

Műszeripari Kutató Intézet

Orvosi célu kapacitiv érzékelőrendszer villamos terének
számítógépes vizsgálata

Héjjas István, Bencze József, Hegedüs Csongor,
Téglási Endre

Összefoglalás:

A MIKI-ben a szem belső nyomásának érintésmentes mérésére szolgáló készülék kifejlesztése folyik. A készülék elsősorban a glaucoma diagnosztizálására szolgál. Méréskor egy fuvókából kiáramló levegősugár rövid idejű, impulzuszerű nyomást fejt ki a szemgolyó meghatározott pontján, melynek hatására az kismértékben benyomódik és e benyomódás mértéke a belső nyomásra jellemző. Benyomódáskor a fuvóka homlokfelülete és a szemgolyó közötti kapacitás megváltozik, így ennek mérésével e benyomódás meghatározható. A mérés pontosabbá tétele érdekében egyrészt gondoskodni kell a fuvóka homlokfelületéről kilépő erővonalak megfelelő fókuszolásáról, másrészt a szórt kapacitások árnyékolásáról. Az árnyékolás optimális geometriai kialakítása érdekében olyan programcsomagot fejlesztettünk ki, mely a számításba jövő geometriai elrendezések esetén a Laplace-egyenlet numerikus megoldásával és a potenciálfüggvény gradienseinek számításával meghatározza és kirajzolja az egyes erő-

vonalak utvonalát. Az előadás ezt a programcsomagot ismerteti.

A megoldandó feladat ismertetése

A Műszeripari Kutató Intézetben a szem belső nyomásának /az un. intra oculáris nyomásnak/ érintésmentes mérésre szolgáló készülék kifejlesztése folyik. Ez a készülék elsősorban a glaucoma szűrővizsgálat jellegű diagnosztizálására szolgál. A glaucoma /zöldhályog/ jellemzője, hogy a szemgolyón belüli nyomás - a csarnokviz termelődés és elfolyás közötti egyensúly megbomlása miatt - kóros mértékben megnövekszik.

Normális esetben a szemgolyó belső túlnyomása 10-21 torr között van. Efelett, kb. 26 torr-ig a glaucoma gyanúja merül fel, s 26 torr felett már biztosan pathológiás állapotról van szó.

A szem belső túlnyomásának mérésére szolgáló hagyományos tonometerek úgy működnek, hogy általában a szaruhártya /cornea/ ritkábban az ínhártya /sclera/ meghatározott pontjára mechanikai nyomást gyakorolnak és a belapulás mértékéből számítják ki a belső nyomást. A módszer hátránya, hogy egyrészt fájdalmas /fájdalomcsillapítás szükséges/, másrészt hogy a vizsgálat többszöri ismétlése a szaruhártya hámrétegét károsíthatja. Ami azonban még ezeknél is súlyosabb jelentőség, a szaruhártyával kontaktusban lévő mérőműszer jelentős szerepet játszik a "keratoconjunctivitis epidemica" ter-

jesztésében. Ezért a nagytömegű, szűrővizsgálat jellegű szem belsőnyomás mérés a glaucoma korai diagnosztizálása céljából a szaruhártyával kontaktusba kerülő mérőműszerekkel gyakorlatilag elvégezhetetlen.

A fejlesztés alatt álló készülék a mérést a szemgolyó érintése nélkül végzi úgy, hogy a nyomóerőt egy fuvókából impulzusszerűen kiáramló levegősugár torlónyomása képezi. /1. ábra/ A levegősugár megindításakor a benyomódási folyamat tranziense kb. 10-12 msec alatt zajlik le. Ezt követően az állandósult benyomódás mértéke a fuvóka homloklfelülete és a cornea közötti kapacitás megváltozása alapján mérhető. Mivel a szív verése során a magasabb systolés és alacsonyabb diastolés vérnyomást kb. 2-3 torr amplitudóval pulsáló szemnyomás ingadozás követi, ezért a mérés indítását célszerű a pulzushoz szinkronizálni. A teljes mérés az indítástól számított kb. 20 msec alatt zajlik le. Mivel a páciens reflex-szerű reagálása /pl. a fej ösztönszerű hátrarántása/ csak kb. 50 msec múlva kezdődik, ezért az ilyen elmozdulás járulékos mérési hibát nem okoz.

A készülék egyik legnehezebb méréstechnikai kérdése a fuvóka és a cornea közötti igen kis kapacitás megváltozásának megfelelő érzékenységgű /kb. 10^{-5} pF felbontóképességű/ érzékelése. A problémát tovább nehezíti, hogy a fuvóka a szemgolyón kívül a szemhéjjakhoz és a szempillához

is kapacitív csatolást mutat. Ennek zavaró hatását az 1. ábra szerinti árnyékolással lehet csökkenteni. Az árnyékoló henger feszültség-szintjét egy elektronikus műkapcsolás a fuvókával mindenkor azonos értéken tartja. Ennek következtében a fuvóka homlokfelületéről kiinduló villamos erővonalak nagyrésze a cornea kis területére fókuszálódik, míg a szemhéjakra csatoló kapacitás erővonalai az árnyékoló hengeren záródnak. Az árnyékoló henger Δ_z benyulásának növelésével a fókuszáló hatás növekszik. Különböző gyakorlati korlátozó feltételek miatt azonban ez a benyulás nem lehet túl nagy.

