

A BALATONI ÖKOSZISZTÉMA SZTOCHASZTIKUS ÉS DETERMINISZTIKUS MODELLJE

Kutas Tibor, Tóth János

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet

Bevezetés

Gazdasági és érzelmi szempontból az ország egyik legfontosabb, legsürgetőbb környezetvédelmi problémája a Balaton vízminőségének romlása. A megnövekedett tápanyagterhelés /foszfor és nitrogén/ hatására a tóban megnövekedett az algák tömege és produkciója, ami veszélyezteti a tó fürdésre való alkalmasságát. Ezt a folyamatot hívják eutrofizációnak.

Milyen segítséget nyújthat a matematikai modellezés a feladat megoldásához? Egyrészt hozzájárulhat a tavi ökoszisztéma elemei közötti kapcsolat megértéséhez, összefoghatja az eddigi kutatási eredményeket és rávilágíthat olyan területekre, amelyeket eddig nem vagy kevésbé kutattak, pedig a tó jövője szempontjából lényegesek, másrészt segítséget nyújthat a víz minőségét befolyásoló döntések előkészítésében azáltal, hogy az egyes döntési alternatívák várható hatását /a már elért megértési szint alapján/ előrejelzi.

A jelenlegi modell egy modellsorozat utolsó, de nem végső tagja, mivel egyrészt a modell együtt fejlődik az új ökológiai ismeretekkel, másrészt a modell egészére és egyes részfolyamatok leírására új matematikai eszközöket keresünk.

Változók és részfolyamatok

A tavat hidrodinamikai kísérletek és megfigyelések alapján négy medencére /Keszthelyi, Szigligeti, Szemesi és Siófoki medencére/ osztottuk. Az egyes medencéket külön modellezzük, és az egyes medencék modelljét a hidrológiai átfolyással kötjük össze. Az egyes medencék állapotváltozói, részfolyamatai és paramétervektora azonos; ez a követelmény szükséges ahhoz, hogy azt mondhassuk, valóban modellezést végzünk, és nem csak az adatokhoz egyszerű görbeillesztést. Az ismertetendő modellt, illetve modellcsaládot a Balaton Eutrofizációs Modelljének, röviden BEM-nek, esetenként BEM-modellnek fogjuk nevezni.

A modell állapotváltozói a következők:

- téli-tavaszi fitoplankton / A_1 /
- nyári fitoplankton / A_2 /
- őszi fitoplankton / A_3 /
- kék alga / A_4 /
- holt szervesanyag /OM/
- bakterioplankton /B/
- oldott szervesanyag foszfor /P/
- oldott szervesanyag nitrogén /N/
- üledék szervesanyag tartalma /S/
- kicserélhető foszfor az üledékben /PS/

A tekintetbe vett részfolyamatok:

- elsődleges termelés / $A_1 - A_4$ /
- természetes pusztulás / $A_1 - A_4, B$ /

- holt szervesanyag-felvétel /B/
- szervesanyag lebontása /B/
- ülepedés /A₁ - A₄, B, OM/
- mineralizáció /S/
- foszfor kicserélődés az üledék és a víztest között
- denitrifikáció /N/
- felkeveredés
- bejövő tápanyagterhelés /P, N/
- hidrológiai be- és kifolyás /A₁ - A₄, B, OM, P, N/

A determinisztikus BEM modell

A determinisztikus modell egy folytonos idejű, folytonos állapotterű modell: egy nemlineáris nemautonóm differenciálegyenletrendszerre vonatkozó kezdetiérték-probléma. Ennek a rendszernek itt csak kiragadott részleteit ismertetjük.

