

MAGYAR MATEMATIKUSOK EREDMÉNYEI A FOURIER-SOROK ÉS  
 ÁLTALÁNOS ORTOGONÁLIS SOROK KONVERGENCIÁJÁNAK ÉS  
 SZUMMÁLHATÓSÁGÁNAK ELMÉLETÉBEN 1945 ÓTA

Móricz Ferenc

matematika-fizika szakos hallgató

BOLYAI INTÉZET

A magyar matematikusok jelentős eredményeket értek el a címben jelölt zett matematikai diszciplínában. Tekintettel a tárgy kereteire, eleve le kellett mondanunk a teljességről. Csak a fontosabb eredmények összefoglalására szorítkozunk, az approximáció elméletéhez tartozó ill. a Fourier-integrálokra vonatkozó eredményekkel nem foglalkozunk. A könnyebb áttekinthetőség végett az eredményeket tárgykörök szerint tagoltuk.

I. FOURIER-SOROK

A. KOLMOGOROV, G. SELIVERSTOFF és A. PLESSNER ismert tétele szerint az  $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$  függvény

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\left[ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \right]$$

Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál, ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \log n < \infty$$

együtthatófeltétel teljesül. E tétel nagy jelentősége ellenére nem volt ismeretes, hogy a kifejtett függvény milyen strukturális tulajdonságai biztosítják ezen feltétel teljesülését. ALEXITS GYÖRGY-nek sikerült a fenti Kolmogorov-Seliverstoff-Plessner-féle együtthatófeltétellel egyenértékű strukturális konvergenciafeltételt adni. Részletesen, a fenti együtthatófeltétel olyan pozitív, monoton növekvő  $\lambda(x)$  függvény létezésével egyenértékű, melyre

$$a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \lambda(x)} < \infty$$

és

$$b) \omega_2(d, f; 0, 2\pi) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(1/d)}}\right)$$

fennállnak. (Általánosan az  $f(x) \in L^p(\alpha, b)$  függvény  $p$ -edik integrálmodulusa ( $p \geq 1$ )

$$\omega_p(d, f; \alpha, b) = \sup_{|h| \leq d} \left\{ \int_{\alpha}^b |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

A tétel egyszerű alkalmazása mutatja, hogy a Fourier-sorok majdnem mindenütt konvergál, ha az

$$\omega_2(d, f; 0, 2\pi) = O\left((\log 1/d)^{-\frac{1}{2} - \varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0)$$

feltétel teljesül. ALEXITS eredménye könnyen lokalizálható. Legyen  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  és  $(c, d) \subseteq (0, 2\pi)$ . Ha  $f(x) \in L^2(c, d)$  és továbbá b) helyett

$$\omega_2(d, f; c, d) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(1/d)}}\right)$$

teljesül, akkor  $f(x)$  Fourier-sora  $(c, d)$ -ben majdnem mindenütt konvergál. A lokális konvergenciafeltétel tehát egyáltalán nem követeli meg  $f(x)$   $L^2$ -integrálhatóságát  $(c, d)$ -n kívül, ezért akkor is alkalmazható, ha a  $\sum (a_n^2 + b_n^2)$  sor divergens.

RÉNYI ALFRED dolgozatában<sup>2</sup> a Fourier-sorok szummálhatóságára vonatkozó klasszikus Fejér-Lébesgue-féle tételt terjeszti ki Cauchy-Fourier-sorokra.

Fourier-sorok erős szummálhatóságához kapcsolódik TURÁN PÁL egyik dolgozata<sup>3</sup>. Ismeretes, hogy az  $f(x) \in L(0, 2\pi)$  függvény Fourier-sorát  $r$ -edrendben erősen szummálhatónak, röviden  $H_r$ -szummálhatónak ( $r > 0$ ) nevezzük valamely  $x_0$  pontban, ha fennáll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_{\nu}(f; x_0) - f(x_0)|^r = 0$$

ahol  $s_{\nu}(f; x_0)$  a Fourier-sor  $\nu$ -edik részletösszege. Ismert az is, hogy ha  $f(x)$  folytonos  $x_0$ -ban, akkor Fourier-sora tetszőleges pozitív  $r$ -re  $H_r$  szummálható. TURÁN megmutatja, hogy ez nem mindig igaz, ha a fenti relációban a rögzített  $r$ -et

pozitív számok monoton  $\infty$ -be növekvő  $r(n)$  sorozatával helyettesítjük.

G.H. HARDY és J.E. LITTLEWOOD bizonyították, hogy ha

$f(x) \in L^p(0, 2\pi)$  ( $p > 1$ ) akkor  $f(x)$  Fourier-sora a függvény bármely  $p$ -edrendű Lebesgue-pontjában minden pozitív  $r$  rendben erősen szummálható. (Az  $x \in (\alpha, \beta)$  az  $f(x) \in L^p(\alpha, \beta)$  függvények  $p$ -edrendű Lebesgue-pontja ( $p > 0$ ) ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt = 0$$

Ez a tétel  $p = 1$ -re általában nem érvényes. U. i. HARDY és LITTLEWOOD példát adtak olyan integrálható függvényre, amelynek az  $x = 0$

Lebesgue-pontja, de Fourier-sora ebben a pontban nem  $H_1$ -szummálható, s egyuttal felvetették a következő kérdést: tetszőleges integrálható függvény Fourier-sora erősen szummálható-e majdnem mindenütt egy bizonyos rendben. J. MARCZINKIEWICZ adott először pozitív választ erre a kérdésre, megmutatta, hogy integrálható függvény Fourier-sora majdnem mindenütt  $H_2$ -szummálható. Később, A. ZYGMUND bizonyította, hogy integrálható függvény Fourier-sora minden  $r$  rendben ( $r > 0$ ) erősen szummálható majdnem mindenütt.