A feladat annak meghatározása volt, hogy a megengedett legnagyobb árnyékolással milyen fókuszáló hatás érhető el, vagyis milyen lesz a kialakuló villamos tér erővonalainak térbeli elrendezése. A geometriai kiinduló adatok a következők:

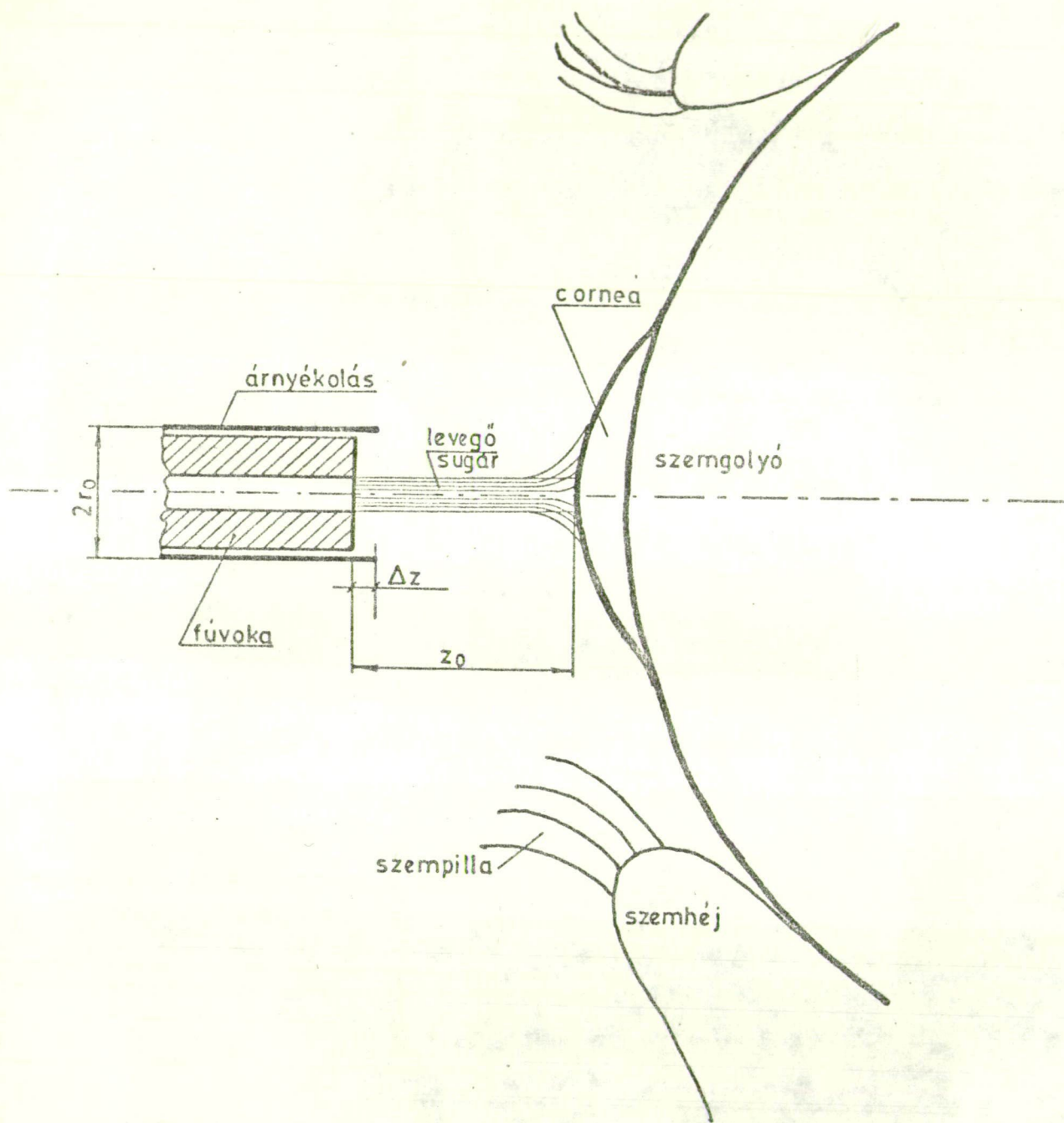
Az árnyékoló henger megengedett legnagyobb benyulása:

$$\Delta z = 0,5 \text{ mm}$$

Az árnyékoló henger átmérője:

$$D = 4 \text{ mm}$$

Az árnyékoló henger és a fuvóka külső felülete közötti szigetelő réteg vastagsága a kialakuló villamos tér



1. ábra

A mérési elrendezés vázolata

szempontjából gyakorlatilag elhanyagolható.

