velük, hanem éppen ellenkezőleg időbeli *egymásmellettiségben* élnek, egymással párhuzamosan haladnak. Képtelenség volna, heteken, hónapokon keresztül kiejtési gyakorlatokat folytatni — értelmetlen szöveggel; képtelenség már csak azért is, mert a hangsúly és a hanghordozás a mondatbeli értelem kifejezői; de képtelenség azért is, mert a nevelőiskola nem magoltathat növendékeivel értelmetlen szöveget.. Énekeket, költeményeket sem lehetne taníttatni egyrészt kiejtési ismeretek, másrészt szókincs és nyelvtani tudás, tehát fordítási készség nélkül. Egyszerre kell tehát kezdenünk a kiejtés és az intonáció, a megértés és a szószerinti reprodukálás folyamatainak begyakoroltatását. Ezeknek a különféle feladatoknak az egyes órák keretein belül való elhelyezése, egymással arányba állítása már egyéni feladat, melyet csak az elsősorban érdekelt szaktanár végezhet el teljes pedagógiai felelősség mellett.

Berg Pál

Az egyenletfelállítás módszertana.

Pajor Elemér kartársunknak igen figyelemreméltó cikke jelent meg a Nevelésügyi Szemle 1938. évi januári számában „az egyenletfelállítás nehézségei a pedagógiai lélektan megvilágításában" címen.

„Nem tudom felállítani az egyenletet" ... idézi a közkeletű panaszt, és nagyszerű pedagógiai érzékkel merül el a mennyiségtani oktatás e fontos kérdésének taglalásába. Fejtegetései során megállapítja, hogy a tanulót a „helytelen feladatlátás", a „feladattudat teljes hiánya„ gátolja a megoldásban. A tanuló figyelmét a „számolás" kényszerképzetéből ki kell ragadni, „elvonásra és viszonykeresésre beállított dinamikus szemléletet" kell benne kifejleszteni.

A cikknek már az is nagy érdeme, hogy a matematikai oktatás lélektani tényezőire figyelmeztet, mert a matematika tartalmának logikai tisztasága rendszerint csábítólag hat a katedrán, könnyen elvonja a tanár figyelmét azoktól a lelki folyamatoktól, melyekkel pedig minden tanítómesternek számolnia kell. Hosszú tanári gyakorlatom igazolja Pajor Elemér következtetéseinek helyességét. Az alábbiakban az ő fejtegetéseivel párhuzamban a magam eljárását mint a kérdés lehető megoldásainak egyik teljesen gyakorlati példáját szeretném bemutatni. Természetesen az oktatás u. n, „közhely"eit igen sokszor fogom érinteni.

I., *Az előkészítés folyamata.* — Már az alsó két osztályban rászoktathatjuk növendékeinket arra, hogy a „számolás" megtanulása és gyakorlása csupán előkészülés feladatok megoldására. Az „élet kérdései"-ben feladatunk annak megállapítása, hogy bizonyos mennyiségekkel *miként* kell számolnunk. A példák nyomán adódó tanulságokat mihamarább foglaltassuk össze és írassuk fel ilyen alakban:

ár = egységár × mértékszám

terület (téglalapé) = alap mértékszáma × magasság mértékszáma vagy egyszerűbben:

$$\text{terület (téglalapé)} = \text{alap} \times \text{magasság}$$
$$\text{kerület (köré)} = 2 \times \text{sugár} \times 3{\cdot}14$$
$$\text{kamat} = \frac{\text{tőke} \times \text{percent} \times \text{napok}}{36000}$$

Ilyen összefüggések keresésére adjunk a gyermekeknek minél több alkalmat. Szokja meg a növendék már az alsó két osztályban, hogy a matematikában gondolatainkat, állításainkat, ítéleteinket *egyenlőségekkel* tudjuk kifejezni. Az egyenlőség a mennyiségtan *mondata.*

Ezzel a szoktatással már megtettük az első lépést kis növendékeinkkel az „általánosítás" tudománya felé. Az ismert típusú feladatok kidolgozását az „összefüggés" felírása (felidézése) vezesse be. Ez a mozzanat fogja szemléletessé tenni a gyermeki lélek számára a helyes kiinduló pontot (a „matematikai munka" lényegét!).

