Társadalmi hálózatok fraktálelemzése a mohó-színezési doboz-lefedési algoritmus segítségével

Simon Levente[1,2]

[1] Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar
[2] Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar

Jelen tanulmányban két erdélyi magyar társadalmi szervezet – a Háromszéki Ifjúsági Tanács (HÁRIT) önkénteshálójának, illetve a Romániai Magyar Közgazdász Társaság (RMKT) szakmai hálózatának– frakálelemzésére vállalkozunk.

Survey-típusú kérdőívvel kérdeztünk rá az aktorok szervezeten belüli aktív együttműködési kapcsolataira, majd a kapcsolatok száma – azaz a csúcspontok fokszáma – alapján meghatározzuk a HÁRIT és az RMKT hálózatainak gócpontjait.

A fraktáldimenzió vizsgálatok során mindkét hálózat esetén először a csúcspontok véletlen sorrendjei szerint implementált mohó színezési doboz-lefedési algoritmust alkalmazunk. Fokszám szerint csökkenő illetve növekvő sorrendbe rendezzük a hálózatok aktorait, majd a csúcspontok ezen sorrendjeire is meghatározzuk a hálózatok dimenzióértékeit.

Az adatközlők teljes egymás közötti hálózatainak vizsgálata után elvégezzük mindkét hálózat legnagyobb összefüggő komponensének fraktálelemzését is.

A doboz-lefedési algoritmus segítségével közelített fraktáldimenzió-értékeket, elméleti modellek – azaz Erdős-Rényi illetve Barabási-Albert hálózatok – különböző paraméterkombinációira kapott dimenzióértékeivel hasonlítjuk össze.

Összegzésként a társadalmi hálózatok és azok legnagyobb összefüggő komponenseinek tipologizálását hasonlítjuk össze.

Kulcsszavak: doboz-lefedési algoritmusok, gócpontok, frakálelemzés, társadalmi hálózatok.

Köszönetnyilvánítás: A szerző megköszöni a lektornak illetve dr. Soós Anna docensnek javaslataikat és a tanulmány szövegének átolvasását. Jelen tanulmány elkészítése alatt a szerző a *Collegium Talentum – A külhoni tehetségekért* ösztöndíjprogram támogatásában részesült. A dolgozat megírásához anyagi támogatást biztosított a Humánerőforrás-fejlesztési operatív program 2007–2013 és az Európai Szociális Alap a „*Minőség, a kiválóság, transznacionális mobilitás a doktori kutatásban*" POSDRU/187/1.5/S/155383 projektből.

Fractal analysis of social networks using the greedy coloring box-covering algorithm

The aim of this paper is to characterize two NGO networks, the volunteering network of the Hungarian Youth Association from Covasna County (HÁRIT) and the professional network of Hungarian Economists' Society of Romania (RMKT). We analyze the fractal properties of these social networks using the greedy coloring box-covering algorithm.

We collected the data of this paper with survey-type collections, whose specially focused on the interactions of the responding members of the NGO’s. Based on their answers we discover the hubs of the RMKT and the HÁRIT.

Firstly, we put the nodes of the networks in random orders and then we approximate the dimension values of them. Moreover, we also put the nodes in descending and ascending order by degree and we approximate the dimension values using these orders too.

Near the fractal analyses of the responding actors’ networks , we also analyze RMKT and the HÁRIT networks’ biggest connected components.

On the other hand, we approximate the dimension values of Erdős-Rényi and Barabási-Albert random graphs for different parameter combinations. We compare the result of the generated graphs with the results gotten for the RMKT and the HÁRIT.

As a conclusion, we compare the numerical results gotten for the social networks and their biggest connected components.

Keywords: box-covering algorithms, hubs, fractal analysis, social networks

Acknowledgement: The author acknowledges the support, the advices and the reading of the paper for the lector and for Anna Soós. During the preparation of this paper the author was supported by the *Collegium Talentum* scholarship program. This work was possible due to the financial support of the Sectorial Operational Program for Human Resources Development 2007-2013, co-financed by the European Social Fund, under the project number POSDRU/187/1.5/S/155383 with the title *“Quality, excellence, transnational mobility in doctoral research”*.

1. BEVEZETÉS

Jelen dolgozatban a Háromszéki Ifjúsági Tanács önkénteshálózatának és a Romániai Magyar Közgazdász Társaság szakmai hálózatának fraktálelemzésére vállalkozunk.