A fuvóka homlokfelülete és a cornea közötti távolság:

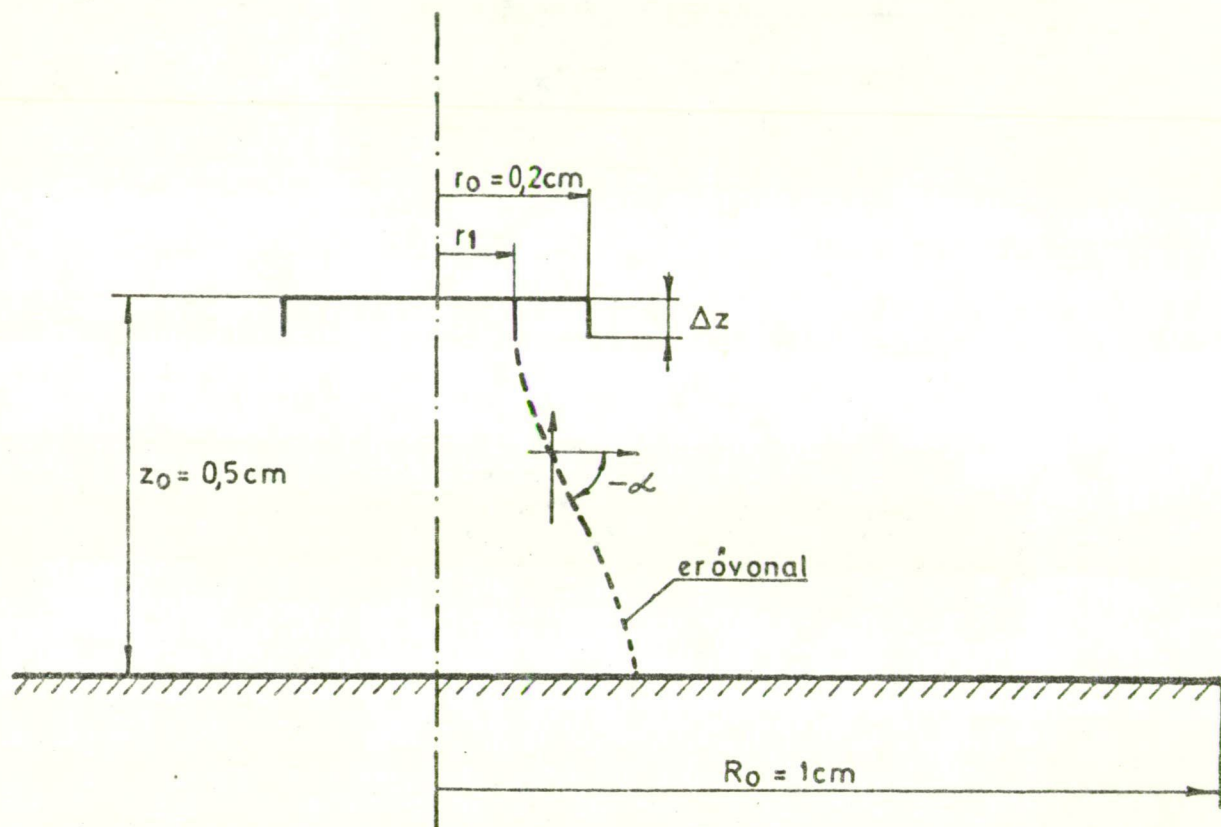
$$Z_0 = 5 \text{ mm}$$

A fuvóka furatának keresztmetszete a fuvóka homlokfelületének mintegy 4-6 %-át teszi ki.

A megoldás elméleti alapjai

A feladat számítógépes modellezésénél a 2. ábra szerinti egyszerűsített elrendezésből indultunk ki. /Itt a méretek cm-ben vannak megadva./ Az ábrán két elektróda látható. A felső a fuvóka homlokfelületét és az árnyékoló lemezt helyettesíti, míg az alsó elektróda helyettesíti a szemgolyót, a szemhéjjakat és a szempillát, vagyis azokat az objektumokat, melyeken az érzékelő rendszerből induló villamos erővonalak záródnak. A feladat olyan programok kidolgozása volt, melyek lehetővé teszik, hogy tetszés szerinti r_1 sugár megadása esetén /ahol: $0 \leq r_1 \leq r_0$ / kirajzolható legyen a felső elektróda r_1 sugaru pontjából kiinduló erővonal menete.

A továbbiakban az alsó elektródát földeltnek, a felső elektróda mindenkori feszültség szintjét pedig egységnyinek tekintjük. Ha az elektródák közötti dielektrikumban a téröltés elhanyagolható, s a villamos tér időbeli változása nem túl gyors, úgy a kialakuló villamos tér potenciálfügg-



2. ábra

A modell geometriai adatai

vényére teljesül a

$$\Delta U = \text{div grad } U = 0 \quad (1)$$

Laplace egyenlet. Hengerszimmetrikus esetben ez így is felírható:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

Ennek megoldása érdekében kíséreljük meg a potenciál-függvényt a következő alakban kifejezni:

$$\Delta U(z, r) = V(z) \cdot W(r) \quad (3)$$

Ha ezt a (2)-be behelyettesítjük, úgy megfelelő átrendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$V''/V = -W''/W - W'/W \cdot r \quad (4)$$