Mivel HARDY és LITTLEWOOD példája szerint integrálható függvény Fourier-sora a függvény valamely Lebesgue-pontjában nem szükségképpen  $H_1$ -szummálható, és így annál inkább nem  $H_2$ -szummálható, ezért felvetődik az a kérdés, hogy megadható-e olyan, aránylag egyszerű analitikus reláció, amely a) integrálható függvény esetén majdnem mindenütt teljesül és b) tetszőleges  $x$  pontban való fennállásából következik a függvény Fourier-sorának  $H_2$ -szummálhatósága ebben a pontban. TANDORI KÁROLY közölte ilyen relációt egyik dolgozatában<sup>4</sup>, megmutatva, hogy integrálható  $f(x)$  függvényre majdnem minden  $x$  pontban  $k(>0)$ -ban egyenletesen teljesül:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2 + hk} \int_{-h}^h |f(x+u) - f(x)| du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v) - f(x)| dv = 0 \quad (h > 0)$$

és ennek egy  $x$  pontban való fennállásából következik  $f(x)$  Fourier-sorának  $H_2$ -szummálhatósága ugyanebben a pontban.

Fourier-sorok szummációjának az elméletébe vág SZÓKEFALVI

NAGY BÉLA több dolgozata<sup>5,6,7,5</sup>-ben általánosítja HILLE és TAMARKIN eredményét, és olyan tételt ad, amely magában foglalja NIKOLSKY egy előző tételét, legalább is az elegendő feltételt illetően. Legyen

$$\Lambda = (\lambda_{nk}) \quad (n=0,1,\dots; \quad k=0,1,\dots,n; \quad \lambda_{n0}=1)$$

valós vagy komplex számokból álló végtelen trianguláris mátrix. A  $2\pi$  szerint periódikus, integrálható  $f(x)$  függvény Fourier-sorából képezzük a

$$G_n(x) = G_n(\Lambda, f; x) = \lambda_{n0} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

«közepet». A  $\Lambda$  mátrixot  $F$  típusúnak nevezzük, ha a  $G_n(x)$  közepek  $f(x)$ -hez konvergálnak a függvény minden Lebesgue-pontjában, és ha ez a konvergencia egyenletes minden olyan intervallum belsejében, ahol a függvény folytonos. A szummáció Fejér-féle klasszikus módszere esetén  $F$  típusu  $\Lambda$  mátrix lép fel, nevezetesen  $\Lambda = (1 - k/(n+1))$  az  $r$ -edrendű ( $r > 0$ ) Cesaro-közepekkel való összegezés esetén pedig ez a mátrix

$$\Lambda = (A_{n-k}^{(r)} / A_n^{(r)}) \quad \text{ahol} \quad A_m^{(r)} = \binom{r+m}{m}$$

SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA bebizonyítja, hogy  $\Lambda$  mátrix  $F$  típusu, ha fennállnak a következő relációk:

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 1$  minden rögzített  $k$ -ra,

(B)  $\sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{i=n-k}^n \frac{n-k}{i} \right) |\Delta_{nk}^2| = O(1)$ ,

ahol  $\Delta_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2}$  ( $\lambda_{n,n+1} = 0$ ).

(B) helyettesíthető a (B')  $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \log \frac{n}{n-k} |\Delta_{nk}^2| = O(1)$

feltétellel.

Dolgozatában<sup>6</sup> SZÓKEFALVI-NAGY Béla a konjugált sort vizsgálja hasonló szempontból.

Az  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Trigonometrikus sor konjugált sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

A valós vagy komplex számokból álló  $\Lambda = (\lambda_{nk})$  trianguláris mátrixot

$\tilde{F}$  típusúnak nevezzük, ha a konjugált sor

$$\tilde{G}_n(f; x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

közepi az

$$\tilde{f}(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}t \, dt \quad (\varepsilon > 0)$$

konjugált függvényhez konvergálnak minden olyan  $x$  pontban, amelyben ez létezik és amely a függvénynek Lebesgue-pontja. SZÖKEFALVI-NAGY BÉLA bizonyítja, hogy a  $\Delta$  mátrix  $\tilde{F}$  típusú, ha teljesül a fenti (A) és továbbá (B) helyett a

$$(\tilde{B}) \quad \sum_{k=0}^{v-1} (k+1) (\log \frac{n}{k+1}) |\Delta_{nk}^2| + \sum_{k=v}^{n-1} (n-k) (\log \frac{n}{n-k}) |\Delta_{nk}^2| = O(1)$$

feltétel, ahol  $v = [\frac{1}{2}n]$

SZÖKEFALVI-NAGY BÉLA<sup>7</sup> dolgozatában szükséges feltételeket állapít meg arra vonatkozóan, hogy minden folytonos  $f(x)$  függvényre a  $\tilde{G}_n(f; x)$  közepek a konjugált sor

$$\tilde{G}_n^*(f; x) = \sum_{k=1}^n (1 - k/(n+1)) (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

$(c, 1)$ -közepeivel mindenütt ekvikonvergenssek legyenek.

Legyen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n=0, 1, \dots)$$

illetve

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

a  $(0, \pi)$  intervallumon értelmezett és integrálható  $f(x)$  függvény szinusz- ill. szinusz-sora. Ismeretes, hogy a  $\sum b_n/n$  sor mindig konvergens, de a  $\sum a_n/a$  csak akkor, ha a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{dx}{x} \int_0^x f(t) dt \quad (\varepsilon > 0)$$

határérték létezik és véges. (HARDY és LITTEWOOD) Ehhez a problémakörhöz kapcsolódik SZÖKEFALVI-NAGY BÉLA<sup>8</sup> dolgozata. Legyen  $f(x)$  a  $(0, \pi)$ -ben csökkenő és alulról korlátos, de nem szükség-

képpen  $L$ -integrálható függvény. Csak  $xf(x)$  integrálhatóságát tételezzük fel. Ekkor  $f(x)$  formálisan  $\sum b_n \sin nx$  szinusz-sorba fejthető. SZÖKEFALVI-NAGY BÉLA bizonyítja, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1)$$

sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha  $x^{\sigma-1} f(x) \in L(0, \pi)$

Hasonló eredmény érvényes az  $f(x)$  koszinusz-sorára is, csak a  $\sigma=1$  esetében  $f(x)/\log x$   $L$ -integrálhatósága adódik szükséges és

elegendő feltételként.

