n} = \\ = -\varrho(t) \left(\frac{\partial F_\alpha^i}{\partial x^k} x^{k+n} \dot{x}^\alpha + F_\beta^i \dot{x}^{\beta+n} \right) - \dot{\varrho}(t) \frac{\partial A^i}{\partial x^\alpha} x^{\alpha+n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что экстремаль (9) в TV_n проектируется на экстремаль (2) в V_n .

Далее, на основании (10)

$$\ddot{x}^{i+n} = \frac{\partial^2 x^{i+n}}{\partial x^j \partial x^k} \dot{x}^j \dot{x}^k - \frac{\partial x^{i+n}}{\partial x^j} (\Gamma_{\alpha\beta}^j \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) F_\alpha^i \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) A^i)$$

и потому после несложных, но громоздких выкладок (11) могут быть представлены в форме

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha \xi^i - R_{\alpha\beta\gamma}^i \xi^\gamma) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \varrho(t) (L_\xi F_\alpha^i) \dot{x}^\alpha + \dot{\varrho}(t) L_\xi A^i = 0, \quad (12)$$

где $\xi = (\xi^i) \stackrel{\text{def}}{=} (x^{i+n})$. Следовательно, $\xi^i(t) = x^{i+n}(t)$ есть поле Якоби вдоль экстремали (2) с уравнениями $x^i = x^i(t)$ в V_n .

Обратно, если $\gamma: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, есть экстремаль функционала (1) на V_n , а $\xi^i(t) — поле Якоби вдоль нее, то представляя (12) в виде (11), где $\xi^i(t) = x^{i+n}(t)$, получаем кривую $\tilde{\gamma}: x^i = x^i(t)$, $a \leq t \leq b$, в TV_n , удовлетворяющую уравнениям (9) и, значит, являющуюся экстремалью функционала (8) на TV_n . Теорема доказана.$

Аналогия последнего утверждения с соответствующим утверждением для геодезических линий наводит на мысль о том, что ситуация, изложенная в Теореме 4, возможно, имеет место для экстремалей любого функционала и полей Якоби вдоль нее, однако проверка этого факта не входила в наши планы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Й. Микеш, Н. С. Сянюков: О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. — Изв. вузов. Матем, 1983, № 1, с 55—61.
- [2] Н. С. Сянюков: Геодезические отображения римановых пространств. — М. Наука, 1979. — 256 с.
- [3] Д. В. Беклемишев: Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. — Итоги науки. Геометрия. М., ВИНТИ АН СССР, 1963, с. 165—212.
- [4] А. З. Петров: Моделирование физических полей. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1968, вып. 4—5, с. 7—21.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц: Механика. Электродинамика. — М.: Наука, 1969.
- [6] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко: Современная геометрия. — М.: Наука, 1986.
- [7] K. YANO, S. KOBAYASHI: Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles I. J. Math. Soc. Japan, vol. 18, №. 2, 1966. p. 194—210.

AZ F-PLANÁRIS GÖRBÉK VARÁCIÓS ELMÉLETÉNEK KÉRDÉSÉHEZ

I. N. KURBATOVA, N. V. JABLONSKAJA

Jelen dolgozatban a szerzők egy olyan variációs feladatot vizsgálnak, amely az elektromágneses térben levő töltés mozgásának klasszikus leírását általánosítja. Bizonyos funkcionál görbéit kutatják. Kiderül, hogy azok bizonyos kiegészítő feltételek mellett speciális F-planáris görbéket alkotnak.

ZU DER VARIATIONSTHEORIE DER F-PLANAREN KURVEN

I. N. KURBATOWA, N. V. JABLONSKAJA

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Variationsaufgabe, welche die bekannte, klassische Aufgabe bezüglich der Bewegung der Ladung im elektromagnetischen Feld generalisiert. Es werden die Extremalen vom gewissen Funktionale analysiert. Es stellt sich heraus, dass die unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen spezielle F-planare Kurven bilden.

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ $P_2^2(\xi, \mu)$

И. Н. КУРБАТОВА—Н. В. ЯБЛОНСКАЯ,
 (Одесса)

1. Пусть имеется пространство аффинной связности с кручением \bar{A}_n .

Нами ранее [1], [2] была показана возможность существования трех типов бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности и исследованы группы преобразований $P_2^2(\xi, \mu)$, $P_2^2(\xi, \mu)$.

Рассмотрим в A_n — пространстве аффинной связности без кручения, ассоциированном с \bar{A}_n кривые, удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda_{,a}^h \lambda^a = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{a\beta}^h \lambda^a \lambda^\beta = a\lambda^h + b\mu_a^h \lambda^a$$

при некоторых функциях $a(t)$, $b(t)$.

Такие кривые названы F -кривыми [3]. Если A_n допускает бесконечно малое преобразование $P_2^2(\xi, \mu)$ сохраняющее структуру, то F -кривые переходят в F -кривые. Верно и обратное: если F -кривая пространства A_n переходит в F -кривую, то A_n допускает бесконечно малое преобразование $P_2^2(\xi, \mu)$.

Пусть G — однопараметрическая группа преобразований $P_2^2(\xi, \mu)$ пространства аффинной связности A_n . Если каждое преобразование группы G любую F -кривую пространства A_n переводит в F -кривую, то G мы назвали группой $P_2^2(\xi, \mu)$ преобразований пространства A_n . Очевидно, что каждая однопараметрическая группа определяет $P_2^2(\xi, \mu)$ -преобразования и наоборот.

Максимальный порядок r [1] группы G преобразований $P_2^2(\xi, \mu)$ зависит от $n^2 + 2n - m(n - m)$ параметров, в случае структуры почти произведения и $2m(m + 2)$ для почти комплексной структуры.

2. Выясним, какие пространства могут иметь максимальной порядок группы $P_2^2(\xi, \mu)$ — преобразований.

Как известно [1] основные уравнения $P_2^2(\xi, \mu)$ преобразований характеризуются следующими основными уравнениями:

$$\xi_{,i}^h = v_i^h, \tag{1}$$

$$v_{i,j}^h = -R_{iaj}^h \xi^a + P_{ij}^h, \tag{2}$$

$$P_{ij}^h = \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \psi_i \mu_j^h + \psi_j \mu_i^h, \tag{3}$$

$$\mu_{i,j}^h = \sigma_i \delta_j^h + v_i \mu_j^h + \tilde{N}_{ij}^h, \tag{4}$$

$$\mu_a^h \mu_i^a = \delta_i^h, \quad (i = \pm 1), \tag{5}$$

$$L_\xi \mu_i^h = 0. \tag{6}$$

Условие интегрируемости (2) представляется в виде:

$$T_{ijk}^h = (\varphi_{i,j} - \psi_i \sigma_j - \psi_j \sigma_i) \delta_k^h - (\varphi_{i,k} - \psi_i \sigma_k - \psi_k \sigma_i) \delta_j^h + \varphi_{[j,k]} \delta_i^h + \\ + (\psi_{i,j} - \psi_i v_j - \psi_j v_i) \mu_k^h + (\psi_{i,k} - \psi_i v_k - \psi_k v_i) \mu_j^h - \psi_{[j,k]} \mu_i^h + A_{ijk}^h, \quad (7)$$

$$A_{ijk}^h = \psi_i \hat{N}_{kj}^h - \frac{1}{2} \psi_j \hat{N}_{ki}^h + \frac{1}{2} \psi_k \hat{N}_{ij}^h,$$

$$\varphi_{i,j} = \psi_i \sigma_j + \psi_j \sigma_i + n_1 (T_{\beta j \gamma}^\alpha - A_{\beta j \gamma}^\alpha) \mu_\alpha^\gamma \mu_i^\beta + n_2 (T_{j \gamma \beta}^\alpha - A_{j \gamma \beta}^\alpha) \mu_i^\gamma \mu_\alpha^\beta + \\ + n_3 (T_{\alpha \gamma \beta}^\alpha - A_{\beta \gamma \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta \mu_j^\gamma + n_4 (T_{\beta \gamma \alpha}^\alpha - A_{\beta \gamma \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta \mu_i^\gamma, \quad (8)$$

$$\psi_{i,j} = \psi_i v_j + \psi_j v_i + n_5 (T_{ij \beta}^\alpha - A_{ij \beta}^\alpha) \mu_\alpha^\beta + n_6 (T_{ji \beta}^\alpha - A_{ji \beta}^\alpha) \mu_\alpha^\beta + n_7 (T_{\delta \beta}^\alpha - A_{\gamma \delta \beta}^\alpha) \mu_i^\gamma \mu_j^\delta \mu_\alpha^\beta + \\ + n_8 (T_{j \beta \alpha}^\alpha - A_{j \beta \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta + n_9 (T_{i \beta \alpha}^\alpha - A_{i \beta \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta + n_{10} (T_{\beta j \alpha}^\alpha - A_{\beta j \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta + n_{11} (T_{\beta i \alpha}^\alpha - A_{\beta i \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta. \quad (9)$$

Здесь

$$T_{ijk}^h = L_\zeta R_{ijk}^h,$$

n_1, n_2, \dots, n_{11} — некоторые инварианты, зависящие от следа матрицы μ_i^h .