A két erdélyi társadalmi szervezet struktúráját azon survey-típusú kérdőívek eredményei alapján építjük fel, amelyeket 2013-ban töltettünk ki a szervezetek legnagyobb éves rendezvényein. Az V. Háromszéki Szabadegyetem és a XXII. Közgazdász Vándorgyűlés során kapott adatok alapján ismertetjük az adatközlők hálózatát, majd ezen két struktúra fraktáldimenzió-értékét közelítjük a mohó színezési doboz-lefedési algoritmus segítségével.

Továbbá, ismertetjük az Erdős-Rényi illetve a Barabási-Albert gráfmodelleket, majd különböző paraméterkombinációk esetén közelítjük a véletlen hálózatok dimenzióértékeit. A véletlen gráfok esetén kapott numerikus eredményeket összehasonlítjuk a HÁRIT és az RMKT hálózatai esetén kapott eredményekkel. Az eredmények finomításaként a fraktálelemzést elvégezzük mindkét társadalmi hálózat legnagyobb összefüggő komponensére is. A numerikus eredmények alapján Barabási-Albert gráfok segítségével tipologizáljuk a vizsgált legnagyobb összefüggő komponenseket.

2. GÓCPONTOK A HÁRIT ÉS AZ RMKT HÁLÓZATAIBAN

A Háromszéki Ifjúsági Tanács illetve a Romániai Magyar Közgazdász Társaság hálózatainak csúcspontjai egyaránt személyeket jelölnek, lényeges különbség azonban, hogy: amíg a HÁRIT önkéntesei a romániai Kovászna megye magyar ifjúsági közösségeiből érkeznek, addig az RMKT rendszerében Romániai több nagy- és kisvárosából is találunk aktorokat. A hálózatok az alábbiak szerint szerveződnek:

- a Háromszéki Ifjúsági Tanács a Kovászna megyei ifjúsági szerveződések legnagyobb érdekképviseleti szervezete, az önkénteshálót ekképpen a tagszervezetek kapcsolathálóinak összekötéséből építjük fel;
- a Romániai Magyar Közgazdász Társaság a romániai magyar közgazdászok és gazdasági kérdések iránt érdeklődők szakmai és érdekvédelmi szervezete, helyi szervezetei Erdély több városában és Bukarestben működnek. A közösség tevékenységét a Kolozsváron működő központi iroda hangolja össze, így vizsgálataink során e társadalmi szervezet aktorai a helyi szervezetek tagjai lesznek.

A kapcsolathálókra vonatkozó információkat 2013-ban, a szervezetek legnagyobb évente megrendezett rendezvényein gyűjtöttük, amelyek során survey-típusú kérdőívvel kérdeztünk rá az aktorok szervezeten belüli aktív együttműködési kapcsolataira. A hálózatok aktorainak rendszerét az V. Háromszéki Szabadegyetem (2014-től SIC Feszt – Székelyföldi Szabadegyetem néven szervezik meg a rendezvényt) és a XXII. Közgazdász Vándorgyűlés alkalmával történt survey-típusú adatfelvételek alapján (Simon-Szőcs, 2013; Simon-Szőcs, 2015) építjük fel. A HÁRIT esetén 82, az RMKT esetén pedig 62 személy töltötte ki a survey-típusú kérdőívet.

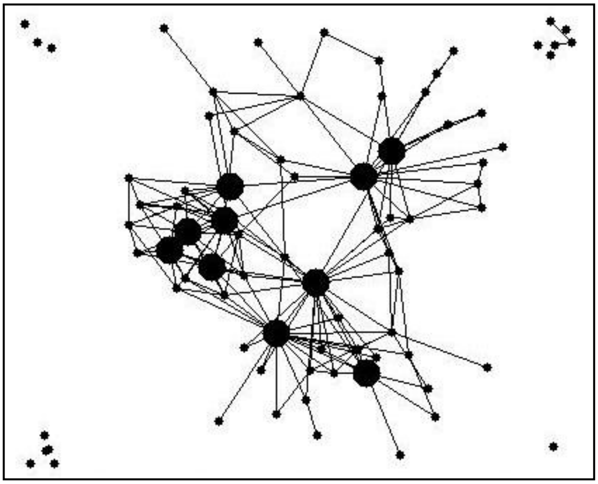
Jelen dolgozatban a adatközlők egymás között hálózatainak fraktálelemzésére vállalkozunk, így a az a HÁRIT esetén egy 82, az RMKT esetén pedig egy 62 csúcspont által alkotott gráfot vizsgálunk. A kérdőívezés során partneri- illetve referenciakapcsolatokra egyaránt rákérdeztünk, amelyek alatt a következőket értjük:

- az adatközlők azon kapcsolatait partneri- vagy mellérendelő kapcsolatok nevezzük, amelyek arra vonatkoznak, hogy kivel dolgozzanak együtt;
- továbbá, amennyiben egy válaszadó valaki tevékenységét referenciaértékűnek érzi a szervezet működése szempontjából, akkor azon kapcsolatot referencia- vagy alárendelő kapcsolatnak nevezzük.