## 2. ORTOGONÁLIS POLINOMSOROK

Legyen  $\alpha(x)$  a véges  $(a, b)$  intervallumon értelmezett, nemcsökkenő korlátos függvény, amely végtelen sok különböző értéket vesz fel. Jelölje  $\{p_n(x)\}$  azt a polinomrendszert, amely az  $\{x^n\}$  hatványrendszerből keletkezik, ha ezt az  $(a, b)$  alapintervallumon az  $\alpha(x)$ -re vonatkozólag E. SCHMIDT eljárásával ortogonalizáljuk. Azaz  $p_n(x)$   $n$ -edfoku, pozitív főegyütthatója polinom, és

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x) d\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } m \neq n \\ 1 & \text{ha } m = n \end{cases}$$

Ha  $f(x) \in L^2_\alpha(a, b)$  akkor a

$$c_n = \int_a^b f(x)p_n(x) d\alpha(x) \quad (n=0, 1, \dots)$$

együtthatókkal képezett

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

sort az  $f(x)$  függvény  $\{p_n(x)\}$  rendszer szerinti ortogonális sor-

fejtésének nevezzük. Ha  $\alpha(x)$  abszolút folytonos, akkor a  $w(x) = \alpha'(x)$  függvényt, amely majdnem mindenütt pozitív és integrálható, súlyfüggvénynek nevezzük. A  $w(x)$  súlyfüggvényhez tartozó  $\{p_n(x)\}$  polinomrendszer ortogonalitási és normáltsági feltétele:

$$\int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n \\ 1, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

a  $c_n$  együtthatókat pedig a

$$c_n = \int_a^b f(x)p_n(x)w(x)dx \quad (n=0, 1, \dots)$$

integrálok adják, ahol  $f(x) \in L^2_w(a, b)$

SZÜKEFALVI-NAGY BÉLÁNAK sikerült a Fourier-sorokra vonatkozó KOLMOGOROV-SELIVERSTOFF-PLESSNER-féle tételt ortogonális polinomrendszerek igen tág osztályára bizonyítani<sup>9</sup>. Előzőleg már ALEXITS megmutatta, hogy egy  $w(x) > 0$  súlyfüggvényre vonatkozólag ortonormált  $\{p_n(x)\}$  polinomrendszerre érvényes a KOLMOGOROV-

SELIVERSTOFF-PLESSNER-féle tétel, ha a súlyfüggvény is, még a polinomrendszer is korlátos :

$$a) \quad 0 < w(x) \leq W$$

$$|p_n(x)| \leq K \quad (\alpha \leq x \leq \beta, n=0,1,\dots)$$

ahol  $W$  és  $K$  állandók.

E feltételek teljesülnek például a Legendre-féle polinomok esetében (ekkor  $w(x)=1$ ). De nem teljesülnek például a Csebisev-féle polinomok esetében (ekkor  $w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$  és ez nem korlátos). Ez a tény kívánatosá tette ALEXITS tételének olyan esetekre való kiterjesztését, amelyekben az a)-b) korlátossági feltételek nem szerepelnek. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA megmutatja, hogy ilyen kiterjesztés lehetséges : az a) feltétel teljesen elejthető és a b) feltétel is enyhíthető. U. i. bizonyítja a következőt : ha az  $w(x)$  -re vonatkozólag ortogonális és normált  $\{p_n(x)\}$  polinomrendszer a  $(c,d) \subseteq (\alpha,\beta)$  intervallum belsejébe eső minden zárt intervallumon egyenletesen korlátos és

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty$$

akkor a  $\sum c_n p_n(x)$  ortogonális polinomsor  $(c,d)$ -n  $w(x)$ -majdnem mindenütt konvergál. Hogy itt a  $\log n$  "konvergencia-szorító" javítható -e, az még a Fourier-sorok esetén is nyitott kérdés. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA tétele alkalmazható minden

$$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (\alpha > -1, \beta > -1)$$

súlyfüggvényhez tartozó  $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$  polinomrendszerre, azaz minden Jacobi-féle normált ortogonális polinomrendszerre.

Ortogonalis polinomrendszer szerinti kifejtés konvergenciájára vonatkozó strukturális feltétel megállapítását tűzte célul ALEXITS GYÖRGY egyik dolgozatában<sup>10</sup>. Legyen  $w(x) \in (-1,1)$  intervallumon értelmezett, a

$$0 < w(x) \leq W(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

feltételnek elegendő súlyfüggvény és  $\{p_n(x)\}$  a  $w(x)$ -re vonatkozólag ortonormált polinomrendszer. A következő tétel ugyancsak ALEXITS által Fourier-sorokra /1/-ben bizonyított eredmény kiter-

tesztése. Az  $f(x) \in L^2_w$  függvény  $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$  ortogonális kifejtése egy teljesen a  $(-1, 1)$  belsejében fekvő  $(c, d)$  részintervallumban majdnem mindenütt konvergál, ha a  $p_n(x)$  ortogonális polinomok  $(c, d)$ -n összességükben korlátosak és található olyan monoton növény  $\lambda(x)$  függvény, amelyre

$$a) \int_1^\infty \frac{dx}{x \lambda(x)} < \infty$$

és az  $f(x)$  folytonossági modulusa teljesíti a

$$b) \omega(\delta, f; c, d) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(\delta)}}\right) \text{ feltételt.}$$

(Az  $f(x)$  függvény folytonossági modulusa :

$$\omega(\delta, f; c, d) = \sup_{x, x+h \in [c, d]} |f(x+h) - f(x)|, \quad |h| \leq \delta$$

Egy másik dolgozatában ALEXITS GYÖRGY a  $w(x)$  súlyfüggvényre vonatkozólag ortonormált  $\{p_n(x)\}$  polinomrendszer szerinti  $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$  ortogonális kifejtés konvergencia problémáját visszavezeti az  $f(\cos \theta), \theta = \arccos x$  függvény Fourier-sorának vizsgálatára.