Из соотношений (4) вытекает

$$L_\zeta(\mu_i^h, j) = \delta_j^h L_\zeta \sigma_i + \mu_j^h L_\zeta v_i.$$

Отсюда следует

$$L_\zeta v_i = \varphi_\alpha \mu_i^\alpha - \psi_i \quad (10)$$

так как в противном случае мы пришли бы к бесконечно малым проективным преобразованиям.

Условие же (6) на основании (4) принимает вид

$$\sigma_i \xi^h + v_i \mu_\alpha^h \xi^\alpha + \frac{1}{2} \hat{N}_{i\alpha}^h \xi^\alpha + \mu_\alpha^h v_i^\alpha - \mu_i^\alpha v_\alpha^h = 0. \quad (11)$$

Пространства A_n могут иметь максимальный порядок группы r преобразований $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ если система (1), (2), (8), (9) имеет решение для любых значений $\xi^h, v_i^h, \varphi_i, \psi_i$, удовлетворяющих уравнениям (10), (11).

В частности, они должны иметь решение и при

$$\xi^h = 0, \quad v_i^h = \delta_i^h.$$

Тогда условия (11) выполнены, а соотношения (7) и (10) принимают вид

$$\bar{R}_{ijk}^h = \bar{A}_{ij} \delta_k^h - \bar{A}_{ik} \delta_j^h - \bar{B}_{jk} \delta_i^h + \bar{C}_{ij} \mu_k^h - \bar{C}_{ik} \mu_j^h - \bar{D}_{jk} \mu_i^h + \bar{A}_{ijk}^h, \quad (12)$$

$$v_i = \bar{\varphi}_\alpha \mu_i^\alpha - \bar{\psi}_i. \quad (13)$$

Здесь

$$A_{ijk}^h = \psi_i \hat{N}_{jk}^h - \frac{1}{2} \psi_j \hat{N}_{ik}^h + \frac{1}{2} \psi_k \hat{N}_{ij}^h,$$

$$\bar{A}_{ij} = n_1 (\bar{R}_{\beta j \gamma}^\alpha - \bar{A}_{\beta j \gamma}^\alpha) \mu_\alpha^\gamma \mu_i^\beta + n_2 (\bar{R}_{j \gamma \beta}^\alpha - \bar{A}_{j \gamma \beta}^\alpha) \mu_i^\gamma \mu_\alpha^\beta + n_3 (\bar{R}_{\alpha \gamma \beta}^\alpha - \bar{A}_{\beta \gamma \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta \mu_j^\gamma + \\ + n_4 (\bar{R}_{\beta \gamma \alpha}^\alpha - \bar{A}_{\beta \gamma \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta \mu_i^\gamma,$$

$$\bar{B}_{jk} = \bar{A}_{[jk]},$$

$$\bar{C}_{ij} = n_5 (\bar{R}_{\beta \gamma \alpha}^\alpha - \bar{A}_{\beta \gamma \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta \mu_i^\gamma + n_6 (\bar{R}_{ji \beta}^\alpha - \bar{A}_{ji \beta}^\alpha) \mu_\alpha^\beta + n_7 (\bar{R}_{\delta \beta}^\alpha - \bar{A}_{\gamma \delta \beta}^\alpha) \mu_i^\gamma \mu_j^\delta \mu_\alpha^\beta + \\ + n_8 (\bar{R}_{j \beta \alpha}^\alpha - \bar{A}_{j \beta \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta + n_9 (\bar{R}_{i \beta \alpha}^\alpha - \bar{A}_{i \beta \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta + n_{10} (\bar{R}_{\beta j \alpha}^\alpha - \bar{A}_{\beta j \alpha}^\alpha) \mu_i^\beta + \\ + n_{11} (\bar{R}_{\beta i \alpha}^\alpha - \bar{A}_{\beta i \alpha}^\alpha) \mu_j^\beta,$$

$$\bar{D}_{jk} = \bar{C}_{[jk]}.$$

Таким образом, для того, чтобы пространство A_n было максимально подвижным, необходимо, чтобы тензор кривизны имел вид (12). Для голоморфно-плоских почти комплексных многообразий с интегрируемой структурой тензор Римана имеет вид (12), а так как

$$\mu_{i,j}^h = 0, \quad v_i = 0$$

соотношения (13) выполняются. Известно, что максимальный порядок r группы Ли голоморфно-проективных преобразований равен $2m(m+2) - 4$, т. е. согласован с проядком группы бесконечно малых преобразований $P_2^2(\xi, \mu)$ с почти комплексной структурой. Следовательно, голоморфно-плоские почти комплексные многообразия с интегрируемой структурой являются максимально подвижными пространствами относительно преобразований $P_2^2(\xi, \mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сянюков Н. С., Яблонская Н. В.: Группы Ли обобщенных симметрий пространств аффинной связности. — Всесоюзный симпозиум по теории симметрии и ее обобщениям. Кишинев, 1980, с. 99—100.
- [2] Яблонская Н. В.: О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности. Известия высших учебных заведений. Математика, Казань, т. I, 1986 г., с. 78—80.
- [3] Сянюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств, Москва, 1979, с. 255.
- [4] ISHIGARAS: Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. I., 1957. 9, No 3, p. 273—297.

MAXIMÁLISAN MOZGATHATÓ TEREK A $P_2^2(\xi, \mu)$ TRANSZFORMÁCIÓKRA VONATKOZÓAN

I. N. KURBATOVA, N. V. JABLONSKAJA

Ebben a dolgozatban a szerzők a $P_2^2(\xi, \mu)$ affinösszefüggő, általános terek speciális, infinitezimális, majdnem geodetikus transzformációt, és transzformációcsoportjait vizsgálják, továbbá meghatározzák az ezen transzformációkra vonatkozóan maximálisan mozgatható tereket.

ÜBER MAXIMAL BEWEGLICHE RÄUME BEZÜGLICH DER TRANSFORMATIONEN $P_2^2(\xi, \mu)$

I. N. KURBATOWA, N. V. JABLONSKAJA

In dieser Arbeit werden spezielle, infinitesimale, fastgeodätische Transformationen von $P_2^2(\xi, \mu)$ allgemeinen affinzusammenhängenden Räumen und die Gruppen dieser Transformationen untersucht. Bezüglich dieser Transformationen werden maximal bewegliche Räume gegeben.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also outlines the various methods and tools used to collect and analyze data, highlighting the need for consistency and precision in data collection.

The second part of the document focuses on the analysis of the collected data. It describes the various statistical techniques and models used to interpret the data, including regression analysis, time series analysis, and hypothesis testing. This section also discusses the challenges associated with data analysis, such as missing data, outliers, and the need for appropriate statistical tests.

The third part of the document discusses the application of the analysis results. It describes how the findings are used to inform decision-making and to identify areas for improvement. This section also discusses the importance of communicating the results of the analysis to the relevant stakeholders and the need for ongoing monitoring and evaluation.

The fourth part of the document discusses the future of data analysis and the role of technology in this field. It describes the various emerging technologies, such as artificial intelligence, machine learning, and big data, and how they are being used to improve data analysis. This section also discusses the challenges associated with these technologies and the need for ongoing research and development.

The fifth part of the document discusses the ethical implications of data analysis. It describes the various ethical issues, such as privacy, security, and bias, and how they can be addressed. This section also discusses the need for ongoing education and training in data ethics and the role of regulatory bodies in ensuring ethical data analysis.

The document concludes by emphasizing the importance of data analysis in various fields and the need for ongoing research and development in this field. It also discusses the role of data analysis in improving decision-making and the need for ongoing monitoring and evaluation.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS AZ EUKLIDESZI, AZ AFFIN ÉS A PROJEKTÍV TÉR NEVEZETES LEKÉPEZÉSEIT BIZTOSÍTÓ ALAPTÉTELEKHEZ

MISKOLCZI JÓZSEF

Az euklideszi, az affin és a projektív geometria jellemző leképezései: a hasonlóság, az affinitás és a kollineáció. E fogalmakat — az illető geometria felépítésétől függően — más-más formában szokás megadni. Ha már a szóban forgó teret bizonyos értelemben „metrizáltuk”, akkor — az oktatási gyakorlatot is figyelembe véve — célszerű az alábbi analóg megfogalmazású definíciók kimondása.

Definíció. Legyen π_1, π_2 az $\left\{ \begin{array}{l} \text{euklideszi} \\ \text{affin} \\ \text{projektív} \end{array} \right\}$ tér két síkja. A

$$\psi: \pi_1 \rightarrow \pi_2 (P \rightarrow \psi P)$$

bijektív leképezést $\left\{ \begin{array}{l} \text{hasonlóságnak} \\ \text{affinitásnak} \\ \text{kollineációnak} \end{array} \right\}$ nevezzük, ha $\left\{ \begin{array}{l} \text{aránytartó} \\ \text{osztásviszonytartó} \\ \text{kettősviszonytartó} \end{array} \right\}$. (1)

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy e definíciók a megfelelő terekre is kiterjeszthetők, továbbá az is, hogy ezen megfogalmazások „elrejtett” feltételként tartalmazzák az egyenestartást, illetve az illeszkedést (természetesen akkor, ha az (1)-gyel jelölt tulajdonságokat a szokásos klasszikus értelmezésben használjuk).