Ennek baloldala csak z -től, jobboldala pedig csak r -től függ. Az egyenlőség tehát az r és z különböző értékei mellett csak akkor teljesülhet, ha a (4) egyenlet mindkét oldala konstans. Legyen ez a konstans: K^2 , ahol K elvileg tetszés szerinti /valós, képzetes vagy komplex/ állandó lehet. A (4) egyenlet mindkét oldalát K^2 -tel egyenlővé téve a következő két differenciál egyenlet adódik:

$$V'' - K^2 \cdot V = 0 \quad (5)$$

$$W'' + W'/r + K^2 \cdot W = 0 \quad (6)$$

Az (5) egy lehetséges megoldása:

$$V(z) = e^{K \cdot z} \quad (7)$$

A (6) egy lehetséges megoldása pedig:

$$W(r) = J_0(K \cdot r) \quad (8)$$

ahol J_0 a nulladrendű elsőfajú Bessel függvény. Így a (3) alapján a (2) Laplace egyenlet egy lehetséges megoldása:

$$U(z, r) = e^{K \cdot z} \cdot J_0(K \cdot r) \quad (9)$$

Mivel a (2) egyenlet lineáris és homogén, így a lehetséges megoldások bármely lineáris kombinációja szintén megoldás, vagyis a megoldás egy lehetséges általános alakja:

$$U_n(z, r) = \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^{+n} A_j \cdot e^{K_j z} \cdot J_0(K_j r) \quad (10)$$

ahol az A_i és K_i konstansokat úgy kell megválasztani, hogy az előírt peremfeltételek teljesüljenek.

Ezek a peremfeltételek a következők:

$$U(z, r) = 0, \quad \text{ha } z = 0 \text{ és } 0 \leq r \leq R_0 \quad (11)$$

$$U(z, r) = 1, \quad \text{ha } z = z_0 \text{ és } 0 \leq r \leq r_0 \quad (12)$$

$$U(z, r) = 1, \quad \text{ha } r = r_0 \text{ és } z_0 - \Delta z \leq z \leq z_0 \quad (13)$$

A számítási algoritmus

A (10) összefüggésben a K_1 együtthatókat a következő módon választottuk:

$$K_i = g_i/R_0 \quad (14)$$

ahol g_i a

$$J_0(x) = 0 \quad (15)$$

egyenlet i -edik gyöke, /lásd 3. ábra/ és

$$g_i = g_{-i} \quad (16)$$

A választást az indokolja, hogy ilyenkor a (11) peremfeltétel síkjában felírható

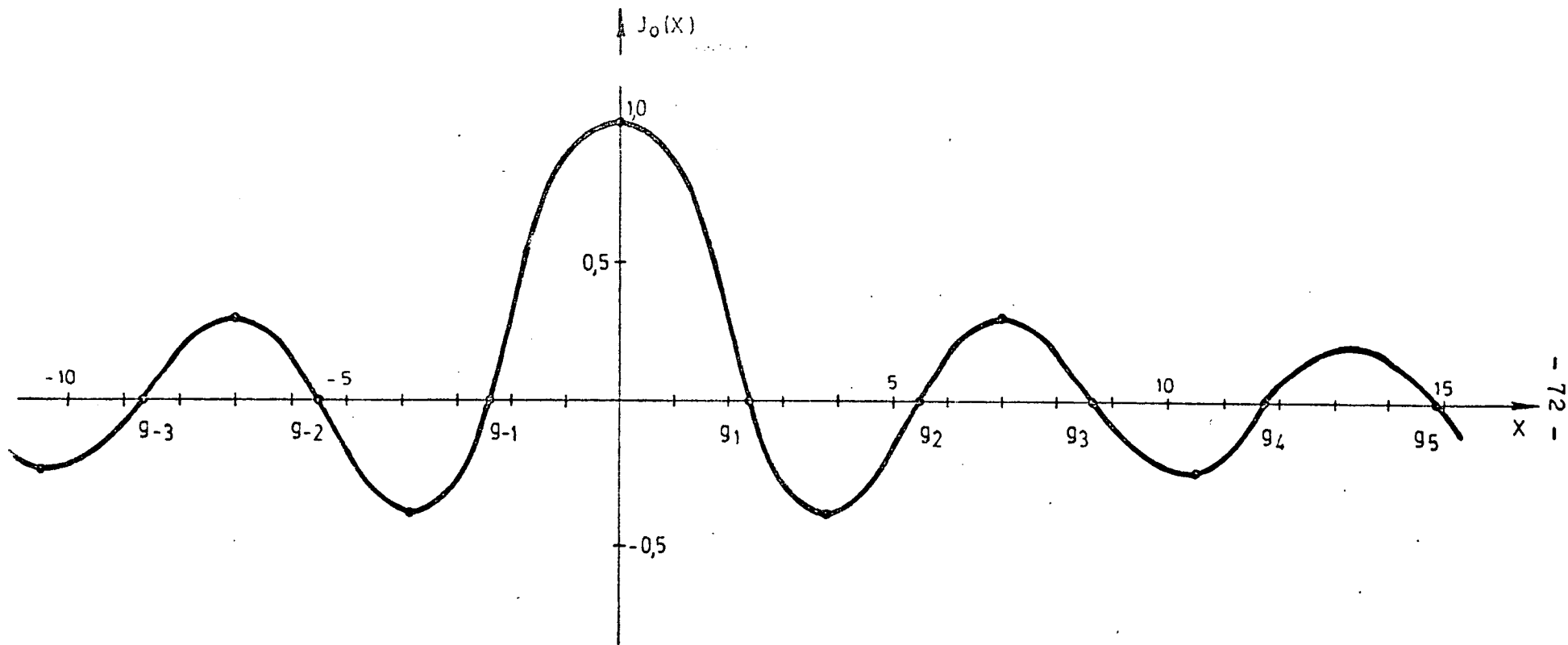
$$U(0, r) = \sum_{i=1}^n A_j J_0\left(g_i \frac{r}{R_0}\right) \quad (17)$$

függvénysor tagjai a

$$0 \leq r \leq R_0 \quad (18)$$

tartományban ortogonális függvényrendszert alkotnak, s ez a körülmény az A_i együtthatók kiszámítását jelentősen egyszerűsíti.

