Gyengén disztributiv hálók

Huhn András

JATE, Bolyai Intézet

A disztributiv hálók elméletének számos tétele arra mutat, hogy a hálóelméleti disztributivitás egy általánosabb tulajdonságsorozatnak az $n=1$-hez tartozó speciális esete. Példaként Ore egy tételét idézzük a szokásostól kissé eltérő fogalmazásban.

<u>Definició.</u> Ha egy G csoport minden végesen generálható részcsoportja generálható n elemével, akkor azt mondjuk, hogy rang $G \leq n$.

<u>Ore tétele.</u> Ahhoz, hogy rang $G \leq 1$ legyen, szükséges és elegendő, hogy G részcsoporthálója disztributiv legyen.

A következőkben a hálóelméleti disztributivitásnak egy az n természetes számtól függő általánositás-sorozatát fogjuk vizsgálni, amelynek segitségével az idézett tétel és további állitások is könnyen általánosithatók lesznek.

<u>Definició.</u> Egy L hálót n-disztributivnak fogunk nevezni, ha L moduláris és tetszés szerinti elemeire az

$$D_n: \quad x \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i = \bigcap_{j=0}^{n} \Big[x \cup \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i \Big]$$

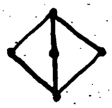
azonosság érvényes. A D_n azonosság duálisával definiáljuk a duális n-disztributivitást.

Az n-disztributiv hálók primitiv osztályát Δ_n-nel, a duálisan n-disztributivokét Δ_n^*-gal fogjuk jelölni.

Gyengén disztributivoknak nevezzük mindazon hálókat, amelyek beletartoznak a Δ_n vagy Δ_n^* osztályok valamelyikébe.

1. <u>A Birkhoff-féle disztributivitási kritérium általánositása és első következményei</u>

<u>Birkhoff tétele</u>. Egy L moduláris háló akkor és csak akkor nem disztributiv, ha tartalmaz az ábrán láthatóval izomorf részhálót /~~ábra a következő oldalon~~/.



A tétel általánositása az

<u>1.1. Tétel</u>. Legyen M moduláris háló és n=1,2,... tetszáleges.
A következő két állitás ekvivalens.
/A/ L nem n-disztributiv.
/B/ Létezik L-ben egy B részháló és egy x elem ugy, hogy B n+1-dimenziós Boole-algebra, és x relativ komplementuma B minden atomjának az [inf B., sup B] intervallumban.

/n+1-dimenziós Boole-algebrának a ⟨o,1....,n⟩ halmaz részhalmazhálójával izomorf hálókat nevezzük./

Könnyü belátni, hogy a feltétel elegendő. A szükségesség bizonyitását a következőkben vázoljuk.

Ha L moduláris, de nem n-disztributiv, akkor léteznek $z, y_0, \dots, y_n$ elemei, amelyekre

$$z \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i \neq \bigcap_{j=0}^{n} \Big[z \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i\Big].$$

(α) Legyenek

$$x = z \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_j = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i, \qquad b_j = \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} a_i \qquad (j = 0, 1, \dots, n),$$

és

$$B = \langle a(P) : P \subseteq \langle 0, 1, \dots, n\rangle\rangle,$$

ahol

$$a(P) = \bigcup_{i\in P} a_i \qquad (\text{ha } P \neq \emptyset),$$

és $$a(\emptyset) = \bigcap_{i=0}^{n} b_i .$$

Bizonyitható, hogy B egy n+1-dimenziós Boole-algebra, azonban x még nem feltétlenül lesz ezen Boole-algebra atomjainak relativ komplementuma. Ezért B-t további két transzformációnak vetjük alá.

(β) Legyen

$$\hat{B} = \langle \hat{a}(P) : P \subseteq \langle 0,1,\dots,n\rangle\rangle ,$$

ahol $\hat{a}(P) = a(P) \cup \bigcup_{i=0}^{n} (x \cap a(i))$ és legyen $\hat{x} = x$,

Legyen továbbá

$$\tilde{B} = \langle \tilde{a}(P) : P \subseteq \langle 0,1,\dots,n\rangle\rangle ,$$

ahol $\tilde{a}(P) = \hat{a}(P) \cap \bigcap_{i=0}^{n} (x \cup a(i)),$

és végül legyen $\tilde{x} = \hat{x} \cap \tilde{a}(0,1,\dots,n)$.