Mindhárom térben megadható egy-egy ún. alaptétel, amely lehetővé teszi a szóban forgó leképezésnek az illető térbeli generálását.

A következőkben, pl. az affin geometriában — a fontosabb lépéseket kiemelve — egy olyan utat vázolunk, amely során eljutunk az alaptételig, majd az alaptételt bizonyítjuk is.

1. Generálják az affin teret a következő alapfogalmak és axiómák.

Alapfogalmak: pont, egyenes, sík, tér, illeszkedés, elválasztás.

- a) A Hilbert-féle illeszkedési és rendezési axiómák.
- b) Párhuzamossági axióma.
- c) Dedekind-féle folytonossági axióma.
- d) Desargues-féle axióma: (COXETER [2]).

Az alábbiakban $e \parallel g$ jelöli azt, hogy az e egyenes egyező állású a g egyenessel.

2. Definíció. Legyen π affin sík. A

$$\psi_{ny}: \pi \rightarrow \pi (P \rightarrow \psi P)$$

bijektív leképezést nyújtásnak nevezzük, ha $e \parallel e$.

Egyszerűen bizonyítható, hogy egy sík két egyező állású szakasza egyetlen nyújtást határoz meg [2].

3. „Metrizáljuk” az affin teret pl. a [2]-ben leírtak szerint. Ennek során eljuthatunk az osztásviszony fogalmához is.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a különböző állású szakaszok hosszának összehasonlítása az affingeometriában értelmetlen!

4. Affinitás fogalma.

Következménye. A nyújtás speciális affinitás.

5. Az előzőekből nyilvánvalóan adódnak, illetve könnyen bizonyíthatók a következő állítások:

Az affinitások halmaza a leképezések szorzása szerint csoport. Az affinitás egyenestartó, illeszkedéstartó, rendezés- és párhuzamosságtartó. Ha egy affinitásban egy egyenesnek két fixpontja van, akkor ennek az egyenesnek minden pontja fixpont. Ha egy síkbeli affinitásnak három nem kollineáris fixpontja van, akkor ennek az affinitásnak minden pontja fixpont.

6. Definíció. Legyen π_1 és π_2 két affin sík. Ezek egybe is eshetnek. Az olyan affinitást, amelynek pontosan egyetlen t fixegyense van és t minden pontja fixpont tengelyes affinitásnak nevezzük.

Könnyen igazolható, hogy a tengelyes affinitást a tengelye és egy a tengelyre nem illeszkedő $A, A' (A \rightarrow A')$ pontpárja egyértelműen meghatározza.

A tengelyes affinitás ezen adatokkal történő megadását a következőkben így jelöljük:

$$\psi_{a(t, A \rightarrow A')}.$$

7. Alaptétel. *Ha adott a π_1 és a π_2 affin sík, továbbá $A_i \in \pi_1$ és $A'_i \in \pi_2$ ($i=1, 2, 3$) nem elfajuló háromszögek, akkor egy és csak egy olyan $\psi_a: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ ($P \rightarrow \psi P$) affinitás van, amelyre az $A_i \rightarrow A'_i$ ($i=1, 2, 3$) teljesül.*

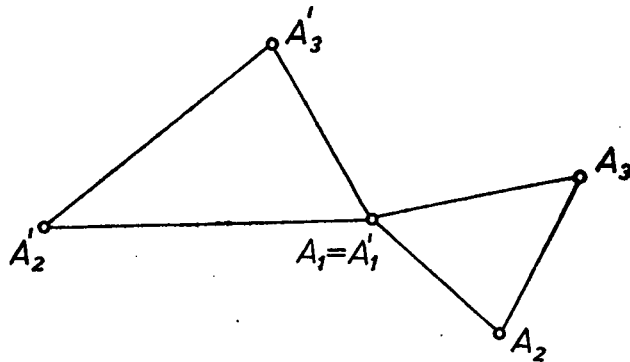
I. A létezés bizonyítása lépésekre bontva.

(1) a) Ha $\pi_1 \parallel \pi_2$, akkor egy nyújtással,

b) ha $\pi_1 \times \pi_2$, akkor egy tengelyes affinitással,

c) ha $\pi_1 = \pi_2$, de egyetlen $A_i \rightarrow A'_i$ pontpár sem fix,

akkor szintén egy tengelyes affinitással az 1. ábrán látható egysíkú helyzet — az eredeti jelöléseket megtartva — megvalósítható.



1. ábra

Jelölje az (1) alatti affinitást ψ_1 .

(2) Legyen ψ olyan tengelyes affinitás, amelyre

$$\psi_2 \equiv \psi_{\alpha(t, A_2 \rightarrow A'_2)} \quad \text{és} \quad A_1 (\equiv A'_1) \in t.$$

Ekkor $\bar{A}_2 := \psi_2(A_2)$.

(3) Majd tekintsük a

$$\psi_3 \equiv \psi_{\alpha(t(A'_1, A'_2), \bar{A}_2 \rightarrow A'_2)}$$

tengelyes affinitást-

Végül az (1), (2), (3)-ból a

$$\psi_3 \psi_2 \psi_1 = \psi_a$$

affinitás adódik, amelyre

$$\psi_a A_i = A'_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

II. Az egyértelműség bizonyítása. Legyen ψ_a és ψ'_a a tétel kirovásának eleget tevő két affinitás. Tudjuk, hogy ψ_a inverze: ψ_a^{-1} is affinitás. Képezzük a $\psi_a^{-1} \psi'_a$ szorzatot. Az így kapott affinitásnak három nem kollineáris fixpontja van. Ezért az 5. pont utolsó állítása szerint:

$$\psi_a^{-1} \psi'_a = I.$$

Szorozzuk ψ_a -val,
ahonnan

$$\psi'_a = \psi_a.$$

Megjegyzés. E tétel az affin leképezésnek egy egyszerű megadási módját biztosítja. Az alaptétel a három dimenziós affin térre is kiterjeszthető. Ebben az esetben az affinitást két tetraéder határozza meg.

Térjünk át a projektív sík alaptételére.

Alaptétel. Ha adott két projektív sík, π_1 és π_2 , továbbá $A_i \in \pi_1$ és $A'_i \in \pi_2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) pontnégyesek úgy, hogy sem az A_i , sem az A'_i pontok hármanként nem kollineárisak, akkor egy és csak egy olyan $\psi_k: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ ($P \rightarrow \psi P$) kollineáció van, amelyre az $A_i \rightarrow A'_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) teljesül

Itt is, mint az előzőekben — az affin geometria alaptétele esetén — pl. a [2]-ben megtalálható axiómarendszerből kiindulva a kollináció definícióján és egy sor tétel- és definíció keresztül az (affin geometriában vázolt analóg utat követve) eljuthatunk az alaptételig, illetve annak bizonyításához.

Most e dolgozatban az alaptétel állításának csak az egzisztenciális részére adunk egy bizonyítást, de előtte a bizonyítás előkészítése érdekében megadjuk a centrális-axiális kollineáció definícióját, majd néhány megjegyzést fűzünk a centrális-axiális kollineációhoz. Az unicitással azért nem foglalkozunk, mert ez néhány egyszerű állítás figyelembevételével — amely állítások megfelelői az affin geometriában is megtalálhatók — formailag ugyanúgy bizonyítható, mint az affinitás alaptétele esetén.

Definíció. Az olyan kollineációt, amelynek van centruma és tengelye: C, t , centrális-axiális kollineációnak nevezzük.

Ismert, hogy $\forall e|C \in e$ esetén $e = e'$. (A centrum a tengely duálisa!) Nyilvánvaló az is, hogy a megfelelő pontokat összekötő egyenesek — $a(AA')$, $A \neq A'$ — a centrumra, a megfelelő egyenesek metszéspontjai — $a \cap a'$, $a \neq a'$ — pedig a tengelyre illeszkednek. A centrális-axiális kollineációt a centruma, tengelye és egy

megfelelő tengelyre nem illeszkedő pontjára vagy C -re nem illeszkedő egyenespárja egyértelműen meghatározza.