A (14) előírás mellett a (11) ... (13) peremfeltételek elvileg tökéletes teljesítése a $2 \cdot n = \infty$ tagból álló (10) szerinti függvénysorral lehetséges. A gyakorlatban a meg-



3. ábra

Az elsőfajú nulladrendű Bessel-függvény

oldást véges 2.n-számú taggal közelítettük és ezen $U_n(z,r)$ közelítő megoldást a négyzetes hiba minimalizálásával illesztettük a peremfeltételekre.

Négyzetes hibának az elektródák 2. ábra szerinti metszetein a hibanégyzet vonalintegrálját tekintettük, vagyis az illesztés célfüggvénye a következő:

$$H = \int_V (U_n - U)^2 dv = \min. \quad (19)$$

A négyzetes hibafüggvény három összetevőből áll:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 \quad (20)$$

A (11) peremfeltétel szerint a $z = 0$ síkra való illesztéshez tartozó összetevő

$$H_1 = \int_{r=0}^{R_0} U_n^2(0,r) dr \quad (21)$$

A (12) peremfeltétel szerint a fuvóka homloklapfelületére való illesztés összetevője:

$$H_2 = \int_{r=0}^{r_0} [U_n(z_0,r) - 1]^2 dr \quad (22)$$

A (13) peremfeltétel szerint az árnyékoló hengerre vonatkozó illesztéshez tartozó hibakomponens:

$$H_3 = \int_{z=z_0-\Delta z}^{z_0} (U_n(z, r_0) - 1)^2 dz \quad (23)$$

Ha az $A_{-n} \dots A_i \dots A_n$ együtthatók mellett a (19) teljesül, vagyis H-nak az A_i együtthatók függvényében minimuma van, akkor igaz, hogy:

$$\frac{\partial H}{\partial A_i} = \frac{\partial H_1}{\partial A_i} + \frac{\partial H_2}{\partial A_i} + \frac{\partial H_3}{\partial A_i} = 0 \quad (24)$$

A (21) ... (23) összefüggéseket a (24)-be helyettesítve, kettővel osztva és felhasználva a (10) összefüggést, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial A_i} = a_{i, -n} A_{-n} + a_{i, -n+1} A_{-n+1} + \dots + a_{ij} A_j + \quad (25)$$

$$+ \dots + a_{in} A_n - c_i = 0$$

$$(i, j = -n, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n)$$

ahol:

$$a_{ij} = \int_{r=0}^{R_0} J_0(K_{ir}) J_0(K_{jr}) dr + e^{z_0(K_i + K_j)} \int_{r=0}^{r_0} J_0(K_{ir}) J_0(K_{jr}) dr +$$

$$+J_0(K_i r_0) J_0(K_j r_0) \int_{z=z_0-\Delta z}^{z_0} e^{(K_i+K_j)z} dz \quad (26)$$

és

$$c_i = e^{K_i z_0} \int_{r=0}^{r_0} J_0(K_j r) dr + J_0(K_j r_0) \int_{z=z_0-\Delta z}^{z_0} e^{K_j z} dz \quad (27)$$

A (25) összefüggést valamennyi i -re felírva $2n$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek együtthatói a (26) és (27) alapján számíthatók.

Az egyenletrendszer megoldásaként kapott A_i együtthatókat a (10)-be behelyettesítve megkapjuk a potenciálfüggvényt. A villamos térerősséget a potenciálfüggvény gradiense szolgáltatja, vagyis:

$$E = - \text{grad}U = - \frac{\partial U}{\partial r} \bar{e}_r - \frac{\partial U}{\partial z} \bar{e}_z - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi \quad (28)$$

Mivel az elrendezés hengersizmetrikus jellege miatt az U potenciál φ -től nem függ, így a (28) kifejezés utolsó tagja zérus. A 2. ábra szerinti metszet síkjában valamely z és r koordinátákhoz tartozó pontban így az \bar{E} irányának meredeksége:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r} / \frac{\partial U}{\partial z} \quad (29)$$

illetve az U_n közelítő potenciálfüggvényből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial U_n / \partial r}{\partial U_n / \partial z} \quad (30)$$

ahol a (10) kifejezés parciális differenciálásával:

$$\frac{U_n}{r} = - \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^{+n} A_j K_j e^{K_j z} J_1(K_j r) \quad (31)$$

és

$$\frac{U_n}{z} = \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^{+n} A_j K_j e^{K_j z} J_0(K_j r) \quad (32)$$

A fenti összefüggések birtokában a fuvóka homlokfelületének megadott (r_1) koordinátájú pontjából kiinduló erővonal menete pontról-pontra kiszámítható.