A Fourier-sorok elméletéből ismert Dirichlet-Jordan- és Hardy-Littlewood-féle konvergenciakritériumokat terjeszti ki ortogonális polinomfejtések elég tág osztályára FREUD GÉZA egyik dolgozata<sup>12</sup>. Jelentsenek  $k_1, k_2, \dots$  pozitív abszolút konstansokat. Teljesítse a  $w(x)$  pozitív súlyfüggvény a

$$w(x) \leq k_1 (1-x^2)^{-k_2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

feltételt, és a megfelelő  $\{p_n(x)\}$  ortonormált polinomrendszerre

$$|p_n(x)| \leq k_2 (1-x^2)^{-k_2} \quad (-1 \leq x \leq 1; n=0, 1, \dots)$$

(A  $\{p_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$  Jacobi polinomok kielégítik ezeket a feltételeket.) Ekkor tetszőleges korlátos változású  $f(x)$  függvény  $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$

ortogonális kifejtése az  $f(x)$  minden  $x = \xi$  folytonossági pontjában  $f(\xi)$ -hez tart. Továbbá, a konvergencia minden olyan intervallum belsejében egyenletes, ahol  $f(x)$  folytonos. (A Dirichlet-Jordan-féle kritérium általánosítása) A Hardy-Littlewood-féle kritérium általánosítása a következőképpen fogalmazható: a  $w(x)$  súlyfüggvényre és a  $\{p_n(x)\}$  ortonormált rendszerre vonatkozó fenti

feltételek mellett  $f(x)$  ortogonális kifejtése valamely  $x = \xi$  pontban  $f(\xi)$ -hez tart, ha egy alkalmas pozitív  $\sigma$ -val

$$c_n = O(n^{-\sigma})$$

és

$$f(\xi+h) - f(\xi) = O\left(\frac{1}{\log^{1/|h|}}\right)$$

Ortogonalis polinomsorok abszolút konvergenciájának elméletébe vág FREUD GÉZA második dolgozata<sup>13</sup>, amelyben S.N. BERNSTEIN, S. B. STEČKIN és ALEXITS eredményeit általánosítja. Megmutatja, hogy az ott szereplő tételekben a  $\{p_n(x)\}$  ortonormált polinomrendszer egyenletes korlátossága helyettesíthető a

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n [p_\nu(x)]^2 = O(n)$$

gyengébb feltétellel. Bizonyítja továbbá, hogy ez teljesül, ha a  $w(x)$  súlyfüggvény az  $x$  pont környezetében pozitív korlát fölött marad. Folytonos  $f(x)$  függvény ortogonális kifejtésének abszolút konvergenciájára az

$$\omega^*(d; f) = \max_{|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq d} |f(\cos \vartheta_1) - f(\cos \vartheta_2)|$$

„trigonometrikus folytonossági modulus” felhasználásával ad könnyen áttekinthető feltételt. Ha az  $f(x)$  függvényre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^*(\frac{1}{n}; f)}{\sqrt{n}} < \infty$$

akkor az  $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$  kifejtés abszolút konvergál minden olyan pontban, ahol (1) teljesül. Ez STEČKIN Fourier-sorokra vonatkozó tételének általánosítása.

FREUD GÉZA ortogonális polinomrendszer szerinti kifejtésből tagonkénti differenciálással nyert aprt vizsgálja<sup>14</sup> dolgozatában. Legyen  $f(x)$  a véges  $(a, b)$  intervallumon  $k$ -szor folytonosan differenciálható függvény, és legyen  $\{p_n(x)\}$  a  $w(x)$  súlyfüggvényre vonatkozólag ortonormált polinomrendszer  $(a, b)$ -n. Az  $f(x) \sim \sum c_n p_n(x)$  ortogonális kifejtésből formális, tagonkénti differenciálással keletkezett

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n^{(h)}(x)$$

sor (a  $w(x)$  speciális választásától eltekintve) nem ortogonális sor. Így az ortogonális sorok vizsgálatánál szokásos módszereket nem lehet minden további nélkül erre a sorra alkalmazni. FREUDNAK mégis sikerült bizonyítani a következőt: ha a  $(c, d) \subseteq (a, b)$  részintervallumban a  $w(x)$  súlyfüggvény pozitív korlát felett marad, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(\frac{1}{n}, f^{(k)})}{\sqrt{n}}$$

sor konvergenciája, ahol  $\omega(d, f^{(k)})$   $f^{(k)}(x)$  folytonossági modulusa  $(c, d)$ -ben, biztosítja a  $k$ -szor tagonként differenciált sor egyenletes és abszolút konvergenciáját  $(c, d)$  minden belső részintervallumban, és a formális  $k$ -szoros differenciálással nyert sor összege  $(c, d)$ -ben az  $f^{(k)}(x)$ .

TANDORI KÁROLY a Fourier-sorok erős szummációjára vonatkozó Hardy-Littlewood-féle tételt átviszi ortogonális polinomsorokra<sup>15</sup> dolgozatában. Ha a  $\{p_n(x)\}$  polinomrendszer egy  $(c, d) \subseteq (a, b)$  részintervallumon egyenletesen korlátos és  $f(x) \in L_w^2(a, b)$  akkor  $f(x)$  kifejtése  $(c, d)$ -n majdnem mindenütt  $H_2$ -szummálható. Ha a  $\{p_n(x)\}$  rendszer  $(c, d)$ -n egyenletesen korlátos és a  $w(x)$  súlyfüggvény ebben az intervallumban felülről korlátos, akkor tetszőleges, a  $(c, d)$ -n folytonos függvény kifejtése egyenletesen  $H_2$ -szummálható minden  $(c+d', d-d')$  részintervallumon ( $d' > 0$ )

SZÓKEFALVI-NAGY BÉLÁTÓL származik a következő megjegyzés: ha a  $w(x)$  súlyfüggvény pozitív mértékű  $M \subseteq (c, d)$  halmazon válik zéróvá, akkor a  $\{p_n(x)\}$  rendszer nem lehet egyenletesen korlátos  $(c, d)$ -n.

TANDORI tételét általánosítja FREUD GÉZA<sup>16</sup>, megmutatva, hogy az előző tételben a  $\{p_n(x)\}$  rendszer egyenletes korlátossága helyettesíthető a /13/-ban említett gyengébb (I) követelménnyel.

Enek jelentősége többek között abban van, hogy (1) már teljesül, ha a  $W(x)$  súlyfüggvény az  $x$  pont környezetében majdnem mindenütt pozitív korlát felett marad. (1) fennállását vizsgálja FREUD GÉZA<sup>17</sup> dolgozatában is.