Bizonyitható, hogy $\tilde{B}$ és $\tilde{x}$ már kielégitik a /B/ feltételt.

<u>Következmények</u>

<u>1.2. Tétel.</u> Az n-disztributiv hálókra dualitási elv érvényes:

Az n-disztributiv hálók osztálya megegyezik a duálisan n-disztributivokéval.

A bizonyitás magja a következő segédtétel.

Ha $B = \langle a(P) : P \subseteq \langle 0,1,\dots,n\rangle\rangle$ n+1-dimenziós Boole-algebra egy L moduláris hálóban, ahol a jelöléseket ugy választottuk, hogy

$$a(P) \cup a(Q) = a(P \cup Q) ,$$

és $a(P) \cap a(Q) = a(P \cap Q)$ (ha $P, Q \subseteq \langle 0,1,\dots,n\rangle$),

és x az összes atomok relativ komplementuma az [inf. B, sup B] intervallumban, akkor

$$t_i = \bigcap_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} t_{ij} \quad (\text{ahol} \quad t_{ij} = (x \cap a(i,j)) \cup a(\langle 0,\dots,n\rangle \setminus \langle i,j\rangle))$$

független az i index választásától, relativ komplementuma lesz B valamennyi duális atomjának ugyanazon intervallumban.

1.3. Tétel. Legyen V vektortér egy K test fölött. Ahhoz, hogy dim V $\leq$ n legyen /a dimenziót a szokásos módon lineáris függetlenséggel definiáljuk/, szükséges és elegendő, hogy V altérhálója n-disztributiv legyen.

A bizonyitás könnyen adódik az 1.1. tételből.

1.4. tétel. A $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ primitiv osztályokra

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$$

/A +$\subset$+ jelentése: valódi rész./

2. Az n-dsiztributiv hálók néhány reprezentációja

Ore emlitett tételének általánositása Abel-csoportokra a következő.

2.1. Tétel: Ahhoz, hogy egy G Abel-csoportra rang G $\leq$ n legyen /a korábbi értelemben/, szükséges és elegendő, hogy G részcsoporthálója n-disztributiv legyen.

Definició. Egy A univerzális algebra mindazon részhalmazait, amelyek valamilyen kompatibilis osztályozás egy osztályát alkotják, nevezzük /geometriai analogiák alapján/ lineáris sokaságoknak, és azt a halmazt, amely az összes ilyen tulajdonságu osztályokból valamint az üres halmazból áll, nevezzük az A algebra kongruenciaosztály-geometriájának. jelölése KG/A/.

2.2. Tétel. Ha A kongruenciahálója normális /bármely két kongruenciareláció felcserélhető/ és n-disztributiv, akkor érvényes KG/A/-ban Helly tételének alábbi analogonja.

Ha adott KG/A/-~~kere~~beli lineáris sokaságoknak egy legalább n+1-elemü véges $\mathcal{R}$ rendszere, ugy hogy bármely n+1 $\mathcal{R}$-be tartozó halmaznak van közös pontja, akkor van A-ban olyan pont is, amely minden $\mathcal{R}$-beli halmazban benne van.

/Pontoknak A elemeit nevezzük./

Megjegyezzük, hogy a tétel jóval általánosabban is igaz.

IRODALOM

/1/ Birkhoff, G.: Lattice theory. Amerc. Math. Soc.Coolloquium Publ. New York. 1967.

/2/ Szász, G.: Introduction to lattice theory, 3d ed., Akadémiai Kiadó, 1963.

/3/ Maeda, F.: Kontinuerliche Geometrien, Springer, 1950.

/4/ Cohn, P.M.: Universal algebra, Harper and Row, 1965.

/5/ Suzuki, M.: Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, 1956.

/6/ Wille, R.: Kongruenzklessengeometrien, Springer, 1970.