Mivel a doboz-lefedési algoritmusok alapvetően irányítatlan hálózatokkal dolgoznak, ezért mind a partneri-, mind a referenciakapcsolatokra egyaránt irányítatlan kapcsolatokként tekintünk a továbbiakban.

Társadalmi hálózatok megjelenítését leginkább erő-centrikus gráfábrázoló algoritmusok segítségével végezhetjük el. Az egyik legismertebb ilyen algoritmus (Fruchterman-Reingold, 1991) iteratívan generálja ki az ábrázolandó gráf reprezentációját. Fraktálvizsgálatok segítségével társadalmi hálózatok Fruchterman-Reingold algoritmussal való ábrázolása mellett is érvelhetünk (Simon, 2014a), így a következőkben a HÁRIT és az RMKT vizsgált hálózatait ezen algoritmussal ábrázoljuk (1. ábra, 2. ábra). A gráfábrázolásokat és a dolgozatban végzett elemzéseket egyaránt MATLAB-ban (MATLAB, 2007) valósítottuk meg.

1. ábra A Háromszéki Ifjúsági Tanács önkénteshálója.



Forrás: saját szerkesztés

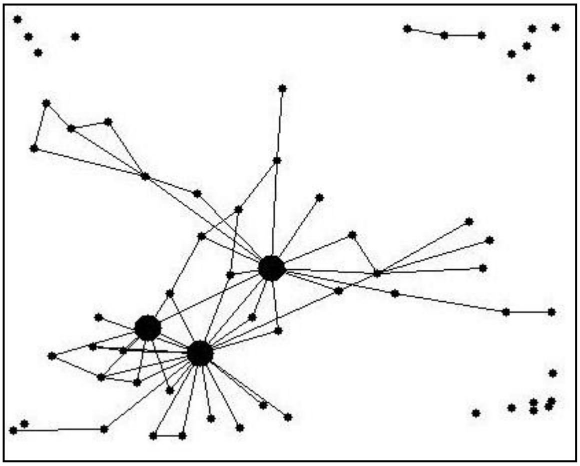
Megjegyzés: a gócpontokat, azaz azon akotorokat, amelyeknek több mint a csúcspontok 10%-ával van kapcsolatuk, nagyobbnak jelöltük.

A dolgozatban egy hálózat azon aktorait nevezzük gócpontoknak, amelyeknek az adott hálózaton belül több mint a csúcspontok 10%-ával van kapcsolatuk. Ilyen gócpontot a HÁRIT önkénteshálóában 10-t, az RMKT aktorainak rendszerében pedig 3-t találunk.

Ezen különbséget a hálózatok gráfsűrűség[19] értékei is mutatják: amíg a HÁRIT hálózatának sűrűsége 0.0531, addig az RMKT hálózatának ezen értéke 0.0338.

[19] Egy rögzített hálózatban a gráfsűrűség alatt a létező kapcsolatok számának és az összes lehetséges kapcsolat arányát értem.

2. ábra Az Romániai Magyar Közgazdász Társaság szakmai hálózata.



Forrás: saját szerkesztés

Megjegyzés: a gócpontokat, azaz azon akotorokat amelyeknek több mint a csúcspontok 10%-ával van kapcsolatuk, nagyobbnak jelöltük.

Ugyanakkor, külön tárgyaljuk a HÁRIT és az RMKT hálózatainak legnagyobb összefüggő komponenseinek fraktálelemzését: a háromszéki önkéntesek hálózatának legnagyobb összefüggő komponensét 69, a közgazdászok szakmai hálózatának legnagyobb összefüggő komponensét pedig 42 csúcspont alkotja.