Ugyancsak ortogonális polinomsorok erős szummálhatóságára vonatkozik TANDORI KÁROLY egy másik dolgozata<sup>18</sup>, amelyben Hardy Littlewood-Paley tételét viszi át ortogonális polinom-sorokra. Bebizonyítja, hogy ha  $f(x) \in L^2_\omega(a, c)$ ,  $f(x) \in L^p_\omega(c, d)$  ( $1 < p$ )  $f(x) \in L^\infty_\omega(d, b)$  és az  $\omega(x)$  eloszlásfüggvényre vonatkozóan ortonormált  $p_n(x)$  polinomok  $(c, d)$ -n egyenletesen korlátosak, akkor  $f(x)$  kifejtése  $(c, d)$ -n  $\omega$ -majdnem mindenütt  $H_r$ -szummálható ( $r > 0$ ). Ez a tétel szóról-szóra érvényes, akkor is, ha a  $H_r$ -szummálhatóságot az általánosabb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n^{(s)}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(\alpha-1)} |s_\nu(f; x) - f(x)|^s = 0 \quad (\alpha > 0, s > 0)$$

relációval helyettesítjük, ahol  $s_\nu(f; x)$  az  $f(x)$  kifejtésének  $\nu$ -edik részletösszege.

### 3. ÁLTALÁNOS ORTOGONÁLIS SOROK

Legyen  $\{\varphi_n(x)\}$  ortogonális és normált rendszer a véges  $(a, b)$  intervallumon, azaz

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq n \\ 1, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

D. MENSOV és K. RADEMACHER bizonyították a következő alapvető tételt: ha valós számok tetszőleges  $\{a_n\}$  együtthatósorozata teljesíti az u.n. Mensov-Rademacher-féle feltételt

$$(2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty,$$

akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

ortogonális sor az alapintervallumban majdnem mindenütt konvergens

minden  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszer esetén, MENSOV megmutatta azt is, hogy a (2) feltétel általában nem gyengíthető, abban az értelemben, hogy a  $\{\log n\}$  faktorsorozatot nem helyettesíthetjük egy, lassabban  $\infty$ -be növekvő  $\{W(n)\}$  számsorozattal. Érvényes u.i. a Mensov-tétel: ha a  $\{W(n)\}$  pozitív számsorozatra

$$W(n) = o(\log n)$$

akkor megadható olyan  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszer és olyan  $\{a_n\}$  együtthatósorozat, melyre

$$\sum a_n^2 W^2(n) < \infty$$

de a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor az alapintervallumban mindenütt divergál. A bizonyítás finomításával Mensov később megmutatta, hogy a  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszer az alapintervallumban egyenletesen korlátosnak is választható.

Mensov tételének jelentős élesítését bizonyítja TANDORI KÁROLY doktori disszertációjában<sup>19</sup> ha az  $\{a_n\}$  pozitív, monoton nem-növekvő számsorozatra:

$$\sum a_n^2 \log^2 n = \infty$$

akkor megadható (az  $\{a_n\}$  sorozattól függő)  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszer, melyre a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  sor az alapintervallumban mindenütt divergál. Az itt szereplő  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszer az alapintervallumban egyenletesen korlátosnak is választható. TANDORI megmutatja, hogy ez a tétel a Mensov-tételt is magába foglalja. TANDORI tételéből adódik, hogy pozitív, monoton nem-növekvő  $\{a_n\}$  együtthatósorozatra a (2) Mensov-Rademacher-féle feltétel nemcsak elegendő, de szükséges is ahhoz, hogy a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor minden  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszerre az alapintervallumban majdnem mindenütt konvergáljon.

KACZMARZ-tól származik a Mensov-Rademacher-féle tétel következő általánosítása: ha a  $\{\lambda(n)\}$  pozitív, monoton  $\infty$ -be növekvő faktorsorozatra és a  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszer

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt \quad (n=0,1,2,\dots)$$

Lebesgue-függvényeire

$$L_n(x) = O(\lambda(n)) \quad (a \leq x \leq b; n=0,1,2,\dots)$$

akkor a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor majdnem mindenütt konvergál minden olyan  $\{a_n\}$  együttthátósorozatra, melyre

$$\sum a_n^2 \lambda(n) < \infty$$

Egy másik dolgozatában<sup>20</sup> TANDORI KÁROLY bizonyítja, hogy az általános esetben ez az eredmény sem javítható.

KACZMARZ az előbbi, ortogonális sorok konvergenciájának elméletében nagy szerepet játszó tételt a fenti formában mondta ki, de hiányosan bizonyította be. Az első helyes bizonyítást erre a tételre ALEXITS GYÖRGY<sup>21</sup> adta. A cesaro-közepre vonatkozó, analóg Kaczmaz-tételt, melynek bizonyításában, KACZMARZ-nál hasonló hiányosság található, TANDORI KÁROLY-nak sikerült először helyesen bizonyítania<sup>22</sup>.

Legyen  $\{\varphi_n(x)\}$  a véges  $(a,b)$  intervallumon ortonormált rendszer és  $f(x) \in L^2(a,b)$  akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

sor, ahol

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n=0,1,2,\dots)$$

az  $f(x)$  függvénynek a  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszer szerinti kifejtésének nevezzük.

Az ortogonális sorok elméletében nagy szerepet játszanak az olyan tételek, amelyekben

$$(3) \quad \sum c_n^2 \lambda(n) < \infty$$

u.n. együttthátófeltételből, ahol:  $\lambda(x)$  bizonyos feltételeknek alávetett függvény, következik a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor konvergenciája ill. szummálhatósága egy  $E$  halmazon. Ilyen típusu Mensov-Rademacher tétele, ahol  $\lambda(n) = \log^2(n)$ . Ha a  $\{c_n\}$  együttthátósorozat

helyett az  $f(x) \in L^2(a,b)$  függvény adott, akkor fontos feladat a (3) együtt-  
hatófeltételnek a függvényre vonatkozó, megfelelő strukturafeltétellel va-  
ló helyettesítése. Ezzel a kérdéssel foglalkozik ALEXITS GYÖRGY és  
KRÁLIK DEZSŐ dolgozata<sup>23</sup>. Vizsgálatunkat az

$$\|f(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \varphi_\nu(x)\|_2 = \left[ \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu^2 \right]^{\frac{1}{2}} = O(\omega_2(\frac{1}{n}, f))$$

feltételt kielégítő  $\{\varphi_n(x)\}$  ortónormált rendszerekre korlátozzák.  
Továbbá (legalább is elég nagy  $x$ -ekre) pozitív, monoton növény,  
alulról konkáv  $\lambda(x)$  függvényekre szorítkoznak. Ha  $f(x)$ -re  
teljesül az

$$\omega_2(d, f; a, b) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(1/d)}}\right)$$

strukturafeltétel egy pozitív, monoton növény  $\Phi(x)$ -szel, melyre

$$\int_1^{\infty} \frac{\lambda'(x)}{\Phi(x)} dx < \infty$$

akkor a (3) együttthatófeltétel teljesül.