A „feladattudat" mélyítése érdekében okvetlenül be kell iktatnunk még egy mozzanatot. A tanulónak a feladat megoldása előtt meg kell állapítani azt, hogy melyek a megadott mennyiségek (mik az „adat"-ok), és mi a még nem ismert (ismeretlen) mennyiség. Ezeket a megállapításokat mindenkor *egyenlőségek* alakjában jegyeztessük fel. (Az egyenlőség a matematika mondata!)

A gyakorlott matematikus átsiklik ezen a mozzanaton, hiszen az ő számára ez olyan természetes valami, hogy csak egy pillanatot veszteget rá, de a gyermek tudatában szemléletesen meg kell építeni a gondolkodásnak ezt a lépcsőjét, használatát az ő számára is „természetessé", magától értődővé kell tenni. Negatív célja is van e mozzanat beiktatásának: a feladat elején a növendék tudatmezejéről száműzni kell a „számolás kényszerképzetét", hogy figyelme teljesen felszabaduljon a szükséges szemléleti tartalom befogadására. Itt Pajorral látszólag ellenmondásban vagyok, mikor azt mondja: „Az adott számokat nem szabad figyelembe venni!" Az ő célja is azonban az, hogy a tanuló figyelmét a számokról a megnevezés felé fordítsa, melyek az összefüggésre utalnak. Ő számadatok általánosításával, én a számadatok megnevezésével alkalmazom ugyanazt a felismert lélektani törvényt.

Az adatoknak a szövegből való kiemelésére célszerű egy állandó helyet, pl. a kidolgozás terének baloldalát felhasználni — már csak a rendérzék módszeres fejlesztése kedvéért is.

Lássunk néhány példát:

1., Mennyibe kerül a 23·50 P-ős szövetből 4·15 m?

Kidolgozás:

ár = x P	ár = egységár × mértékszám
egységár = 23·50 P	
mértékszám = 4·15 m	

2., Az iskola homlokzatának alapja 58·4 m, magassága 15·8 m. Hány m^2 a homlokzat területe?

Kidolgozás:

alap = 58·4 m	terület = alap × magasság
magasság = 15·8 m	
terület = x m^2	

3., Hány P a kamata 450·68 P-nek 5 % mellett 68 napra?

Kidolgozás:

kamat = x P
tőke = 450·68 P
percent = 5 %
napok = 68 nap

$$\text{kamat} = \frac{\text{tőke} \times \text{percent} \times \text{napok}}{36000}$$

A laikusok számára oly hirhedt *x*-et szintén érdemes pedagógiai lélektani okokból figyelemben részesítünk Nem szabad megengednünk, hogy a növendék tudatában vagy még inkább tudata alatt az *x* mint „örök ismeretlen valami" gyökerezzék be. Az *x* a tanuló életében legyen megszokott, mindennapos *általános* szám, mely éppen a szellemi kényelmet szolgálja. A még idegen emberről is azt mondjuk első tekintetre: „egy úr", „egy hölgy", és ha csak később tudjuk is meg nevét, addig is sok mindent megállapíthatunk róla. Az *x* is csak *ideiglenes elnevezése* bizonyos számnak. Mikor egy bizonyos keresett számot *x*-xel jelölünk, már is *nem ismeretlen* számunkra, mert már tudjuk róla, hogy *van*, és a gondolkodás első lépésével azt is meg tudjuk állapítani róla, hogy *milyen viszonyban van* a többi szereplő számmal.

Gondoskodnunk kell arról, hogy az *x*-nek a többi számmal való kapcsolata minden alkalommal *láthatólag* jelentkezzék a tanuló előtt, hogy a feladattudat bizonytalanságát felváltsa idővel az összefüggés keresésének gépies, határozott beidegzettsége. Ezért a kidolgozás következő mozzanata ezen a fokon a helyettesítés legyen. A fenti példák szerint:

1., $x = 23{\cdot}50 \times 4{\cdot}15$

2., $x = 58{\cdot}4 \times 15{\cdot}8$

3., $x = \dfrac{450{\cdot}68 \times 5 \times 68}{36000}$

Véleményem szerint nem volna elhamarkodott lépés, ha ezeket az egyenlőségeket már az alsó két osztályban is *egyenleteknek* neveznők.