Tekintsük a változók közül például a nyári fitoplankton mennyiségét. Az ennek megváltoztatására ható részfolyamatok közül válasszuk ki az elsődleges termelést. Feltevésünk szerint A₂ idő szerinti deriváltjának a $t \in \mathbb{R}$ helyen felvett értékéhez ez a részfolyamat a

$$R_8[A_2(t), P(t), N(t), t] := \\ \text{PMAX} \cdot \text{TEMP}_2[T(t)] \cdot A_2(t) \cdot U_2[P(t), N(t), L_0(t)]$$

taggal járul hozzá, ahol

- PMAX maximális produktós ráta, állandó,
- T a vízhőmérséklet az idő függvényében,
- TEMP₂ a hőmérséklettől függő tényező,
- L₀ a globálsugárzás a víz felszínén az idő függvényében,
- A₂, P, N a fent megadott állapotváltozók, mint az idő függvényei,
- U₂ az elsődleges termelés fény- és tápanyagfüggését leíró tényező.

A differenciálegyenletrendszer analóg tagokból tevődik össze. Kiemeljük, hogy T és L₀ nem belső állapotváltozók, hanem külső kényszerek, értékük mérési adatokból ismert.

Mivel a differenciálegyenletrendszer nem autonóm és nemlineáris ezért numerikusan oldottuk meg. A szimulációs eredményeket mérési adatokkal hasonlítottuk össze. Először csak egy-egy medencét szimuláltunk bizonyos időszakokban /Szemesi medence 1976-77, Siófoki medence 1977/, ekkor az eredmények a mért fitoplankton biomasszával, elsődleges termeléssel, oldott szervesanyag és foszfor és nitrogén koncentrációval lett összehasonlítva. Ezen mérések alapján határoztuk meg a modell paramétereit. Az egyes medencék modelljének összekapcsolása után a szimulált eredményeket a klorofill-a koncentrációval hasonlítottuk össze, mivel ez az egyetlen vízminőségre jellemző érték, melyet mind a négy medencében párhuzamosan és elég gyakran mérnek. A modell megfelelően írja le a tóban lejátszódó folyamatokat, többnyire pontosan jelzi az egyes folyamatok időbeli, térbeli lefutását és nagyságrendjét.

A víz minőségét jellemző klorofill-a koncentrációnak mind a négy medencében egy tavaszi és egy nyárvégi csúcsa van. A modell a tavaszi csúcs értékét mindenütt pontosan szimulálta, de a valóságosnál egy ki-

csit korábbra. Ez a tény mutatja, hogy a jégolvadás után lejátszódó folyamatokról még nem tudunk eleget. A nyári csucsnak mind az ideje, mind a nagyságának a szimulálása megfelelő a Szemesi és a Siófoki medencében. A másik két medencében csak az egyik szimulált évben sikerült ez, a másodikban nem tudtunk leírni egy vízvirágzást. Itt elsősorban a kék algák /melyek a vízvirágzást okozzák/ dinamikáját kellene jobban ismernünk.

Arra vonatkozóan is végeztünk vizsgálatokat, hogy egyes tápanyagterhelés csökkentéseknek mi lesz a tó vízminőségére vonatkozó hatása. Ilyen típusu szisztematikus vizsgálatokból megállapítható, hogy milyen mértékű tápanyagterhelés-csökkentés szükséges az - alkalmasan definiált - vízminőség adott szintjének eléréséhez.

A sztochasztikus BEM modell.

Miután a determinisztikus modell segítségével sikerült a mérési adatok viszonylag pontos leírása, és megtettük az első lépéseket az előrejelzés felé, a balatoni ökoszisztémában - és általánosabban: minden biológiai rendszerben - meglevő inherens - nem mérési hibából eredő - fluktuációkat szeretnénk volna reprodukálni, lehetőleg további /közvetlen biológiai jelentéssel nem bíró/ paraméterek bevezetése nélkül. Ebből a célból egy sztochasztikus modellt szerkesztettünk.

Az irodalomban sztochasztikus tómodell szinte egyáltalán nem létezik. A miénkhez közelálló ökológiai problémák sztochasztikus leírására a következő eszközöket használják: idősorok, véletlen bolyongás és diffúzió, véletlen paraméterű differenciálegyenletek, sztochasztikus differenciálegyenletek, tiszta ugró Markov folyamatok. Ezek közül a lehetőségek közül a legutolsót választottuk, mivel a tiszta ugró Markov folyamatok jól használhatónak bizonyultak a fizikában, fizikai kémiában és a biológia egyes területein; mivel ezek segítségével a fluktuáció további paraméterek bevezetése nélkül magyarázható; mivel igen természetes módon lehet megfeleltetni egy differenciálegyenletnek egy tiszta ugró Markov folyamatot; mivel ezek a folyamatok könnyen szimulálhatóak, és végül, mivel remélhető, hogy ezen modell alapulvétele esetén a paraméterek becslése statisztikailag viszonylag egyszerűen megoldható.