Általános ortogonális sorok feltétel nélküli konvergenciájára vo-  
natkozik MENSOV és Orlicz egy tétele, amely szerint, ha

$$\sum |c_n|^{2-\varepsilon} < \infty$$

egy rögzített  $\varepsilon > 0$ -ra, akkor a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor a  
 $\varphi_n(x)$ -ek tetszőleges sorrendje esetén majdnem mindenütt  
konvergál. ALEXITS GYÖRGY vetette fel<sup>24</sup> dolgozatában a követke-  
ző kérdést: milyen feltételek mellett helyettesíthető a rögzített pozitív  
monoton 0-hoz tartó  $\{\alpha_n\}$  sorozattal. Eredménye a következő:  
legyen  $\{|c_{m_n}|\}$  a nem-eltűnő együttthatók monoton csökkenő  
sorozatba rendezése. Ha

$$\alpha_n \geq (4+\varepsilon) \frac{\log \log n}{\log n} \quad (\text{valamely } \varepsilon > 0\text{-ra; } n=2,3,\dots)$$

akkor

$$\sum |c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty$$

-ből következik a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor majdnem mindenütt való konvergenciája a  $\varphi_n(x)$  -ek tetszőleges sorrendje mellett, ALEXITS azt is megmutatta, hogy a  $4+\epsilon$  faktor általában nem élesíthető.

Ismeretes, hogy egy sor  $(C, r)$  -szummálhatóságából ( $r > 0$ ) következik Abel-szummálhatósága. Megfordítva, ha egy négyzetesen integrálható függvény ortogonális kifejtése az alapintervallumban majdnem mindenütt Abel-szummálható, akkor minden  $r > 0$  -ra  $(C, r)$  -szummálható majdnem mindenütt. Így a feltevésekben ill. állításokban a  $(C, 1)$  -szummálhatóság helyettesíthető  $(C, r)$  -szummálhatósággal ( $r > 0$ ) vagy Abel-szummálhatósággal.

MENSOV egyik tétele szerint minden  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszerre a ortogonális sor majdnem mindenütt  $(C, 1)$  -szummálható, ha

$$(4) \quad \sum c_n^2 (\log \log n)^2 < \infty$$

és az általános esetben ez a feltétel nem gyengíthető. TANDORI KÁROLY élesíti Mensov tételét<sup>25</sup> dolgozatában. Ha a  $\{c_n\}$  pozitív együthetősorozatra

$$n c_n^2 \geq (n+1) c_{n+1}^2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

akkor a (4) Mensov-feltétel nemcsak elegendő, de szükséges is ahhoz, hogy minden  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszerre a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor majdnem mindenütt  $(C, 1)$  -szummálható legyen.

ALEXITS GYÖRGY egyik dolgozatában<sup>26</sup> megmutatja, hogy a (4) szummálhatósági feltétel speciális esetekben élesebb feltétellel helyettesíthető, nevezetesen, ha a  $\{c_n\}$  együthetősorozat választását egy megfelelő monoton majoráns sorozattal korlátozzuk. Bizonyítja a következőt: ha  $\{q_n\}$  pozitív számok monoton csökkenő sorozata, melyre

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\sqrt{n}} < \infty$$

és  $c_n = O(q_n)$  akkor a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor majdnem mindenütt  $(C, 1)$  szummálható.

TANDORI ugyancsak /25/--ben bizonyítja ALEXITS azon sejtését, hogy az (5) feltétel nem javítható. Ha  $w(n)$  pozitív számsorozat, melyre

$$\sqrt{n} = o(w(n)),$$

akkor megadható az  $(a, b)$  alapintervallumban olyan  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszer és olyan  $\{a_n\} \in l^2$  (azaz  $\sum a_n^2 < \infty$ ) együttesen atósorozat, melyre

$$\sum \frac{a_n}{w(n)} < \infty,$$

de a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor egy 0-mértékű halmaz pontjainak kivételével seholsem  $(C, 1)$ -szummálható.

Ortogonalis sorok konvergenciájára és  $(C, 1)$ -szummálhatóságára vonatkozóan állapít meg szükséges feltételeket TANDORI KÁROLY<sup>27</sup>-ben. Legyen  $\{a_n\} \in l^2$  adott pozitív számsorozat. Rendeljük minden  $\{n_i\} (0 = n_1 < n_2 < \dots)$  indexsorozathoz az

$$A_k(\{n_i\}) = a_{n_{k+1}}^2 + \dots + a_{n_{k+1}}^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

sorozatot. Jelölje  $I$  az olyan  $\{n_i\}$  indexsorozatok osztályát, melyre az  $\{A_k(\{n_i\})\}$  sorozat monoton nem-növé. TANDORI bizonyítja a következőt: ha a véges  $(a, b)$  intervallumon ortonormált  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszerek mindegyikére a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor majdnem mindenütt konvergens, akkor

$$\sum A_k(\{n_i\}) \log^2 k < \infty$$

minden  $\{n_i\} \in I$  indexsorozatra. Ha az  $\{a_n\}$  együtthatósorozat monoton nem-növé, akkor  $\{n_i = i\} \in I$  és megkapjuk a Mensov-Rademacher-féle TANDORI /19/ dolgozatában adott élesítését. Jelölje  $\bar{I}$  az olyan  $\{n_i\}$  indexsorozatok osztályát, melyre  $\{A_k(\{2^{n_i}\})\}$  monoton nem-növé. Ha a  $\sum a_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor minden  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszerre majdnem mindenütt  $(C, 1)$ -szummálható, akkor

$$\sum A_k(\{2^{n_i}\}) \log^2 k < \infty$$

minden  $\{n_i\} \in \bar{I}$  indexsorozatra. Ha speciálisan az  $\{a_n\}$  sorozatra

$n a_n^2 \geq (n+1) a_{n+1}^2$  ( $n=1,2,\dots$ ) akkor  $\{n_i=i\} \in \bar{I}$  és a Kaczmarsz-Mensov tételnek TANDORI által /25/-ben adott élesítését kapjuk.