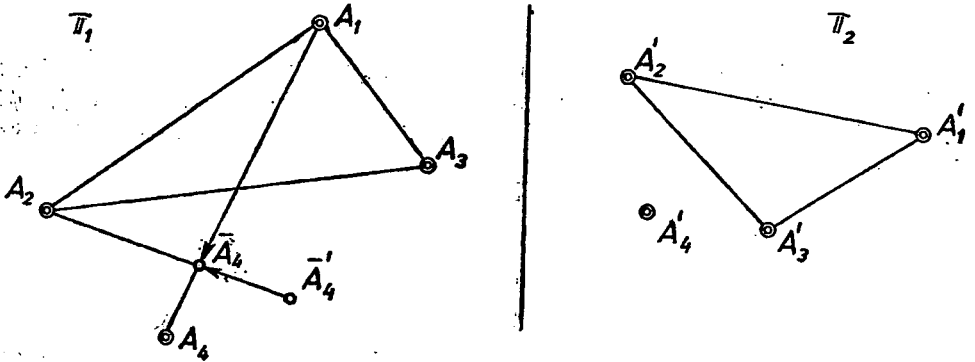
Egy centrális-axiális kollineációt az említett meghatározó adatokkal a következőkben így jelöljük:

$$\psi_{k(C, t, A \rightarrow A')}, \text{ illetve } \psi_{k(C, t, \sigma \rightarrow \sigma')}.$$

Nyilván a C és a t lehet ideális is. Pl. legyen C ideális t pedig közönséges. Ez a centrális-axiális kollineáció az affin geometriában a tengelyes affinitás. Ennélfogva az alptétel bizonyításában az „affinitásra” támaszkodhatunk.

Ezek után következék a kollineáció alptételében kimondott létezés bizonyítása.

(1) Legyen $\psi_3 \equiv \psi_\sigma: \pi_2 (P \rightarrow \psi P)$ az $A_1 A_2 A_3$ és az $A'_1 A'_2 A'_3$ háromszögek által meghatározott „affinitás” ($A_i \rightarrow A'_i$, $A_i \in \pi_1$, $A'_i \in \pi_2$, ($i=1, 2, 3$); 2. ábra).



2. ábra

Ekkor

$$\bar{A}'_4 := \psi_\sigma^{-1}(A'_4).$$

(2) Legyen ψ_1 olyan kollineáció, amelyre

$$\psi_1 \equiv \psi_{k(C=A_1, t(A_1 A_2), A_4 \rightarrow \bar{A}_4)},$$

ahol $\bar{A}_4 := e(A_1 A_4) \cap g(A_2 \bar{A}'_4)$ és $\psi_1 A_i \equiv A_i$ ($i=1, 2, 3$), $\psi_1 A_4 \equiv \bar{A}_4$.

(3) Legyen ψ_2 olyan kollineáció, amelyre

$$\psi_2 \equiv \psi_{k(C=A_2, t(A_1 A_3), \bar{A}_4 \rightarrow \bar{A}'_4)}.$$

Ekkor

$$\psi_2 A_i \equiv A_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{és} \quad \psi_2 \bar{A}_4 \equiv \bar{A}'_4.$$

Végül tekintsük a $\psi_3 \psi_2 \psi_1 (= \psi_k)$ szorzatot, amely szintén kollineáció és amely úgy képezi le a π_1 -t a π_2 síkra, hogy $\psi_3 \psi_2 \psi_1 A_i \equiv A'_i$ ($i=1, 2, 3, 4$).

Befejezésül bizonyítás nélkül közöljük a hasonlósági leképezés alptételét.

Alptétel. Ha adott a π_1 és π_2 euklideszi sík és mindegyikben egy-egy $\bar{\pi}_1$ és $\bar{\pi}_2$ félsík, továbbá mindkét félsík határán egy-egy $A_1 B_1$ és $A_2 B_2$ szakasz, akkor egy és csak egy olyan $\psi_h: \pi_1 \rightarrow \pi_2$ ($P \rightarrow \psi P$) hasonlósági leképezés (hasonlóság) van, amelyre $\bar{\pi}_1 \rightarrow \bar{\pi}_2$ és $A_1 \rightarrow A_2$, $B_1 \rightarrow B_2$ teljesül.

Megjegyezzük, hogy ha az ún. klasszikus háromdimenziós euklideszi teret bármelyik szokásos axiómarendszer alapján is tárgyaljuk, akkor a hasonlósági alaptétel bizonyítása analóg gondolatmenetre építhető, mint az affinitás alaptétele.

Ha pedig az affin tér bevezetése megelőzi az euklideszi tér tárgyalását, akkor a fenti megjegyzés nyilvánvaló. Ui. az euklideszi tér felfogható mint speciális affin tér.

Végezetül kiegészítésként megemlítjük, hogy a kollineáció alaptétele két projektív sík között egy projektív leképezést, a hasonlóság alaptétele, illetve ennek a háromdimenziós euklideszi térre való kiterjesztett formája pedig két euklideszi sík között, illetve az euklideszi térnek önmagára való hasonlósági leképezésnek egy-egy megadását teszi lehetővé.

IRODALOM

- [1] F. BACHMANN: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, SPRINGER-VERLAG, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959.
- [2] H. S. M. COXETER: A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [3] HAJÓS GY.—STROHMAJER J.: A geometriai alapjai, Egyetemi jegyzet, 1970.
- [4] RADÓ F., ORBÁN B.: A geometria mai szemmel, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.
- [5] REIMAN I.: A geometria és határterületei, Gondolat. Budapest, 1986.

BEMERKUNGEN ZU DEN FUNDAMENTALSÄTZEN, DIE DIE MERKWÜRDIGEN ABBILDUNGEN EUKLIDISCHEN, AFFINEN UND PROJEKTIVEN DER RÄUME LIEFERN

JÓZSEF MISKOLCZI

In dieser Arbeit werden je eine Abbildung und je ein — in analoger Weise formulierter — Fundamentalsatz in dem euklidischen, affinen, bzw. projektiven Raum gegeben. Es wird auf die Möglichkeit der Beweise von geeigneten Fundamentalsätzen in der passenden Geometrie hingewiesen, ferner werden auch die Fundamentalsätze der affinen und projektiven Planimetrie bewiesen.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕВКЛИДОВА, АФФИННОГО И ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВ, ОПОРНОЙ ДЛЯ ИХ ЗНАМЕНИТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

МИШКОЛЬЦИ, ЙОЖЕФ

Вводятся по — аналогичным друг другу — отображению и по основной теореме в каждом из евклидова, аффинного и проективного пространств. Указывается на возможность доказать основные теоремы опираясь лишь на средства геометрии соответствующего пространства. Изложено доказательство для случаев аффинной и проективной геометрий.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all financial transactions. This includes not only income and expenses but also assets and liabilities. Proper record-keeping is essential for tax compliance and for determining the true financial position of an individual or business.

2. The second part of the document outlines the various methods used to collect and analyze financial data. This includes direct observation, interviews, and the use of standardized forms. Each method has its own strengths and weaknesses, and the choice of method depends on the nature of the research and the resources available.

3. The third part of the document describes the process of data analysis. This involves organizing the collected data into a systematic format, identifying patterns and trends, and drawing conclusions based on the evidence. Statistical techniques are often used to quantify the results and to test hypotheses.

4. The final part of the document discusses the importance of reporting the results of the research. This involves preparing clear and concise reports that summarize the findings and provide recommendations for future action. The reports should be written in a way that is accessible to the intended audience and should be supported by appropriate evidence and analysis.

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ АФФИННО-СВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

ПОКАСЬ С. М.—ЯБЛОНСКАЯ Н. В.
 (Одесса)

Теория почти геодезических отображений аффинно-связных и римановых пространств является естественным и в то же время широким обобщением теории геодезических отображений. Она впервые была предложена Н. С. Синюковым ([1]). Им были изучены почти геодезические отображения пространств аффинной связности без кручения.

В настоящей работе рассматриваются почти геодезические отображения общих пространств аффинной связности с кручением, удовлетворяющие условию взаимности, а также ассоциированных римановых пространств второго порядка:

1. Сначала остановимся на рассмотрении почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности с кручением. По определению ([1]) отображение A_n на \bar{A}_n называется почти геодезическим, если в результате этого отображения каждая геодезическая линия переходит в почти геодезическую. Отображения P_3 характеризуются следующими основными уравнениями ([2])

$$\Gamma_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + K_{ij}^h, \quad (1)$$

$$\mu_{,i}^h + K_{\alpha i}^h \mu^\alpha = \mu^h \nu_i + \varrho \delta_i^h. \quad (2)$$

Здесь $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов связности A_n и \bar{A}_n соответственно, ψ_i, μ^h, ν_i — некоторые векторы, ϱ — инвариант, ψ_{ij} — симметрический тензор, K_{ij}^h — некоторый косимметрический по i, j тензор, « ν » обозначает ковариантную производную в A_n , δ_i^h — символ Кронекера.

Отображение $P_3: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ будем называть удовлетворяющим условию взаимности, если обратное ему отображение также является почти геодезическим третьего типа и соответствует тому же вектору μ^h .