Ugyancsak ezen a fokon, de legkésőbb a III. osztály elején természetes áthajlást ad az algebrai forma felé a szokásos rövidítések bevezetése. Beláttatjuk a tanulókkal, hogy milyen nagy kényelemmel jár, ha az adatok megnevezésében és az összefüggésekben az egyes mennyiségeket *betűkkel* rövidíthetjük (és pedig általános szokás szerint „ékezet" és „rövidítési pont" nélkül!). A kiszámítandó szám betűjelét is, mely tulajdonképpen szintén ilyen rövidítés, váltogathatjuk (x, y, z, ...). Igy a „betűszám" szemlélete természetes módon alakul ki a növendékek „szemében", lelkében

A felhozott példák kidolgozása tehát később ilyen képet nyer:

1.,
a = x P
e = 23·50 P
m = 4·15 m

a = e . m
x = 23.50 . 4·15
x = ... P
Mellékszámítások.

2.,
a = 58.4 m
m = 15.8 „
t = y m²

t = a . m
y = 58.4 . 15.8
y = ... m²

Mellékszámítások.

3., $k = z$ P $\quad k = \dfrac{t \cdot p \cdot n}{36000}$

$t = 450.68$ P

$p = 5\,\%$ $\quad z = \dfrac{450.68 \cdot 5 \cdot 68}{36000}$

$n = 68$ nap

Mellékszámítások.

II. *A szóbeli egyenletek felállítása.* A gimnáziumi tanterv a III. osztályban csak ennyit mond az egyenletekkel kapcsolatosan: „Egyszerű függvények ábrázolása és változása (növekedés és fogyás). Elsőfokú függvény és elsőfokú egyismeretlenes egyenlet (a legegyszerűbb esetekben)". A szöveges feladatok helyét külön szavakkal nem jelöli meg, a tanár tetszésére bízza, mikor és hol illeszti be ezeket tanításába. Igen kézenfekvő, hogy a 13 éves gyermek számára életszerű, tehát szöveges példákból kell kiindulnunk már a függvény fogalmának megismertetésénél is.

Nem tartozik tárgyunkhoz a függvénytanítás módszerének fejtegetése, de azt mégis hangsúlyoznunk kell, hogy a függvénytani ismeretek tüzetes tanítása végleg az összefüggések keresésére irányítja a tanuló figyelmét és ennélfogva igen eredményesen segíti a tanulót helyes lelki beállítottság elérésére a szöveges egyenletek „matematikai" megoldásában.

Mikor a szóbeli egyenletek megoldásához érkezünk, a megszokott út révén világosan áll a növendékek előtt a kidolgozás első két állomása: a) a még nem ismert és az ismert számok felsorakoztatása megnevezéseikkel együtt, b) az összefüggés megkeresése (mindíg egyenlőség alakjában!). A matematikai feladat ezzel véget is ér, a további teendő csupán „számolási feladat."

a) Egyszerű az eset akkor, ha a feladat ismert összefüggésre támaszkodik. Ilyenkor az adatokat egymás alá felsorakoztatjuk a szövegben való előfordulásuk szerint. A számadatok betűjelét a felhasználandó képlet betűi adják meg. A fen i példák mind ilyenek.

Más a helyzet akkor, ha az összefüggést a feladat szövegéből kell kiolvasnunk. Ebben az esetben a számadatok sorában helyet kap az a két (rendszerint összetett) mennyiség is, melynek egyenlőségét a feladat szövege közvetlenül vagy közvetve megállapítja. Fontos módszertani eljárásnak tartom ezt a lépést, mert általa érleljük ki a növendék lelkében azt a meggyőződést, hogy az egyenlő mennyiségek előállítása jóval a „számítás" előtt az *adatgyűjtés* kezdeti teendői közé tartozik. A kidolgozást megelőző „adatgyűjtés" itt nyer döntő jelentőséget. A tanuló munkája tehát azzal kezdődik, hogy a keresett számot elnevezi x (y, z vagy más általános) betűvel és a továbbiakban „ismert"-nek, „kiszámítottnak tekinti. Azután a példa szövegét pontról pontra követi és az egyszerű számadatok segítségével felépíti *az összetett adatokat*: a leendő „baloldali" és a „jobboldali" mennyiséget.