Jelen dolgozatban a hálózatokat irányítatlan, hurok- és párhuzamos éleket nem tartalmazó gráfokkal modellezzük. Továbbá, a két társadalmi szervezet hálózatainak fraktálelemzését a mohó színezési doboz-lefedési algoritmussal végezzük el a következőkben.

3. FRAKTÁLELEMZÉS A MOHÓ SZÍNEZÉSI DOBOZ-LEFEDÉSI ALGORITMUSSAL

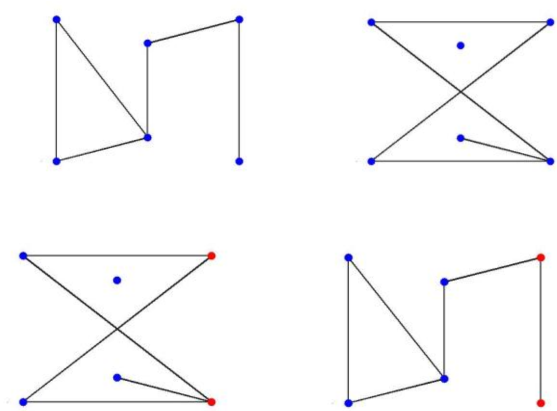
A doboz-lefedési algoritmusok célja a lehető legkevesebb számú rögzített méretű dobozt helyezni a csúcspontokra. Két csúcspont egy rögzített l_B méretű dobozba kerülhet, ha létezik közöttük legfeljebb $l_B - 1$ hosszúságú út. Adott dobozba kerülő csúcspontok mindegyikére kell teljesüljön, hogy bármelyik másik ugyanazon dobozban található csúcsponthoz kell létezzen legfeljebb $l_B - 1$ hosszúságú út.

Továbbá, jelölje N_B egy rögzített gráf lefedéséhez szükséges dobozok számát az l_B függvényében, melynek értékét $l_B = 1$ értéktől az $l_B \le l_B^{\max}$ értékig vizsgáljuk, ahol az $l_B^{\max}$ a gráf átmérője plusz egy. Egyértelmű, hogy bármely gráf esetén, ha $l_B = 1$, akkor mindig n darab doboz szükséges a lefedéshez és ha $l_B = l_B^{\max}$, akkor egyetlen dobozzal lefedhető a gráf.

3.1. A MOHÓ SZÍNEZÉSI ALGORITMUS

Song és munkatársainak tanulmánya (Song et al., 2007) a gráfszínezési problémára vezeti vissza a doboz-lefedést. Egy tetszőleges gráf kiszínezéséhez szükséges színek minimális számának meghatározása polinomiális időben nem megoldható[20], ezért a tanulmány egy polinomiális mohó gráfszínezési algoritmust javasol a csúcspontok színeinek meghatározására.

3. ábra A mohó színezési algortimus lépései egy rögzített gráf esetén az $l_B = 3$ esetben.



Forrás: saját szerkesztés

[20] Vö. Frank, A.: Gráfelmélet, i. m., 6.

A mohó színezési algoritmus adott G gráf esetén gráfkonverzió által szerkeszti meg a G' gráfot, amelyet az alábbi mohó algoritmus lépései alapján színez ki:

- 0. lépés. A G csúcspontjait egy véletlen sorrendbe helyezi az algoritmus.
- 1. lépés. A G' csúcspontjai legyenek a G csúcspontjai. Rögzített l_B dobozméret esetén két csúcspont között akkor húzunk élet, ha a közöttük lévő minimális távolság (a dolgozat ezt a Dijkstra-algoritmussal határozza meg[21]) nagyobb vagy egyenlő, mint l_B.
- 2. lépés. A G' gráf pontjainak kiszínezésére az alábbi mohó gráfszínezést javasolja a tanulmány:
    - az algoritmus megszámozza a G' csúcspontjait és a színeket,
    - a csúcspontokat sorra kiszínezi azon legkisebb indexű színnel, amellyel még nincs a csúcsnak szomszéda kiszínezve.
- 3. lépés. Legyen az ekképpen használt színek száma N_B, amely az l_B rögzített értéke mellett megadja a lefedéshez szükséges dobozok számát.

A doboz-lefedési algoritmussal közel egyenértékű eredményeket kapunk a *Compact-Box-Burning* algoritmus alkalmazása esetén is (Song et al., 2007).

A 3. ábrán egy példa esetén mutatjuk be a mohó színezési algoritmus lépéseit.