Поскольку для отображения \bar{A}_n на A_n обратного отображению P_3 тензор деформации связности равен

$$\bar{P}_{ij}^h = -P_{ij}^h$$

в соответствии с (1) и (2) мы можем не нарушая общности рассуждений, предполагать

$$\bar{\varphi}_i = -\varphi_i, \quad \bar{\psi}_{ij} = -\psi_{ij}, \quad \bar{\mu}^h = \mu^h,$$

$$\bar{K}_{ij}^h = -K_{ij}^h, \quad \bar{\nu}_i = -\nu_i, \quad \bar{\varrho} = \varrho.$$

Взаимность отображения будет иметь место тогда и только тогда, когда для вектора μ^h в пространстве A_n будут выполняться уравнения (2), т. е.

$$\mu^h_{;i} - K^h_{ia} \mu^a = \bar{v}_i \mu^h + \bar{q} \delta^h_i, \quad (3)$$

где «/» — знак ковариантного дифференцирования в \bar{A}_n . Переходя здесь от ковариантной производной в A_n на основании (1) и принимая во внимание (2), получаем

$$K^h_{ia} \mu^a = (\varphi_a \mu^a + 2\varrho) \delta^h_i + (2v_i + \varphi_i + \psi_{ia} \mu^a) \mu^h. \quad (4)$$

Следовательно, условий (4) необходимо для взаимности отображений $\Pi_3: A_n \rightarrow \bar{A}_n$. Очевидна и достаточность этих условий.

Рассмотрим в A_n кривые, координаты текущей точки которых удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = a\lambda^h + b\mu^h \quad (5)$$

при некоторых произвольных $a(t), b(t)$. Эти кривые называют F -кривыми пространства A_n [1]. Вследствие (2) и (3) мы видим, что

$$\mu^h_{;a} \lambda^a = p_i \lambda^h + g_i \mu^h.$$

Вместе с (5) это означает, что F -кривые являются в A_n почти геодезическими с полем $E_2\{\lambda^h, \mu^h\}$ компланарных вдоль них плоскостей.

В результате отображения $\Pi_3: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ удовлетворяющее условию взаимности каждая F -кривая пространства \bar{A}_n представляет собой F -кривые пространства A_n . Следовательно, относительно отображения Π_3 , удовлетворяющим свойству взаимности F -кривые пространства A_n инварианты.

Если \bar{A}_n отнести к аффинной системе координат, относительно которой компоненты объекта его связности $\Gamma^h_{ij} = 0$, то

$$\Gamma^h_{ij} = -\varphi_i \delta^h_j - \varphi_j \delta^h_i - \psi_{ij} \mu^h - K^h_{ij} \quad (6)$$

Из (2), вследствие (6), получим

$$\frac{\partial \mu^h}{\partial x^i} = (v_i + \varphi_i + \psi_{ia} \mu^a) \mu^h + (\varrho + \varphi_a \mu^a) \delta^h_i \quad (7)$$

Если

$$v_i = -\varphi_i - \psi_{ia} \mu^a, \quad \varrho = -\varphi_a \mu^a,$$

то $\mu^h = const.$

Очевидно и обратное утверждение: если в пространстве A_n найдется такая система координат относительно которой компоненты Γ^h_{ij} его объекта связности имеют выше указанные значения, при заданных функциях $v_i(x)$ и $\varrho(x)$, определяемые формулами (7) и постоянном векторе μ^h , то A_n допускает отображение Π_3 .

2. Обратимся теперь к ассоциированным римановым пространствам второго порядка.

Пусть V_n — риманово пространство, отнесенное к произвольной системе координат $\{x^h\}$. В окрестности любой его фиксированной точки $M_0(x^h_0)$ построим так называемое ассоциированное пространство второго порядка \bar{V}^2_n , определив его метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ следующим образом ([3])

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j} y^{i_1} y^{i_2}, \quad (8)$$

где g_{ij} , $R_{i_1 i_2 j}$ — значения компонент метрического тензора и тензора Римана пространства V в точке M_0 . Если в V_n перейти к римановой системе координат $\{y^h\}$ с началом в точке M_0 и разложить метрический тензор $g_{ij}(y)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки, то можно убедиться в том, что пространство \tilde{V}_n^2 реализует приближение второго порядка для V_n и поэтому отражает геометрические свойства с определенной степенью точности. Имеет место предложение.

Теорема 1. *Если риманово пространство V_n подвергается изометрическому преобразованию, то ассоциированное с ним в окрестности данной точки M_0 пространство \tilde{V}_n^2 также подвергается лишь изометрическому преобразованию.*

Действительно, из (8) видно, что

$$ds^2 = \left[g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j} y^{i_1} y^{i_2} \right] dy^i dy^j. \quad (9)$$

В пространстве V_n от координат $\{x^h\}$ перейдем к новым координатам $\{x'^h\}$. Известно, что при этом ([1], [4])

$$ds'^2 = \left[g'_{ij} + \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j} y'^{i_1} y'^{i_2} \right] dy'^i dy'^j, \quad (9)$$

где

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j},$$

$$R'_{i_1 i_2 j} = R_{\alpha\lambda\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{i_2}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

Подставляя значения последних двух соотношений, вычисленных в точке M_0 , в правую часть (9), получим

$$ds'^2 = \left[g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left(R_{\alpha\lambda\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^{i_1}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{i_2}} \right) \Big|_0 y'^{i_1} y'^{i_2} \right] \cdot y'^{i_1} y'^{i_2} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \right) \Big|_0 dy'^i dy'^j.$$

Полагая

$$y^h = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\alpha} \Big|_0 y'^\alpha,$$

получим

$$ds'^2 = \left[g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} R_{\alpha i_1 i_2 \beta} y^{i_1} y^{i_2} \right] dy^\alpha dy^\beta$$

т. е.

$$ds'^2 = ds^2.$$

Таким образом, мы убедились, что пространство \tilde{V}_n^2 инвариантно связано с исходным пространством V_n относительно выбора системы координат в V_n . Построим теперь для двух римановых пространств $V_n(x, g)$ и $\bar{V}_n(x, \bar{g})$, где V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на \bar{V}_n ([1]), инвариантно связанные с ними ассоциированные римановы пространства второго порядка

$\tilde{V}_n^2(y, \tilde{g})$ и $\tilde{V}_n^2(y, \tilde{\tilde{g}})$. Здесь

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j} y^{i_1} y^{i_2} \quad (10)$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij}(y) = \tilde{g}_{ij} + \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j} y^{i_1} y^{i_2}. \quad (11)$$

Исследуем специфику отображения $\tilde{\gamma}$ пространства \tilde{V}_n^2 на пространство $\tilde{\tilde{V}}_n$, которое индуцируется геодезическим отображением γ исходных пространств.

Для этого найдем тензор деформации

$$\tilde{P}_{ij}^h = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h$$

отображения γ .

Так как пространство \tilde{V}_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на \tilde{V}_n , то между компонентами тензора Римана имеется зависимость ([1], [5])

$$\tilde{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \psi_{ik} \delta_j^h - \psi_{ij} \delta_k^h. \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{3} R_{i_1 i_2 j}^i y^{i_1} y^{i_2} = t_j^i, \quad (13)$$

$$t_j^{(p+1)i} = t_\alpha^{(p)i} t_j^\alpha, \quad (p = 1, 2, \dots)$$

$$\psi_{i_1 i_2} y^{i_1} y^{i_2} = A, \quad A^p = \underbrace{A \cdot A \dots \cdot A}_p \quad (14)$$

Из (12)—(14) методом полной индукции вытекает

Лемма. Для любого натурального n справедливо соотношение

$$t_p^h = t_p^h + \sum_{s=1}^{m-1} c_s^m A^s t_n^{(m-s)h} - \psi_{i, \alpha} y^{i_1} y^{i_2} \times$$

$$\times [t_k^{(m-1)\alpha} + \sum_{s=1}^{m-2} c_s^{m-1} A^s t_k^{(m-s)\alpha}] + A^m \delta_k^h - A^{m-1} \psi_{kl} y^l y^h,$$

где C_s^m -биномиальные коэффициенты.

Используя лемму, нетрудно получить следующее утверждение

Теорема 2. Если риманово пространство \tilde{V}_n допускает нетривиальное геодезическое отображение γ на \tilde{V}_n , то тензор деформации P_{ij}^h индуцированного пространства второго порядка $\tilde{\tilde{V}}_n^2$ на \tilde{V}_n^2 имеет следующее строение:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ij}^h = & \left(1 - \frac{\beta}{1-\beta}\right) \varphi_{ii} \delta_{jj}^h - \left\{ \frac{2}{3} \psi_{.j} + \varphi_\alpha \mu_{ij}^\alpha - 2\varphi_i \varphi_j + \right. \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} [(-1)^{m+1} (\varphi_\alpha t_\beta^{(m-1)\alpha} \mu_{ij}^\beta + \sum_{s=1}^{m-2} c_s^{m-1} \beta^s \varphi_\alpha t_\beta^{(m-s)\alpha} \mu_{ij}^\beta + \beta^{m-1} \varphi_\alpha \mu_{ij}^\alpha) - \\ & \left. - \varphi_k t_{ii}^{(m-1)\alpha} \varphi_{jj} - \sum_{s=1}^{m-1} c_s^{m-1} \beta^s \varphi_\alpha t_{ii}^{(m-s)\alpha} \varphi_{jj} - 2\beta^{m-1} \varphi_i \varphi_j \right\} y^h + \\ & + \beta \mu_{ij}^h - \varphi_{ii} t_{jj}^h + \sum_{m=2}^{\infty} \{ (-1)^{m+1} [\sum_{s=1}^{m-1} c_s^m \beta^s t_\alpha^{(m-s)h} \mu_{ij}^\alpha + \beta^m \mu_{ij}^h] - \varphi_{ii} t_{jj}^{(m)h} + \\ & + \sum_{s=1}^{m-1} c_s^m \beta^s \varphi_{ii} t_{jj}^{(m-s)h} \}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ij}^h &= \frac{1}{3} R_{ij\mu}^h y^\mu, \quad \varphi_i = \frac{1}{3} \psi_{ii} y^i, \\ \beta &= \frac{1}{3} \psi_{ij} y^i y^j, \quad \beta^p = \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \dots \cdot \beta}_p \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь ряды (15) сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$\left| \frac{1}{3} \psi_{i_1 i_2} y^{i_1} y^{i_2} \right| < 1 - \delta_1, \quad \left| \frac{1}{3} R_{i_1 i_2 \beta}^{\alpha} y^{i_1} y^{i_2} \right| < 1 - \delta_2 \quad (\delta_i > 0).$$