Példák:

4., Péternek 12 P-vel több pénze van, mint Pálnak; együttvéve 60 P-jük van. Mennyi pénze van mindegyiknek?

Kidolgozás:

Pálnak pénze = x P (Célszerű mindig azt a keresett számot jelölni x-el (általános számmal), amelyhez hasonlítjuk a többi mennyiséget.)

„Péternek 12 P-vel több pénze van . . ."

Péternek pénze = x + 12 P

„. . . együttvéve . . ."

Baloldali mennyiség (ezután röviden B.m.) = x + (x + 12)

„. . . 60 P-jük van."

Jobboldali mennyiség (röviden J.m. = 60

(Az egyenlő mennyiségnél már elhagyjuk a megnevezéseket, az egyenlőség ténye a fontos.)

5., Egy fiú 40 fillérért írószereket vásárolt; vásárlás után háromszor kevesebb pénze volt, mint előtte. Mennyi pénze volt eredetileg?

Kigolgozás:

A fiú eredeti pénze = x f (A kérdésre feleltünk és ezáltal tisztáztuk a keresett számot.)

„. . . 40 fillérért írószereket vásárolt . . ."

A fiú pénze vásárlás után = x — 40 fillér

„. . . vásárlás után háromszor kevesebb pénze volt . . ."

B.m. = 3.(x — 40) (A kisebbet megfelelően nagyobbítottuk, hogy *egyenlő mennyiség* legyen!)

„. . . mint előtte."

J. m. = x

6., Az atya 34 éves, a fia 6 éves. Hány év mulva lesz az atya háromszor annyi, mint a fia?

Kidolgozás:

Hány év mulva = x év (A kérdést eredeti formájában meghagytuk, hogy szembetűnő legyen az x szerepe.)

Az atya kora most = 34 év

„ „ „ x év mulva = 34 + x év

A fiú kora most = 6 év

„ „ „ x év mulva = 6 + x év

„. . . az atya háromszor annyi idős lesz . . ."

B. m. $= \dfrac{34 + x}{3}$ (A nagyobbat megfelelően kisebbítettük, hogy *egyenlő mennyiség* legyen!)

„. . . mint a fia (lesz)"

J. m. = 6 + x.

Módszertani érdekből megtehetjük, hogy néhány példaszövegen ezt a beosztást elvégeztetjük az osztállyal, sőt színes krétával kiemelhetjük az egyenlő mennyiségekre utaló, összehasonlító szövegrészeket.

b) A második és s mi szempontunkból befejező lépés az összefüggés megkeresése. A jól összeállított „egyszerű" vagy „összetett" adatok már előírják az összefüggést is. Az „egyenlet"-et vagy a kapcsolatos képlet alapján írjuk fel, mikor is az idézett képletbe beírjuk az adatok számait (ideértve az általános x, y, z, . . . stb. számokat is!), vagy a gondosan kiegyenlített baloldali és jobboldali mennyiséget öszszekapcsoljuk az egyenlőség jelével. Az összetettebb esetekben mind a két módozat is előfordulhat.

A fenti példákban igen egyszerűen adódnak a keresett egyenletek:

4., $x + (x + 12) = 60$

5., $3\,(x - 40) = x$

6., $\dfrac{34 + x}{3} = 6 + x.$

A kidolgozás szövegébe sok tanár a magyarázatot is beíratja. A gondolkozás láncszemeinek tudatosítása ez. Néhány kezdeti példánál ajánlatos is ily módon a szűkszavú matemetikai feladatot közelebb vinni a mindenki által érthető prózai írásművekhez. Később is tartsuk meg a vázlatot, az elrendezést, a sorrendet, mert az áttekinthetőség és a megszokottság a gyengébb tanulókat is segíteni fogja munkájukban, a tanárnak pedig könnyebbé teszi az ellenőrzést.

A kidolgozás végső alakját a köv. felsőbb osztályos példákban mutatom be.