Song és munkatásai alapján tetszőleges adott gráf, az l_B és N_B adatokra esetén, amennyiben az N_B a minimális érték, akkor a gráf d_B dimenzióértékére teljesül, hogy

$$N_B \cong l_B^{-d_B},$$

azaz

$$d_B \cong \frac{\log N_B}{\log \frac{1}{l_B}}.$$

A fraktáldimenzió értékének közelítés során az $l_B = 1$-től az $l_B = l_B^{\max}$ értékig sorra rögzítjük l_B értékét és esetenként kiszámoljuk az N_B-t. Az így kapott $\log \frac{1}{l_B}$ és $\log N_B$ adatokra legkisebb négyzetek módszerével egy egyenest illesztünk, amelynek iránytényezőjének tangensét az adott fraktál alakzat dimenziójaként értelmezzük[22].

Mivel a mohó algoritmus véletlen sorrendben fedi le csúcspontokat, ezért Song és munkatásainak tanulmánya a csúcspontok több véletlen sorrendje alapján határozza meg, hogy az l_B különböző értékei esetén minimálisan hány dobozzal fedhető le egy rögzített gráf.

[21] Vö. Frank, A.: Operációkutatás, i. m., 13.
[22] Vö. Falconner, K.: Fractal Geometry…, i. m., 39-58.

3.2. A HÁRIT ÉS AZ RMKT HÁLÓZATAINAK, VALAMINT A LEGNAGYOBB ÖSSZEFÜGGŐ KOMPONENSEK FRAKTÁLELEMZÉSE

Először az adatközlők egymás közötti teljes hálózatára, a csúcspontok $100-100$ véletlen sorrendjeire alkalmazzuk a mohó színezési doboz-lefedési algoritmust, majd ezek eredményei alapján határozzuk meg, hogy l_B különböző értékei esetén minimum hány N_B darab doboz szükséges a gráfok lefedéséhez (1. táblázat).

Továbbá, a hálózatok csúcspontjait fokszám szerint csökkenő illetve növekvő sorrendekbe rendezzük, majd így is meghatározzuk hogy l_B különböző értékei esetén hány N_B.darab doboz szükséges a HÁRIT és az RMKT gráfok lefedéséhez. Ugyanitt megjegyezzük, hogy amennyiben egy hálózatban találhatóak csúcspontok megegyező fokszámértékekkel, akkor a rendezések sem garantálják a determinisztikusságot. Az 1. táblázat eredményei a két társadalmi hálózat csúcspontjainak véletlen sorrendjei, valamint egy-egy fokszám szerint csökkentő illetve növekvő sorrendjeire vonatkoznak.

A mohó színezési algoritmus alkalmazása során kapott eredmények érzékeltetik azt is, hogy a HÁRIT és az RMKT hálózatai nem összefüggőek. Az adatok alapján a HÁRIT hálózata 13, az RMKT hálózata pedig 19 komponensből áll. Ekképpen a dimenzióértékek közelítése során a HÁRIT esetén 1-től 6-ig, az RMKT esetén pedig 1-től 7-ig megy az l_B.

1. táblázat A doboz-lefedéshez szükséges N_B értékek száma az l_B függvényében a HÁRIT és az RMKT csúcspontjainak különböző sorrendjei esetén.

Társadalmi hálózat	Csúcspontok sorrendje	l_B =	1	2	3	4	5	6	7	8
HÁRIT	véletlen	N_B =	82	49	22	16	14	13	13	13
HÁRIT	csökkenő	N_B =	82	56	25	18	15	13	13	13
HÁRIT	növekvő	N_B =	82	49	22	16	14	13	13	13
RMKT	véletlen	N_B =	62	46	26	24	22	21	19	19
RMKT	csökkenő	N_B =	62	47	26	25	22	21	19	19
RMKT	növekvő	N_B =	62	46	26	24	22	21	19	19

Megjegyzés: a számításokat MATLAB-ban végeztük el.

Habár intuíciónk azt mondhatná, hogy először a gócpontokat érdemes lefednünk, a numerikus eredmények éppen ennek ellenkezőjét mondják. Mind a HÁRIT, mind az RMKT hálózatok esetén a csúcspontok véletlen sorrendjeire kapott N_B értékek minimuma megegyezik a fokszám szerinti növekvő sorrendjére alkalmazott mohó színezési algoritmus esetén kapott N_B értékekkel. Ekképpen feltételezhetjük fokszám szerinti növekvő sorrendje szerint alkalmazott mohó színezési algoritmussal gyorsíthatjuk a fraktálelemzéshez használt algoritmust.