Очевидно, что требование, чтобы отображение $\bar{\gamma}$ пространства \bar{V}_n^2 на \bar{V}_n^2 было геодезическим, приводит к условию $\psi_{ij} = 0$ вследствие чего $P_{ij}^h = 0$, т. е. отображение будет аффинным.

Предположим, что исходные пространства V_n и \bar{V}_n являются пространствами ненулевой постоянной кривизны K и \bar{K} соответственно. Известно, что данные пространства допускают нетривиальное геодезическое отображение друг на друга ([1], [4]).

В этом случае тензор деформации (15) принимает вид:

$$\bar{P}_{ij}^h = \tilde{\lambda}_i \delta_j^h + \tilde{\lambda}_j \delta_i^h + \tilde{\mu}_{ij} y^h \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \frac{-\left\{ \frac{2k}{3} g_{ii} \left[1 + \frac{1}{3} (K g_{m_1 m_2} + \psi_{m_1 m_2}) y^{m_1} y^{m_2} \right] - \right.}{\left[1 + \frac{1}{3} (K g_{i_1 i_2} + \psi_{i_1 i_2}) y^{i_1} y^{i_2} \right] \left(1 + \frac{K}{3} g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \right)} - \\ &\quad \left. \frac{\psi_{ii} \left(1 + \frac{K}{3} g_{m_1 m_2} y^{m_1} y^{m_2} \right) \right\} y^i}{\left[1 + \frac{1}{3} (K g_{i_1 i_2} + \psi_{i_1 i_2}) y^{i_1} y^{i_2} \right] \left(1 + \frac{K}{3} g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \right)} \\ \tilde{\mu}_{ij} &= \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{3} (K g_{m_1 m_2} + \psi_{m_1 m_2}) y^{m_1} y^{m_2} \right] \left(1 + \frac{K}{3} g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \right)} \\ &\quad \left\{ \left(\frac{2K}{3} \right)^2 (g_{ij} g_{i_1 i_2} - g_{i i_1} g_{j i_2}) \left[1 + \frac{1}{3} (K g_{m_1 m_2} + \psi_{m_1 m_2}) y^{m_1} y^{m_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{K}{3} (g_{ij} \psi_{i_1 i_2} + g_{i_1 i_2} \psi_{ij} - g_{i i_1} \psi_{j i_2} - g_{j i_1} \psi_{i i_2}) + \psi_{ij} \psi_{i_1 i_2} - \psi_{i i_1} \psi_{j i_2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \frac{K}{3} g_{m_1 m_2} \right) y^{m_1} y^{m_2} \right\} y^{i_1} y^{i_2}. \end{aligned}$$

Вычисление ковариантной производной для y^h в пространстве \bar{V}_n^2 дает

$$y_{sk}^h = \rho \delta_k^h + \sigma_k y^h,$$

где

$$\varrho = 1 + \frac{\frac{K}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}}{1 + \frac{K}{3} g_{m_1 m_2} y^{m_1} y^{m_2}}, \quad (18)$$

$$\sigma_k = - \frac{K g_{k2} y^2}{3 \left(1 + \frac{K}{3} g_{m_1 m_2} y^{m_1} y^{m_2} \right)}.$$

Но условиями (17), (18) характеризуются почти геодезические отображения третьего типа P_3 . Таким образом, справедлива Теорема. 3 Нетривиальное геодезическое отображение γ риманова пространства постоянной кривизны V_n на пространство \bar{V}_n индуцирует почти геодезическое отображение третьего типа P_3 ассоциированного пространства второго порядка \bar{V}_n^2 на пространство \bar{V}_n^2 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Синюков Н. С.: Геодезические отображения римановых пространств. М., Наука, 1979, 225с.
- [2] Яблонская Н. В.: Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Одесский университет, Одесса, 1979, 17 с., рукопись деп. в ВИНИТИ 19 июня 1979 г., № 2190 — ДЕП.
- [3] Покась С. М.: Изометрические и конформные преобразования в ассоциированных римановых пространствах второго порядка. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Одесса, 1984.
- [4] Эйзенхарт Л. П.: Риманова геометрия. М., ИЛ, 1948.
- [5] Петров А. З.: Новые методы в общей теории относительности. М., Наука, 1966.

AFFINÖSSZEFÜGGŐ ÉS RIEMANN-TEREK SPECIÁLIS, MAJDNEM GEODETIKUS LEKÉPEZÉSEIRŐL

SZ. M. POKASZ, N. V. JABLONSKAJA

Jelen dolgozatban a szerzők a torzióval rendelkező általános affinösszefüggő terek, valamint a másodrendben asszociált Riemann-terek kölcsönösségi feltételnek eleget tevő, majdnem geodetikus leképezéseit vizsgálják.

ÜBER SPEZIELLE FASTGEODÄTISCHE ABBILDUNGEN VON AFFINZUSAMMENHÄNGENDEN UND RIEMANNSCHEN RÄUMEN

S. M. POKAS, N. V. JABLONSKAJA

In der vorliegenden Arbeit werden fastgeodätische Abbildungen von allgemeinen affinzusammenhängenden Räumen mit Torsion und in zweiter Ordnung assoziierten Riemannschen Räumen, die die Bedingungen der Gegenseitigkeit erfüllen.

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT DISZKRIMINÁTOR ÉS A DUÁLIS DISZKRIMINÁTOR-FÜGGVÉNY FÜGGVÉNYTELJESSÉGÉRŐL

VÁRMONOSTORY ENDRE

Az f függvényt *funkcionálisan teljesnek* vagy *függvényteljesnek* nevezzük a $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ($n \geq 2$) halmazon, ha a H -n értelmezett összes függvény előáll összetett függvényként az f függvényből, az egyváltozós konstans függvényekből és a projekciókból.

Ebben a dolgozatban folytatjuk annak vizsgálatát, hogy bizonyos q -mintafüggvények függvényteljesek-e a H -n. Az előző dolgozatokban ([4], [5], [6]) megállapítottuk, hogyha q ekvivalenciareláció, illetve részalmaz reláció, akkor a q -mintafüggvények nem függvényteljesek, ha pedig q permutáció, illetve rendezés, akkor a q -mintafüggvények között találtunk függvényteljeseket, illetve nem függvényteljeseket.

Akkor mondjuk, hogy a H halmazon értelmezett k -változós f függvény *tiszteli* a H -n értelmezett kétváltozós q relációt, ha valahányszor $a_1 q b_1, \dots, a_k q b_k$ mindannyiszor $f(a_1, \dots, a_k) q f(b_1, \dots, b_k)$. Ez a fogalom többváltozós relációkra hasonlóan definiálható.

Egy H véges halmazon értelmezett f függvény függvényteljességének eldöntésére Rosenberg tételének [3] az alábbi következményét mint segédtelet fogjuk használni:

Segédétel. Az f függvény akkor és csak akkor függvényteljes, ha nem tiszteli:

- a H -n értelmezett korlátos (azaz legkisebb és legnagyobb elemmel bíró) *parciális rendezéseket*,
- az $\{(a_0, a_1, a_2, a_3) \in H^4 \mid a_0 + a_1 = a_2 + a_3\}$ alakú *négyváltozós relációkat*, ahol $\langle H, + \rangle$ egy *kommunikatív elemi p csoport* (p prím),
- a *nem triviális ekvivalenciarelációkat* $H-n$,
- a *legalább kétváltozós centrális relációkat* $H-n$,
- a $H-n$ értelmezett, *h -reguláris T ekvivalencia-család által meghatározott λ_T relációkat*.

Definíció. A H halmazon értelmezzük az alábbi k -változós ($k \geq 3$) függvényeket, ahol q tetszőleges permutáció H -n:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_1 q x_2 \dots q x_{k-1}, \\ x_1 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(2) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 q x_2 \dots q x_{k-1}, \\ x_k & \text{különben.} \end{cases}$$

1. Tétel. Ha q a H halmaz egy tetszőleges permutációja, ekkor az (1), (2) alatt definiált f, g q -mintafüggvények függvényteljesek H -n.

