SZTA Információközlési Problémák Intézete, Moszkva és Távközlési Kutató Intézet, Budapest

Egy algoritmus az elektrokardiológia inverz problémájához

V. V. Shakin

1. Bevezetés

Az elektrokardiológiában széles körben használatosak különféle matematikai modellek. Ezen modellek többnyire intuitiv ismereteken alapuló, szigoru kvantitativ formába öntött kifejezések. Amennyiben ismeretes a sziv bioelektromos müködését leiró matematikai apparátus, lehetőség nyilik uj számitási eljárások kifejlesztésére EKG feldolgozás és interpretálás céljából. Ezek a módszerek várhatóan hasznosabbak, szemben azokkal az egyszerü statisztikaiakkal, amelyek figyelmen kivül hagyják a sziv biofizikáját.

2. Egyenes és inverz problémák

Azon matematikai modellnek, amelyet elektrokardiografikus alkalmazás céljából az elektrokardiológia felhasznál az a feladata, hogy összefüggést keressen a sziv elektromos jelenségei, a test elektromos vezető tulajdonsága és az EKG között. Ez utóbbi közvetlen kapcsolatban van a testfelület potenciáljaival.

Általánosan az ilyen modell leirható operátorok kapcsolatával:

$$zg = u, \qquad /1/$$

ahol u a test egy részterülete potenciáljainak matematikai leirása, azaz az EKG, g egy elektromos szivgenerátor, azaz a szivbeli elektromos forrás egy része, z a Schmitt-féle transzfer impadencia operátor, ami azonos a McFee-féle vezetőmező operátorával.

A fenti egyenlettel /1/ kapcsolatos különböző elektrokardiológiai problémákat az alábbi táblázat foglalja össze.

	Egyenes feladat	Inverz feladat	
		Járulékos I.f.	Fő I.f.
Ismert adat	z, g	u, g	z, u
Keresett adat	u	z	g
A feladat lényege	EKG szimulálás	Transzformátor imped. mérés	EKG interpretálás
A feladat megoldása	$u = z\,g$	$z = u.\frac{1}{g} = ug^{-1}$	$g = \frac{1}{z}\,u = z^{-1}u$

E dolgozat a Fő Inverz feladat (Fő I.f.) címmel jelzett problémával foglalkozik. A cél: az /1/ összefüggés alapján EKG-ból rekonstruálni a sziv elektromos generátorait, feltéve, hogy a transzfer impedancia adott. Ezáltal mind az egyenes, mind a járulékos inverz feladatot megoldhatónak tekinthetjük.

Szükséges hangsulyozni, hogy sok tekintetben a fő inverz feladat tekinthető a legnehezebbnek. Elég, ha csak arra utalunk, hogy akár az EKG, akár a transzfer impedancia csak bizonyos hibával mérhető. Épp ezért csak a kellően stabilis inverz megoldás fogadható el. Ehhez minden elérhető a priori adatra szükségünk van. A sziv bioelektromos jelenségeinek természete következtében ilyen adatok a lehetséges megoldásokat nagyban korlátozzák.

3. Alapvető integrálösszefüggés

Fejezzük ki pontosabban az /1/ operátoros összefüggésben használatos u, g, z matematikai objektumokat. Használjuk a következő jelöléseket:

H a sziv ingerelhető térfogattartománya és p egy H-beli pont, azaz $p \in H$,

Γ a H tartomány határa,

L a test külső felülete, és q azon egy pont, $q \in L$,
t egy időpillanat,
u a testfelület potenciál-eloszlása, amely a térbeli q és az időbeli t változó függvénye, $u = u(q,t)$,

$\bar{\bar{Z}}$ a Schmitt-féle vektoriális transzfer impedancia, amely két térbeli változó, q és p, vektor-függvénye $\bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Z}}(q,p)$,
$\bar{g} = \bar{g}(p,t)$ a szivbeli dipólus források sürüsége.

Ezen függvények alkotják az alábbi összefüggést, ezt nevezzük alapvető integrálösszefüggésnek:

$$\iiint_H \bar{\bar{Z}}\,(q,p)\cdot\bar{g}\,(p,t)\,dp = u\,(q,t)\,. \qquad /2/$$

Az egyenlet baloldala a H térfogat felett értelmezett háromdimenziós integrál.