A Césaro-közepék becslésével foglalkozott ALEXITS GYÖRGY<sup>28</sup> dolgozatában. Eredményét TANDORI KÁROLY /19/-ben élesítette, megmutatva, hogy négyzetesen integrálható függvényre majdnem mindenütt:

$$G_n^{(r)}(x) = o(\log \log n) \quad (r > 0)$$

Ismeretesek a következő fogalmak: a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor alapintervallumban majdnem mindenütt erősen  $(C,r)$ -szummálható, ha van olyan  $s(x)$  függvény, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n [G_k^{(r-1)}(x) - s(x)]^2 = 0 \quad (r > 0)$$

A  $\sum c_n \varphi_n(x)$  nagyon erősen  $(C,r)$ -szummálható, ha minden  $\{v_n\}$  növény indexsorozatra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n [G_{v_k}^{(r-1)} - s(x)]^2 = 0 \quad (r > 0)$$

majdnem mindenütt. ZYGMUND bizonyította, hogy ha a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor majdnem mindenütt Abel-szummálható, akkor  $\sum c_n^2 < \infty$  már biztosítja minden  $r > \frac{1}{2}$ -re a sor erős  $(C,r)$ -szummálhatóságát majdnem mindenütt. ZALCWASSER vetette fel a kérdést, hogy itt az erős szummálhatóság - legalább is Fourier-sorok esetén - nem helyettesíthető-e a nagyon erős szummálhatósággal. De ezt csak  $r=1$ -re és konvex  $\{v_n\}$  sorozatra tudta bizonyítani. ALEXITS GYÖRGY<sup>29</sup> dolgozatában a kérdésre  $c_n$  nagyságrendjének bizonyos megszorításával igenlően válaszol. ALEXITS szerint, ha a  $\{\lambda_n\}$  a) pozitív, növény számsorozat, b)  $\sum n^{-1} \lambda_n^{-1} < \infty$ ,  $\{n \lambda_n^{-1}\}$  sorozat monoton növény, akkor a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor majdnem mindenütt Abel-szummálhatósága a

$$c_n^2 = o(n^{-1} \lambda_n^{-1})$$

feltétellel együtt biztosítja minden  $r > \frac{1}{2}$ -re a nagyon erős  $(C,r)$ -szummálhatóságot majdnem mindenütt.

TANDORI KÁROLY<sup>30</sup>-ban  $r=1$  esetben Alexits fenti tételét

bebizonyította a c) feltétel nélkül is. Felvethető az a kérdés, hogy négyzetesen integrálható kifejtések esetén a majdnem mindenütt való  $(C, 1)$  -szummálhatóságból következik-e a majdnem mindenütt való nagyon erős  $(C, 1)$  -szummálhatóság is. TANDORI u -gyancsak /30/-ban megad olyan  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszert és  $\{c_n\} \in l^2$  együttthatósorozatot, hogy  $\sum c_n \varphi_n(x)$  -szummálható majdnem mindenütt egy négyzetesen integrálható  $f(x)$  függvényhez, anélkül, hogy nagyon erősen  $(C, 1)$  -szummálható lenne.

A nagyon erős szummálhatóságra vonatkozik még TANDORI KÁROLY egy eredménye. Megmutatja <sup>31</sup>-ben, hogy az ortogonális sor majdnem mindenütt való nagyon erős  $(C, 1)$  -szummálhatóságát a

$$\sum c_n^2 (\log \log n)^2$$

sor konvergenciája már biztosítja.

Az ortogonális sorok konvergenciájának elméletében nagy szerepet játszó Lebesgue-függvények becslésével foglalkozik TANDORI KÁROLY <sup>32</sup> és a már említett /19/ dolgozatában. Ismeretes, hogy ha  $\{\lambda_n\}$  pozitív, nem-csökkenő számsorozat, melyre  $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$  akkor az  $L_n(x)$  Lebesgue-függvényre az alapintervallumban majdnem mindenütt

$$L_n(x) = o(\lambda_n)$$

Ha a  $\{\varphi_n(x)\}$  rendszer az alapintervallumban egyenletesen korlátos, akkor mindenütt

$$L_n(x) = o(\sqrt{n})$$

TANDORI /19/ és /32/-ben megmutatja, hogy az előbbi becslés általában nem finomítható. (Azt, hogy a második becslés nem finomítható, II RADEMACHER mutatta meg.) TANDORI ezekben a dolgozatokban részletesen foglalkozott a  $(C, r)$  -összegezéshez tartozó Lebesgue-függvények nagyságrendjének kérdésével is.

ALEXITS GYÖRGY egyik dolgozatában <sup>33</sup> SALEMNEK a Fourier-sor faktorsorozatokkal való transzformációjára vonatkozó egyes tétel-

lejt terjeszti ki olyan  $\{\varphi_n(x)\}$  ortonormált rendszerekre, amelyekre a

$$K_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt$$

függvények közös ( $X$ -től és  $n$ -től független) korlát alatt maradnak. (A  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor  $\lambda = \{\lambda_n\}$ -transzformáltján a  $\sum \lambda_n c_n \varphi_n(x)$  sort értjük.) Megmutatja, hogy ha  $\sum c_n \varphi_n(x)$  egy  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) osztálybeli függvény sorfejtése, akkor megadható olyan  $\infty$ -be tartó, konkáv  $\{\lambda_n\}$  faktorsorozat, melyre  $\sum \lambda_n$  egy ugyan-csak az osztályhoz tartozó függvény kifejtése. (SALEM ezt csak  $p=1$ -re és Fourier-sorokra bizonyította). Hasonlóan terjeszti ki SALEMNEK a folytonos függvényekre vonatkozó analóg tételét.