A kidolgozott programok

A feladat megoldására kidolgozott programcsomag három FORTRAN-IV nyelven írt programból áll.

A PROGA nevű program beolvassa a Δz és az $n/|n| \leq 10$ értékeket, majd a (26) és (27) alapján kiszámítja az egyenletrendszer a_{ij} és c_i együtthatóit és ezeket egy direkt szervezésű munkafájlban helyezi el.

A PROGB a munkafájlból beolvassa az együtthatókat és

a (25) egyenletrendszer megoldásával kiszámítja az A_i állandók értékét a Cramer-szabály alkalmazásával. Az ehhez szükséges determinánsokat a Gauss-féle eliminációs módszer egyik változatával /az ún. főelem-kiválasztásos eljárással/ határozza meg. Az eredményeket elhelyezi a munkafájl-ban.

A PROGC program konzol-terminálról beolvassa az r_1 koordináta értékét $/0 \leq r_1 \leq 0,2/$, majd a (30) ... (32) összefüggések segítségével pontról-pontra kiszámítja és sornyomtatón megjeleníti az erővonal menetét. /A z irányu lépésköz: $5/60 = 0,083$ mm/.

A felsorolt főprogramok működésük során felhasználják a következő függvényeljárásokat:

FUNCTION BJØ/x/, mely az

$$y = J_0(x) \quad (33)$$

első fajú nulladrendű Bessel-függvényt számítja.

FUNCTION DJØ/x/, mely a fenti függvény deriváltját, vagyis a

$$y = \frac{d}{dx} J_0(x) \quad (34)$$

függvényt számítja.

FUNCTION BF \emptyset /x/, mely az

$$y = \int_{x=\emptyset}^x J_0(x) dx \quad (35)$$

integrált számítja.

FUNCTION BixJ \emptyset /x/, mely az

$$y = \int_{x=\emptyset}^x x \cdot J_0(x) dx \quad (36)$$

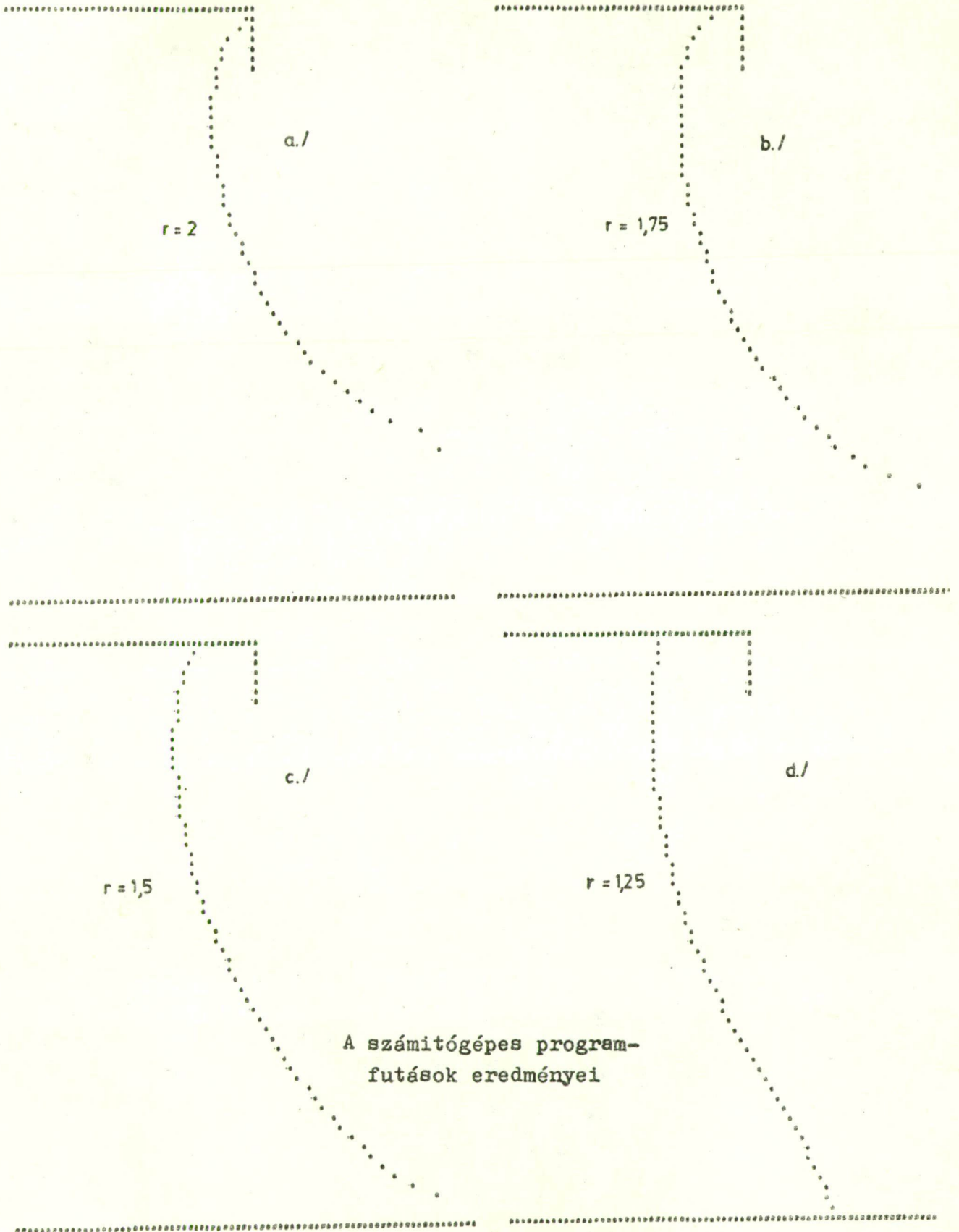
integrált számítja.