7., (A számtani haladvány ismert képletei alapján.)
Valaki megtakarított pénzéből évenkint 6 P-vel többet tesz félre, s ily módon 4050 P-t gyüjt. Hány évig tartott a gyüjtés, ha az utolsó évben félretett összeg 234 P volt és mily összeggel kezdte meg a gyüjtést?

Kidolgozás:

$d = 6$ P
$s_n = 4050$ P
$n = x$ év
$a_n = 234$ P
$a = y$ P

$$a_n = a + (n - 1) \,.\, d$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$234 = y + (x - 1) \,.\, 6$$
$$4050 = \frac{x}{2}(y + 234)$$

Számítások.

Eredmény: $n = 25$ év, $a = 90$ P. (Az x helyébe 25, az y helyébe 90 ismert számok léptek!)

8., (Összefüggés szöveg szerint.)
Egy szám ötszörösének négyzete és egy másik szám háromszorosának négyzete különbségül az első szám ötszörösének és a másik szám háromszorosának összegét adja; továbbá a második szám 1-gyel nagyobb, mint az első. Melyik ez a két szám?

Kidolgozás:

Az első szám $= x$
A másik szám $= x + 1$

B. m.: J. m.:
$$(5x)^2 - [3\,(x + 1)]^2 = 5x + 3\,.\,(x + 1)$$

Számítások.

Eredmény: Az első szám $= 2$ (vagy $\frac{3}{8}$), a másik szám $= 3$ (vagy $\frac{5}{8}$).

9., (Összefüggés szöveg szerint, de képlet felhasználásával.) Valamely geometriai haladvány negyedik és első tagjának különbsége úgy aránylik a második és első tag különbségéhez, mint 7 : 1 ; az első, második és harmadik tag összege 63. Melyik ez a geometriai haladvány?

Kidolgozás:

A geometriai haladvány előállításához az első tag (a) és a hányados (q) ismerete szükséges, tehát:

$a = x$

$q = y$

$(a_4 - a_1):(a_2 - a_1) = 7:1$

$a_1 + a_2 + a_3 = 63$

	B. m.:	J. m.:
	$(aq^3 - a):(aq - a) =$	$7:1$
	$a + aq + aq^2 =$	63
	$(xy^3 - x):(xy - x) =$	$7:1$
	$x + xy + xy^2 =$	63

Számítások.

Eredmény: *a = 9, q = 2 (vagy —3), a haladvány: 9, 18, 36, 52, vagy 9, —27, 81, —243.*

(Ezen a fokon már megtarthatjuk a keresett számok eredeti betűjelét is, vagyis külön x, y bevezetése elmaradhat és a kérdést így jelezhetjük: a = ?, q = ?)

Utólag is erősíthetjük növendékeinkben az összefüggés meglátásának érzékét az ú. n. próbák által. Pajor is azt a tanácsot adja: „Ha valami nem világos, gyakorlati példán próbáld elképzelni!“ Ha a gyakorlati példa már a találgatásnál ennyire hatékony, mennyire értékes lehet akkor, ha az érdeklődés középpontjában álló gyakorlati példával, az elvégzett munka eredményével igazolhatja okoskodása helyességét a tanuló. Ezért lehetőleg mindig végeztessük el növendékeinkkel a megoldás próbáját. Jó, ha ilyenkor is ragaszkodunk a baloldali és a jobboldali mennyiség külön előállításához. A következetesség egymagában is a leghatásosabb nevelő eszköz.

Érzem, hogy a kérdésnek sok vonatkozását lehetne még feltárni. Hiszen az egyenletprobléma tengelykérdése a középiskolai matematikai oktatásnak. Végigkíséri a tanulót minden osztályon keresztül egészen az érettségi vizsgálatig. Hozzászólásommal azonban első sorban is helyeselni óhajtottam Pajor Elemér kitűnő diagnózisát és magam is gyógyszert kerestem. Kartársam az eredmény fokozása érdekében megjelölte a *beláttatásra* vezető utakat, én csak az eszközök számát véltem növelni azzal, hogy a rendszeres munkára való *szoktatásra* hívom fel a figyelmet. Minél több oldalról világítjuk meg az iskolai munka egyes kérdéseit, az ifjúságnak annál nagyobb rétegét tudjuk az oktatónevelő tanítás áldásaiban részesíteni.

Gáspár Gyula.