Megjegyzés. A tétel Werner [7] és Fried—Pixley [2] függvényteljességi eredmények általánosítása. Ha ϱ identikus permutáció és $k=3$, akkor az f függvény az ún. ternáris diszkriminátor, a g függvény az ún. duális diszkriminátor.

Bizonyítás. A segédétel alapján azt kell belátnunk, hogy az f , illetve a g függvény nem tiszteli az a)—e) relációkat.

a) Legyen $s(\in H)$ és $s \neq n-1$, $\varrho(s) \neq n-1$. Ekkor

$$\begin{array}{r} s \cong s \\ \varrho(s) \cong n-1 \\ \varrho^2(s) \cong n-1 \\ \vdots \\ \varrho^{k-2}(s) \cong n-1 \\ n-1 \cong n-1 \\ \hline n-1 \not\cong s. \end{array}$$

Tehát f nem tiszteli a H -n értelmezett korlátos parciális rendezéseket. Hasonlóan igaz a g függvényre is. Ha ugyanis az $s \neq n-1$ helyett $s \neq 0$ -t, a táblázat utolsó két sorába $n-1 \cong n-1$ helyett $0 \cong 0$ -t, $n-1 \not\cong s$ helyett $s \not\cong 0$ -t írunk, akkor kapjuk a g -re vonatkozó állítást.

b) A következőkből látható, hogy az f nem tiszteli a b)-beli relációkat:

$$\begin{array}{r} \langle 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \rangle \\ \langle \varrho(1), \quad \varrho(1), \quad a, \quad b \rangle \\ \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(1), \quad \varrho^{k-2}(1), \quad \varrho^{k-2}(1), \quad \varrho^{k-2}(1) \rangle \\ \langle 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1 \rangle \\ \hline \langle 0, \quad 1, \quad 1, \quad 1 \rangle. \end{array}$$

Hasonlóan bizonyítható ez a g függvényre is. Ha ugyanis a táblázat utolsó előtti sorába $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$, utolsó sorába $\langle 1, 1, 1, 0 \rangle$ kerül, akkor kapjuk a g -re vonatkozó állítást.

c) Legyen σ tetszőleges nem triviális ekvivalenciareláció. Van olyan $a, b, c (\in H)$, hogy $a \neq b$, $a\sigma b$ és $b\bar{\sigma}c$. Ekkor az alábbi sémából következik az állítás:

$$\begin{array}{r} a \quad \sigma \quad b \\ \varrho(a) \quad \sigma \quad \varrho(a) \\ \vdots \\ \varrho^{k-2}(a) \quad \sigma \quad \varrho^{k-2}(a) \\ \underline{c \quad \sigma \quad c} \\ c \quad \bar{\sigma} \quad b. \end{array}$$

Hasonlóan igaz a g függvényre is, ami az alábbi táblázatból látszik:

$$\begin{array}{r} a \quad \sigma \quad b \\ \varrho(a) \quad \sigma \quad \varrho(a) \\ \vdots \\ \varrho^{k-2}(a) \quad \sigma \quad \varrho^{k-2}(a) \\ \underline{c \quad \sigma \quad c} \\ a \quad \bar{\sigma} \quad c. \end{array}$$

d) Ha ϱ centrális reláció, akkor van olyan $\langle b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \rangle \notin \sigma$.
Legyen a_0 a centrumban, ekkor a

$$\begin{array}{l} \langle a_0, \quad b_1, \dots, \quad b_{k-1} \rangle \in \sigma \\ \langle \varrho(a_0), \quad \varrho(a_0), \dots, \quad \varrho(a_0) \rangle \in \sigma \\ \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(a_0), \quad \varrho^{k-2}(a_0), \dots, \quad \varrho^{k-2}(a_0) \rangle \in \sigma \\ \langle b_0, \quad b_0, \dots, \quad b_0 \rangle \in \sigma \\ \hline \langle b_0, \quad b_1, \dots, \quad b_{k-1} \rangle \notin \sigma \end{array}$$

táblázatból látszik az állítás.

A g függvényre ugyanez az állítás így látható be:

$$\begin{array}{l} \langle b_0, \quad a_0, \quad b_2, \dots, \quad b_{k-1} \rangle \in \sigma \\ \langle \varrho(b_0), \quad \varrho(b_0), \quad \varrho(b_0), \dots, \quad \varrho(b_0) \rangle \in \sigma \\ \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(b_0), \quad \varrho^{k-2}(b_0), \quad \varrho^{k-2}(b_0), \dots, \quad \varrho^{k-2}(b_0) \rangle \in \sigma \\ \langle a_0, \quad b_1, \quad b_2, \dots, \quad b_{k-1} \rangle \in \sigma \\ \hline \langle b_0, \quad b_1, \quad b_2, \dots, \quad b_{k-1} \rangle \notin \sigma \end{array}$$

e) Legyen λ_T a H halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk: egy h -reguláris T családjához tartozó reláció. Könnyen látható, hogy létezik olyan $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, \dots, a_{h-1} \rangle \in H^h$, amely nincs λ_T -ben. Mivel λ_T minden olyan elem h -ast tartalmaz, amelynél vannak megegyező komponensei, az a_0, \dots, a_{h-1} elemek páronként különbözők, s az alábbi táblázat mutatja, hogy f nem tiszteli λ_T -t.

$$\begin{array}{l} \langle a_0, \quad a_0, \quad a_2, \dots, \quad a_{h-1} \rangle \in \lambda_T \\ \langle \varrho(a_1), \quad \varrho(a_0), \quad \varrho(a_0), \dots, \quad \varrho(a_0) \rangle \in \lambda_T \\ \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(a_1), \quad \varrho^{k-2}(a_0), \quad \varrho^{k-2}(a_0), \dots, \quad \varrho^{k-2}(a_0) \rangle \in \lambda_T \\ \langle a_1, \quad a_1, \quad a_1, \dots, \quad a_1 \rangle \in \lambda_T \\ \hline \langle a_0, \quad a_1, \quad a_2, \dots, \quad a_{h-1} \rangle \notin \lambda_T \end{array}$$

Az f függvényhez hasonlóan g sem tiszteli λ_T -t.

$$\begin{array}{l} \langle a_0, \quad a_0, \dots, \quad a_0 \rangle \in \lambda_T \\ \langle \varrho(a_0), \quad \varrho(a_1), \dots, \quad \varrho(a_1) \rangle \in \lambda_T \\ \vdots \\ \langle \varrho^{k-2}(a_0), \quad \varrho^{k-2}(a_1), \dots, \quad \varrho^{k-2}(a_1) \rangle \in \lambda_T \\ \langle a_1, \quad a_1, \dots, \quad a_{h-1} \rangle \in \lambda_T \\ \hline \langle a_0, \quad a_1, \dots, \quad a_{h-1} \rangle \notin \lambda_T \end{array}$$

Definíció. Legyen $K = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ $a \cong$ reláció szerint parciálisan rendezett halmaz, ahol minden i -re $e_0 \cong e_i \cong e_{n-1}$ ($n \geq 2$). Értelmezzük a K halmazon az alábbi k változós ($k \geq 3$) függvényeket:

$$(3) \quad h(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \cong x_2 \cong \dots \cong x_{k-1}, \\ x_k & \text{különben,} \end{cases}$$

$$(4) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_1 \cong x_2 \cong \dots \cong x_{k-1}, \\ x_1 & \text{különben.} \end{cases}$$

2. Tétel. Ha $a \cong$ az előbb definiált parciális rendezése a K -nak, akkor a h és a p függvények függvényteljesek K -n.

Megjegyzés. A 2. tétel a ternáris és a duális diszkriminátorra ([7], [2]) vonatkozó függvényteljeségi eredményeket tetszőleges ($k \geq 3$) változós függvényre és a K halmaz tetszőleges parciális rendezésére viszi át.

Bizonyítás. Ha $k > 3$, akkor a $h(x_1, x_2, \dots, x_k)$ és a $p(x_1, x_2, \dots, x_k)$ függvényekből a változók azonosításával kapjuk az

$$s(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1, & \text{ha } x_1 \cong x_2, \\ x_3 & \text{különben,} \end{cases}$$

és a

$$z(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_3, & \text{ha } x_1 \cong x_2 \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt. A tétel bizonyításához az s és z függvény függvényteljeségét kell belátunk. A z függvény függvényteljeségét az előző dolgozatban [6] bebizonyítottuk. Az s függvény függvényteljeségének bizonyításához a segédtételt használjuk fel.

a) $e_0 < a < e_{n-1}$, ekkor:

$$\begin{aligned} a &\cong a \\ e_0 &\cong e_{n-1} \\ \frac{e_{n-1} &\cong e_{n-1}}{e_{n-1} \not\cong a.} \end{aligned}$$

b) Ez az alábbiakból leolvasható:

$$\begin{aligned} &\langle e_1, e_1, e_1, e_1 \rangle \\ &\langle e_0, e_{n-1}, e_{n-1}, e_0 \rangle \\ &\frac{\langle e_1, e_0, e_1, e_0 \rangle}{\langle e_1, e_1, e_1, e_0 \rangle}. \end{aligned}$$

c) Legyen $a, b, c \in K$, $a < b$, $a \sigma b$ és $a \bar{\sigma} c$. Ekkor

$$\begin{aligned} &b \sigma b \\ &b \sigma a \\ &\frac{c \sigma c}{b \bar{\sigma} c}. \end{aligned}$$

Ha a és b nem összehasonlíthatók, akkor az állítás hasonlóan bizonyítható.

d) Az s függvény nem tiszteli a legalább kétváltozós centrális relációkat.