FUNCTION DET2 \emptyset /M/, mely egy COMMON területen lévő 2 \emptyset x 2 \emptyset -os matrix bal felső sarkában lévő M x M méretű részmátrixának determinánsát számítja, ahol

$$M \leq 2\emptyset \quad (37)$$

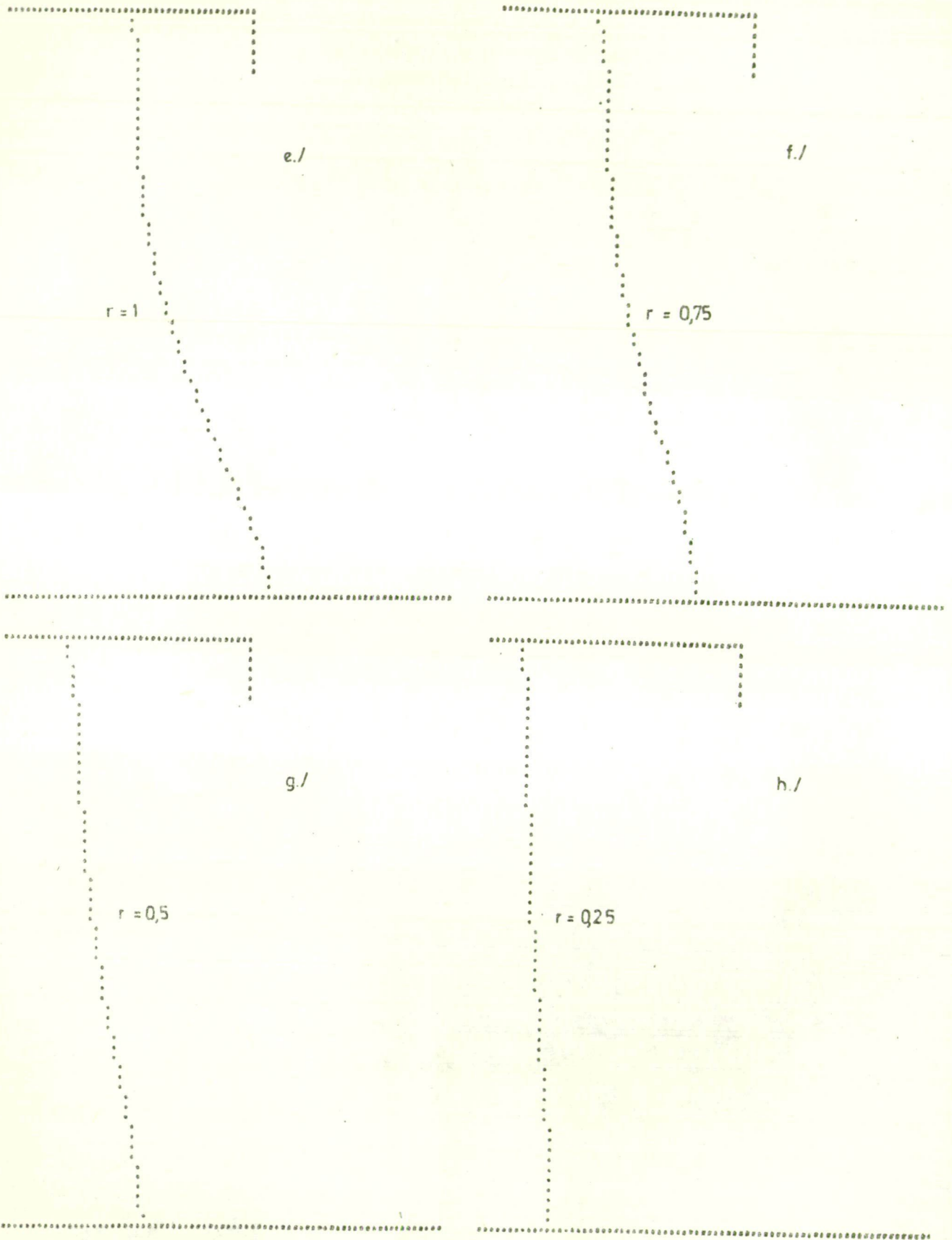
A fenti programokat lefuttatva, a $\Delta z = 0,05$ cm és $n = 5$ / $2n = 10$ / kiindulási adatokból kapott eredményeket a 4. ábraszorozat szemlélteti. Ezek alapján az egy lapra összerajzolt erővonalképet mutatja be az 5. ábra.