Lakunáris sorok elméletébe vág ALEXITS GYÖRGY több dolgozata <sup>34,35,36</sup>. A  $\sum c_n \varphi_n(x)$  sor lakunáris, ha a nem eltűnő  $c_{m_\nu}$  együttthatók  $m_\nu$  indexei úgy következnek egymásra, hogy  $\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} \geq q > 1$ . KOLMOGOROV egyik tétele szerint, ha a  $\sum c_n \varphi_n(x)$  lakunáris sor majdnem mindenütt  $(C, 1)$ -szummálható és  $\sum c_n^2 < \infty$  akkor majdnem mindenütt konvergens is. Alexits /34/-ben általánosítja ezt a tételt, bevezetve a következő fogalmat: legyen  $\{\lambda_n\}$  pozitív nem-csökkenő számsorozat a  $\sum c_n \varphi_n(x)$   $\lambda_n$ -lakunáris, ha a nemeltűnő  $c_{m_\nu}$  együttthatók  $2^n$  és  $2^{n+1}$  közé eső  $m_\nu$  indexeinek száma  $O(\lambda_{2^n})$ . KOLMOGOROV tételének általánosítása ezután így fogalmazható: ha a  $\sum c_n \varphi_n(x) / \lambda_n$  lakunáris sor majdnem mindenütt  $(C, 1)$ -szummálható és  $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$  akkor majdnem mindenütt konvergens.

/34/-ben közölt tételét általánosítja ALEXITS GYÖRGY /35/-dolgozatában. Az ott szereplő  $\sum c_n^2 \lambda_n < \infty$  helyett elegendő a sor konvergenciáját megkövetelnünk. ALEXITS megmutatja, hogy ez a tétel az általános esetben már nem javítható. Ha a  $\{w(n)\}$  pozitív nem-csökkenő sorozatra

$$(\log \log n)^2 \leq w(n) = o((\log n)^2)$$

akkor megadható egy  $\sum c_n \varphi_n(x)$  ortogonális sor a következő tulaj-

donságokkal : 1°  $\lambda_n$  -lakunáris, 2° majdnem mindenütt  $(C, 1)$  -szummálható, 3°  $\sum c_n^2 w(\lambda_n) < \infty$  4° mindenütt divergál.

A /34/-ben értelmezett  $\lambda_n$  -lakunaritási fogalomtól kis sé különböző  $\lambda(n)$ -lakunaritási fogalmat vezet be Alexits György /36/-ban.

Legyen  $\lambda(x)$  pozitív, nem-csökkenő, felülről konkáv függvény, melyre

$$\lambda(x) \leq (x) \quad \text{A } \sum c_n \varphi_n(x) \text{ sor } \lambda(n) \text{ -lakunáris, ha a nem el-}$$

tűnő  $c_{m_p}$  tagok  $n$  és  $2n$  közé eső  $m_p$  indexeinek száma nem haladja meg  $\lambda(n)$  -et. Bizonyítja a következő tételt : ha a

$$\sum c_n \varphi_n(x) \text{ } \lambda(n)\text{-lakunáris sor együtthatóira } \sum c_n^2 < \infty \text{ és}$$

$$c_n = O(q_n) \quad \text{ahol } \{q_n\} \quad \text{pozitív számok olyan}$$

nem-növä sorozata, melyre

$$\sum \frac{\sqrt{\lambda(n)} q_n}{n} < \infty$$

akkor  $\sum c_n \varphi_n(x)$  majdnem mindenütt  $(C, 1)$  -szummálható.

Egyes a Fourier- és a Rademacher-féle rendszer esetén ismert eredményeket általános multiplikatív ortogonális rendszerekre általánosította ALEXITS GYÖRGY /37/ dolgozatában.

Irodalom :

1. G. Alexits : Acta Math. Hung. 4, 95-101, 1953.
2. A. Rényi : Publ. Math. Debrecen I 162-164, 1950
3. P. Turán : Indian Math. Soc. 12 8-12, 1948.
4. K Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 16 65 -73, 1955
5. K Tandori : Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 5 457-465, 1955.
5. Sz. -Nagy B. Acta Sci. Math. Szeged 12 B 204-210, 1950
6. Sz. -Nagy. B. Casopis Pest. Mat. Fyz. 74 210-219 . 1949
7. Sz. Nagy B. Acta Sci. Math. Szeged 13 247-251, 1949-1950.
8. Sz. Nagy B. Acta Sci Math. Szeged 13 113-135. 1949-1950
9. Sz. Nagy B. Math. Nachrichten 4 50-55, 1951
- Sz. Nagy B. Az első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, 1950. aug. 27. szept. 2. Akad. Kiadó, Budapest, 1952 249-253.
10. G. Alexits : Acta Math. Hung. 6. 1-4, 1955
11. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged 12 B 223-225 , 1955
12. G. Freud : Acta Math. Hung. 3 , 89-98, 1952
13. G. Freud, Acta Math. Hung. 4 127-135, 1953
- G. Freud : Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 5. 49-56, 1955
14. G Freud : Acta Sci. Hung. 6 , 221-226, 1955

15. K. Tandori : Acta Math. Hung. 3. 73-82. 1952
16. G. Freud : Acta Math. Hung. 3. 83-88. 1952  
G. Freud : Magyar Tud. Akad. Mat. fiz. Oszt. közl. 3. 507-511. 1953.
17. G. Freud : Acta Math. Hung. 5 291-298. 1954  
G. Freud : Ortogonális polinomokról, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Köz. 5 21-27. 1955.
18. K. Tandori : Acta Math. Hung. 5. 237-253. 1954.
19. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged 18. 57-130. 1957
20. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 20 1-13. 1959.
21. Alexits G. : Az Első Magyar Matematikai Kongresszus közleményei, 1950. aug. 27. -szept. 2. Akad. Kiadó Budapest. 1952. 233-248.
22. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 14 85-95. 1951
23. G. Alexits : Králik D. Acta Sci. Math. Szeged, 18. 131-139. 1957.
24. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged 19 158-161. 1958.
25. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged 18 149-168. 1957.
26. G. Alexits : Acta Math. Hung. 7. 5-9. 1956.
27. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 20 245-251. 1959.
28. G. Alexits : Ann. Soc. Polon. Math. 25. 133-137. 1952
29. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged, 16 127-129. 1955.
30. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 19 18-25. 1958.
31. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 20. 14-18. 1959.
32. K. Tandori : Acta Sci. Math. Szeged, 18. 169-173. 1957
33. G. Alexits : Acta Math. Hung. 2. 1-9. 1951.
34. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged II. 251-253. 1946-1948
35. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged 13 14-17 1949-1950
36. G. Alexits : Acta Sci. Math. Szeged, 18 179-183. 1957
37. G. Alexits : Acta Math. Hung. 8. 303-310. 1957.