A most ismertetendő sztochasztikus BEM modell tehát egy folytonos idejű, diszkrét állapotterű tiszta ugró Markov folyamat ugyanazokkal az állapotváltozókkal és részfolyamatokkal, mint amelyekkel a determinisztikus rendelkezik.

Ragadjuk ki ismét a determinisztikus modellnél megvizsgált részletet, és azon fogjuk bemutatni a modell definícióját. Most a nyári fitoplankton elsődleges termelését az

$$\begin{aligned} a_2 &\rightarrow a_2 + 1 \\ p &\rightarrow p - pr \\ n &\rightarrow n - nr \end{aligned} \quad (1)$$

állapotátmenet fogja kifejezni, azon feltétel mellett, hogy a folyamat állapotát megadó vektor megfelelő koordinátái a_2 , p és n . Feltevéseink a következők:

/1/ az (1) átmenet valószínűsége a $(t, t + h)$ intervallumban $R_g/a_2, p, n, t / \cdot h + o(h)$, ha $h \rightarrow 0$;

/ii/ az (1) típusu - részfolyamatokat kifejező - átmenetek egymástól függetlenül mennek végbe;

/iii/ annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + h)$ intervallumban nem megy végbe egyik részfolyamat sem: $1 - \sum R_i \cdot h + o(h)$.

Ez a definíció egy tiszta ugró Markov folyamatot definiál, amelynek realizációit számítógéppel szimuláltuk. A szimuláció eredményeként kapott realizációk a mérési adatokkal jó egyezést mutattak.

Diszkusszió, perspektívák

Az ismertett modellek további finomításához figyelembe veendők az egy medencén belüli térbeli inhomogenitások. Ennek speciális eseteként különösen fontos lenne leírni az üledékben végbemenő részfolyamatokat, ugyanis mérések és becslések alapján az üledék foszfortartalma olyan magas, hogy a kívülről érkező tápanyagterhelés csökkentése után is elegendő tápanyagot szolgáltat az algák számára. Ezen finomítások megtételének legfőbb akadálya a megfelelő részletességű adatok hiánya.

A determinisztikus és sztochasztikus modellel kapcsolatban szeretnénk a paramétereket algoritmikusan meghatározni, és nem próbálkozások alapján kalibrálni. Ez egy négyszer 10 változós nemlineáris differenciálegyenletrendszer esetén közel sem triviális feladat. Ha a mérések pontosak lennének, és a megadott sztochasztikus modell jó lenne, akkor az utóbbi alapján viszonylag könnyebben lehetne a paramétereket becsülni.

Magával a sztochasztikus modellel kapcsolatban azt reméljük, hogy megfelelő paraméterértékek mellett egy az átlag köré szerkesztett konfidencia intervallum a mérési adatok többségét le fogja fedni.

Irodalom

- [1] Baranyi Sándor: A Balaton hidrológiai viszonyai. In: A balatoni kutatások összefoglaló jelentése /szerk.: Baranyi S./ VIZDOK, Budapest 1979.
- [2] Hérodek Sándor, Kutas Tibor, Csáki Péter: Simulation of phytoplankton dynamics in Lake Balaton. Ecological Modelling /megjelenés alatt/
- [3] Jennigan, R.W., Tsokos, C.P.: Simulation of a nonlinear stochastic ecology model. Appl. Math. and. Comp. 7 /1980/ 9-25.
- [4] Kutas Tibor, Hérodek Sándor: Short description of Balaton Eutrophication Model /BEM/. MTA SZTAKI Working Paper MS/9 1982.