Felvetődik a kérdés, vajon lehetséges-e bizonyos feltételek teljesitése esetén egyszerüsiteni e háromdimenziós modellt olyan kétdimenziós folytonos modellre, amelynek alapja két egyforma sikréteg.

4. Egyszerüsitések

A sziv elektromos állapotának leirása nyilvánvalóan a membrán akciós potenciáljának felhasználásával történhet. Legyen φ a t időpillanatbeli $p \in H$ ponthoz tartozó transzmembrán potenciál. Igy φ a térbeli p és az időbeli t változók függvénye. A φ transzmembrán potenciál meghatározott kapcsolatban áll a sziv elektromos dipólus forrásaival. Pontosabban, hivatkozva Plonsey-re (1), a források arányosak a transzmembrán akciós potenciál negativ gradiensével:

$$\bar{g} = -\chi\,\nabla\varphi \qquad /3/$$

ahol χ egy pozitiv állandó, $\nabla = \bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ a nabla-operátor, azaz gradiens operátor.

Feltételezzük a miokardium elektromos vezetőképességének homogenitását. Ez azt jelenti, hogy a H tartományban a transzfer impedancia divergenciája zérus:

$$\nabla \cdot \bar{\bar{Z}} = 0 \,. \qquad /4/$$

Kimutatható, hogy a /3/ és /4/ feltételek teljesülése esetén a háromdimenziós térbeli szivgenerátor helyettesithető egy vele ekvivalens, sokkal egyszerübb kétdimenziós generátorral. Ez egy kétrétegü alakzat, amely a sziv ingerelhető tartományának felületére terjed ki.

A következő integrál kifejezés ezt a tényt tükrözi:

$$\iint\limits_{\Gamma} K\,(q,p)\ \ \varphi\,(p,t)\ dp = u(q,t), \qquad /5/$$

ahol $K(q,p)$ a kétdimenziós modell skaláris átviteli függvénye.

$$K(q,p) = -\ \chi\ \bar{\bar{Z}}(q,p).\bar{n}\,(p)\ ,$$

ahol $\bar{n}\,(p)$ a Γ felület külső normálisa.

Az /5/ egyszerüsitett kifejezésben a Γ felületen csak kétdimenziós integrálást kell végrehajtani, s nem háromdimenziósat, mint a /2/ alapegyenletben.

Ilyen kétrétegü modell-koncepciót sikeresen alkalmazott az egyenes probléma megoldására Baum és Dubrovin (3) Lacombe, Ducimetiere és d'Alche (2).

5. Inverz feladat megoldása folytonos kétrétegü esetre

Az alcimben emlitett megoldás az elsőfaju Fredholm integrál egyenletből nyerhető, amelynek alakja teljesen azonos az /5/ összefüggéssel. Az /5/ integrálegyenlet egyetlen és stabilis megoldása érdekében felhasználhatók a már korábban publikált számitási eljárások (4,5). Ezen módszerek egyszerü radar modellek inverz megoldására készült számitógépes programok.

E módszerek alapján az /5/ egyenlet $K(q,p)$ magja az alábbi módon sorba fejthető:

$$K\,(q,p) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(p)\lambda_i\ \beta_i(q),\ p \in \Gamma,\ q \in L$$

ahol $\alpha_i = \alpha_i(p)$ és $\beta_i = \beta_i(q)$ függvény, továbbá λ_i értéke a következő feltételeknek tartozik eleget tenni:

$$\iint_{\Gamma} \alpha_i\ \alpha_j\, dp = \iint_{L} \beta_i\ \beta_j\, dq = \begin{cases} 1\ , & i = j \\ 0\ , & i \neq j \end{cases}$$

és

$$\infty > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$$

Az inverz folytonos, most már rendezett megoldás a következő:

$$\varphi_m = \varphi_m(p,t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i(p)}{\lambda_i} \iint_{L} u(q,t)\ \beta_i(q)\, dq,$$

az m véges egészszám aszerint választandó, hogy a megoldás bizonyos kivánalmaknak megfelelően, kellően stabilis legyen. φ_m a sziv ingerelhető felületének φ transzmembrán potenciálját legkisebb négyzetek elve alapján közelitőfüggvénye. Nyilvánvaló a kérdés: a szivtérfogat elektromos forrásai rekonstruálhatók-e a kapott eredményből?