Az eredmény alapján várható, hogy a fuvóka homlokfelületéről kiinduló erővonalak döntő többsége valóban a cornea felületén záródik. Ezt a várakozást az árnyékolt



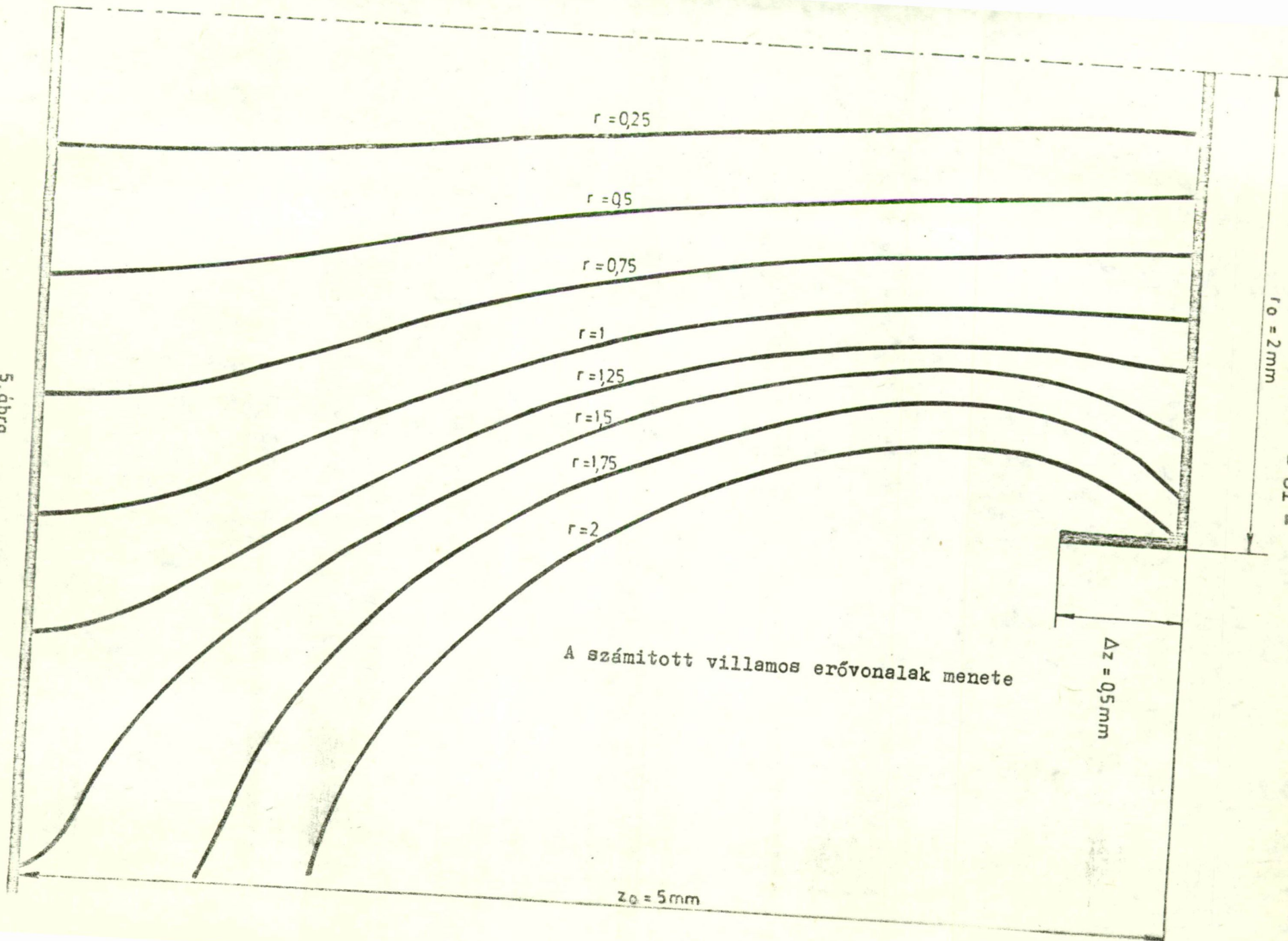
A számítógépes program-
futások eredményei

4. ábra



4. ábra (folyt.)

5. ábra



érzékelővel végzett eddigi eredményes kísérletek is alátámasztják.

I r o d a l o m

Fónyad Zoltán: "Egyenletrendszerek megoldása. Determinánsok, mátrixok" Matematikai és Számítástechnikai Füzetek, Miskolc - Egyetemváros, 1976.

Fónyad Zoltán: "Függvények közelítése a legkisebb négyzetek elve alapján", Matematikai és Számítástechnikai Füzetek, Miskolc - Egyetemváros, 1976.

Modern Fizikai Kisenciklopédia, szerk. Fényes Imre, Gondolat, Budapest, 1971.

Szőkefalvi-Nagy Béla: "Valós függvények és függvénysorok" Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

J. Nievergelt, J. C. Farrar, E. M. Reingold: "Matematikai Problémák megoldásának számítógépes módszerei", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.

G. I. Marcsuk: "A gépi matematika numerikus módszerei. Parciális differenciál egyenletek", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

N. Sz. Bahlov: "A gépi matematika numerikus módszerei.
Analízis, algebra, optimalizálás, közönséges differenciál-egyenletek" Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.

Herendi M., Tarnay K.: "Egyenáramu hálózatok analízise"
Programozás és Elektronika Sorozat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.