1) Legyen σ legalább kétváltozós centrális reláció K -n, $\langle b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \rangle \notin \sigma$, c_0 centrum elem és $c_0 < b_0$ vagy nem összehasonlíthatók. Ekkor

$$\begin{aligned} &\langle b_0, b_0, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \in \sigma \\ &\langle c_0, b_0, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \in \sigma \\ &\frac{\langle b_1, b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \in \sigma}{\langle b_1, b_0, b_2, \dots, b_{k-1} \rangle \notin \sigma}. \end{aligned}$$

Ha $c_0 > b_0$ hasonlóan bizonyítható.

e) Legyen λ_T a K halmazon értelmezett ekvivalenciarelációk: egy h -reguláris T családjához tartozó reláció. Legyen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in (K)$, ahol $a_i < a_j$ vagy nem összehasonlíthatók, $0 \leq i < j \leq h-1$ esetén $\langle a_0, a_1, \dots, a_{h-1} \rangle \notin \lambda_T$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle a_0, a_1, a_1, \dots, a_1 \rangle &\in \lambda_T \\ \langle a_0, a_0, a_0, \dots, a_0 \rangle &\in \lambda_T \\ \langle a_1, a_1, a_2, \dots, a_{h-1} \rangle &\in \lambda_T \\ \langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{h-1} \rangle &\notin \lambda_T. \end{aligned}$$

Közelprojekció kiterjesztése lineáris rendezésre

3. Tétel. Legyen $H = \{0, 1, \dots, n-1\}$ lineárisan rendezett halmaz a 0 és $n-1$ legkisebb, illetve legnagyobb elemekkel. A

$$(5) \quad t_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{cases} x_k, & \text{ha } x_i \leq x_j, \quad (1 \leq i < j \leq k) \text{ valamely } (i, j) \text{ párra,} \\ x_1 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény nem függvénytjel a H halmazon.

Megjegyzés. A t_k függvény a közelprojekció kiterjesztése lineáris rendezésre. A k -változós közelprojekció függvénytjel, ha $k \geq 3$ [1].

Bizonyítás. Definiáljuk a σ kétváltozós centrális relációt: $\sigma = H^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ és $\{3, \dots, n-1\}$ centrum. Közvetlenül belátható, hogy t_k tiszteli a σ relációt. A projekciók, a konstans függvények is tisztelik σ -t. Így ezekből csak a σ -t tisztelő függvények állnak elő összetett függvényként.

IRODALOM

- [1] B. CSÁKÁNY: Homogeneous algebras are functionally complete, Algebra Universalis, 11/1980. 149—158.;
- [2] E. FRIED, A. F. PIXLEY: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math. 41/1979., 83—100.;
- [3] I. G. ROSENBERG: Completeness properties of multiple-valued logic algebra, in Computer Science and Multiple Logic, Theory and Applications, North Holland, 1977.;
- [4] E. VÁRMONOSTORY: Relational pattern functions, „Finite Algebra and Many-valued Logic”, Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 28., 1981.;
- [5] VÁRMONOSTORY ENDRE: A q -mintafüggvények funkcionális teljessége, A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, Szeged, 1980.;
- [6] VÁRMONOSTORY ENDRE: A q -mintafüggvények funkcionális teljessége, ha q rendezés, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, Szeged, 1985.;
- [7] H. WERNER: Diskriminator-Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGKEIT DES VERALLGEMEINERTEN DISKRIMINATORS BZW. DES DUALEN DISKRIMINATORS

E. VÁRMONOSTORY

Es wird bewiesen, dass gewisse q — Musterfunktionen funktional vollständig sind, wenn q eine Permutation oder eine teilweise Ordnung bedeutet. Es handelt sich ferner um eine Verallgemeinerung eines bekannten Ergebnisses von Werner und Pixley.

**О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ ОБОБЩЕННОЙ
ДИСКРИМИНАТОРНОЙ И ДУАЛЬНО-ДИСКРИМИНАТОРНОЙ
ФУНКЦИИ**

ВАРМОНОШТОРИ, ЭНДРЕ

Доказывается функциональная полнота некоторых q — трафаретных функций если подстановка или частичное упорядочение. Обобщаются известные результаты Вернера и Фрида — Пиксли.

TARTALOM

KISS LAJOS—PINTÉR FERENC: A holográfia számítógépi szimulációjának szeizmikus alkalmazása	3
NAGY PÁL—HERZFELD ROZÁLIA: Schiff-bázisok hidrolízise etanol—víz és metanol—víz oldószerelegyen	11
HERZFELD ROZÁLIA—NAGY PÁL—MAHLER HAJNALKA: Néhány oldószerelegye aciditási és bázicitási paraméterének (E_T^N , B_{KT}) változása az elegy összetételéről	19
KURBATOVA—I. N.—JABLONSKAJA, N. V.: Az F -planáris görbék variációs elméletének kérdéséhez	29
KURBATOVA, I. N.—JABLONSKAJA, N. V.: Maximálisan mozogható terek a $\Pi_2^2(\xi, \mu)$ transzformációkra vonatkozóan	35
MISKOLCZI JÓZSEF: Néhány megjegyzés az euklideszi, az affin és a projektív tér nevezetes leképezéseit biztosító alaptételekhez	39
POKASZ, SZ. M.—JABLONSKAJA, N. V.: Affinösszefüggő és Riemann-terek speciális, majdnem geodetikus leképezéseiről	45
VÁRMONOSTORY ENDRE: Az általánosított diszkriminátor és a duális diszkriminátor függvény függvényteljességéről	51

INHALT

KISS, LAJOS—PINTÉR, FERENC: Die Rechenmaschinensimulation der Holographie zu seismischer Anwendung	3
NAGY, PÁL—HERZFELD, ROZÁLIA: Die Hydrolyse der Schiffbasen in Ethanol-Wasser und Methanol-Wasserslöschgemisch	11
HERZFELD, ROZÁLIA—NAGY, PÁL—MAHLER, HAJNALKA: Veränderung des Aziditäts — und Basizitätsparameters (E_T^N , B_{KT}) nach der Zusammensetzung des Löschgemisches	19
KURBATOWA, I. N.—JABLONSKAJA, N. V.: Zu der Variationstheorie der F -planaren Kurven	29
KURBATOWA, I. N.—JABLONSKAJA, N. V.: Über maximal bewegliche Räume bezüglich der Transformationen $\Pi_2^2(\xi, \mu)$	35
MISKOLCZI, JÓZSEF: Bemerkungen zu den Fundamentalsätzen, die merkwürdigen Abbildungen der euklidischen, affinen und projektiven Räume liefern	39
POKASZ, SZ. M.—JABLONSKAJA, N. V.: Über spezielle fastgeodätische Abbildungen von affin zusammenhängenden und Riemannschen Räumen	45
VÁRMONOSTORY, ENDRE: Über die Vollständigkeit des verallgemeinerten Diskriminators bzw. des dualen Diskriminators	51

СОДЕРЖАНИЕ

Киш Лайош—Пинтер Ференц: Применение моделирования голографии на ЭВМ в сейсмике	3
Надь Пал—Херцфельд Розалия: Гидролиз Шифф-базисов в растворительной смеси этанол—воды и метанол—воды	11
	57

Херцфельд Розалия—Надь Пал—Малер Хайналка: Изменение параметров кислотности и щёлочности некоторых растворительных смесей (E_T^N, V_{KT}) в зависимости от состава смеси	19
Курбатова И. Н.—Яблонская Н. В.: К вопросу о вариационной теории — планарных кривых	29
Курбатова И. Н.—Яблонская Н. В.: Максимально подвижные пространства относительно преобразований $PI_2^2(\xi, \mu)$	35
Мишкольци Йожеф: Замечания к основной теореме Евклидова аффинного и проективного пространств, опорной для их знаменитых отображений	39
Покась С. М.—Яблонская Н. В.: О специальных почти геодезических отображениях аффинно-связных и римановых пространств	45
Вармоноштори Эндре: О функциональной полноте обобщенной дискриминаторной и дуально-дискриминаторной функции	51

Felelős kiadó: Dr. Békési Imre
88-1984 Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Surányi Tibor
Készült monoszedéssel, íves magasnyomással, 5,25 A/5 terjedelemben,
az NSZ 5601—59 és 5602—55 szabvány szerint.
Példányszám: 225