A válasz igenlő, ha figyelembe vesszük az ingerhullámok terjedésének természetét.

6. Ingerhullámok terjedési természete

Feltételezzük, hogy az ingerhullámok terjedése a sziv H ingerelhető tartományában eleget tesz a háromdimenziós hullámegyenletnek:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \varphi , \qquad /6/$$

ahol v hullámsebesség nem azonos az egész H tartományban. Feltételezzük továbbá, hogy a transzmembrán akciós potenciál egész H-ban azonos :

$$\varphi = \varphi(p,t) = f\ (t - \tau(p)\ ), \qquad /7/$$

ahol $f = f(t)$ a transzmembrán akciós potenciál jólismert, tipikus hullámformája, $\tau = \tau(p)$ az ingerlési hullám időkésleltetése. Ez azt jelenti, hogy a p pontba a hullám a $\tau(p)$ időpillanatban érkezik. A feltételek leginkább a QRS-komplexusra érvényesek. Hasznos az /5/ egyenlet megoldása esetén e feltételeket, mint korlátokat figyelembe venni. Másrészt kimutatható, hogy az ujabb /6/ és /7/ feltételek esetén az ingerhullám H tartománybeli $\tau(p)$ késleltetése alapján két egyenlet állitható fel. Az első:

$$(\ \nabla \tau\ )^2 = \frac{1}{v^2}$$

eikonális egyenlet, a második pedig a Laplace egyenlet:

$$\nabla^2 \tau = 0 . \qquad /8/$$

/8/ szerint τ függvény a H-ban harmonikus függvény. Igy az ingerhullám késleltetése az egész tartományban rekonstruálható, feltéve, hogy a késleltetés ismert a miokardium felületén. Ez magába foglalja a /8/ egyenletre vonatkozó Dirichlet határ-problémát.

Ezek alapján, ha az ingerelhető sziv-felületen ingervezetők helyezkednek el, a sziv ingerelhető tartományában megbecsülhetők az elektromos források. A belső, arrythmiát okozó ingervezetők feltárása érdekében sokkal finomabb módszerek alkalmazása szükséges.

7. Következtetések

1.) A /3/, /4/, /6/ és /7/ feltételek alapján a testfelület potenciáljai segitségével becsülhető az elektromos dipólus források szivbeli eloszlása. Az emlitett számitási eljárások biztositják a folytonos inverz feladat megoldását, és a mérési hibáknak megfelelően ez az egyetlen és stabilis megoldás.

2.) Az emlitett feltételezések elégséges feltételek abban az értelemben, hogy a folytonos térbeli inverz feladat egyetlen és stabilis megoldását biztositják. E feltételek alkalmasak arra, hogy reálisabb szükséges feltételekkel helyettesithetők legyenek.

3.) A feladat leirt megközelitése lehetővé teszi annak megoldását digitális számitógépen, azaz a tárgyalt folytonos modellü inverz probléma diszkrét közelitő megoldását kaphatjuk igy meg.

Irodalom

(1) Plonsey, R.: Determination of electrical sources in the heart from intracellular action potentials, in: Proc. XIIth Int. Colloquium Vectorcardiographicum (Brussels, Aug. 4-7., 1971), Bruxelles, 1972.

(2) Lacombe, J., Ducimetiere, P., D'Alche, P.: Computer bidimensional model of the cardiac electrical activity, in: Ibid.

(3) Baum, O.V., Dubrovin, E.D.: Fiziko-matematicheskaya model geneza elektrokardiogram, in: "Biofizika", 1971, 16.

(4) Shakin, V.V.: On some approach for solving the inverse problem in electrocardiology, in: "New Trends in Electrocardiology", Proc. 2nd Int. Symposium on Electrocardiology. Yerevan, 1973.

(5) Shakin, V.V.: The inverse problems associated with continual models of the heart, in: Proc. 1st Int. Congress on Electrocardiology. Wiesbaden, 1974.