A mohó színezési algoritmus alkalmazásával végzett fraktálelemzés eredménye szerint a HÁRIT adatközlőinek teljes egymás közötti hálózata esetén 1.1185, az RMKT ugyanezen módon szerkesztett hálózata esetén pedig 0.6353 lesz a dimenzióérték. Ezen adatokat Erdős-Rényi és a Barabási-Albert gráfok eredményeivel hasonlítjuk össze a következő fejezetben.

Hasonlóan közelítjük a legnagyobb összefüggő komponensek dimenzióértékeit is, amelyeket 69 illetve 42 csúcspont alkot a HÁRIT illetve az RMKT hálózatai esetén. Itt is, akárcsak az adatközlő teljes egymás közötti hálózatai esetén, a HÁRIT hálózatának legnagyobb összefüggő komponense esetén az l_B értéke 1-től 6-ig, az RMKT legnagyobb összefüggő komponense esetén pedig 1-től 7-ig megy. Ekképpen, a legnagyobb összefüggő komponens dimenzióértéke 2.4360 lesz az önkéntesháló esetén és 1.8004 lesz a közgazdász hálózat esetén.

4. VÉLETLEN HÁLÓZATOK FRAKTÁLELEMZÉSE

A dolgozatrészben az Erdős-Rényi illetve a Barabási-Albert gráfmodelleket ismertetjük, majd – a survey-típusú adatközlő számához rögzítve a csúcspontok számát – különböző paraméterkombinációk esetén közelítjük a véletlen hálózatok dimenzióértékeit.

4.1. ERDŐS-RÉNYI HÁLÓZATOK

Erdős Pál és Rényi Alfréd 1959-ben definiált modellje (Erdős-Rényi, 1959) tekinthető a véletlen hálózatok origójának, amellyel egyenértékűt fogalmazott meg Edgar Gilbert is (Gilbert, 1959). Egy $G(n, p)$ Erdős-Rényi paraméterei az n természetes szám, amely a csúcspontok számát jelöli és a p valószínűség, amely szerint minden lehetséges él egymástól függetlenül, a rögzített p valószínűséggel létezik.

4.2. BARABÁSI-ALBERT HÁLÓZATOK

Jobban modellezhetőek társadalmi rendszerek tulajdonságai Barabási Albert-László és Albert Réka preferenciális kapcsolódás (*preferential attachment*) modelljének (Barabási-Albert, 2002) segítségével. A modell egy növekvően épít gráfokat úgy, hogy a csúcspontok egymást követően, rögzített k számú éllel csatlakoznak egy kezdeti m csúcspontból álló hálózathoz. Továbbá, a preferenciális kapcsolódás elve szerint, minden újabb csúcspont csatlakozása esetén a már csatlakozott csúcspontok egy új élének valószínűsége arányos a csúcspont aktuális fokszámával.

4.3. TÁRSADALMI HÁLÓZATOK DIMENZIÓÉRTÉKEI VÉLETLEN HÁLÓZATOK FRAKTÁLELEMZÉSÉNEK KONTEXTUSÁBAN

Jelen dolgozatrészben a HÁRIT és az RMKT teljes egymás közötti hálózatainak és a legnagyobb összefüggő komponensek fraktáldimenzió-értékeit az Erdős-Rényi és a Barabási-Albert modellek kontextusában értelmezzük. A mohó színezési algoritmussal számolva a HÁRIT teljes egymás közötti hálózatának 1.1185, az RMKT hálózatának pedig 0.6353 a dimenzióértéke. Továbbá, a legnagyobb összefüggő komponensek esetén kapott dimenzióértékek: 2.4360 az önkéntesháló és 1.8004 a közgazdász hálózat esetén.

Mivel viszonylag kis véletlen hálózatokkal dolgozunk a következőkben, ezért paraméterkombinációnként a csúcspontok $100-100$ véletlen sorrendjeire közelítjük a dimenzióértéket. Meghatározzuk, hogy az l_B függvényében minimálisan hány dobozzal fedhetjük le a véletlen hálózatokat.

Továbbá, a HÁRIT és az RMKT hálózataihoz hasonlóan, a véletlen hálózatok esetén is érvényesül, hogy ha a csúcspontokat fokszám szerint növekvő sorrendbe helyezzük, akkor a véletlen sorrendek esetén kapott lefedések minimumával közel megegyezően optimális eredményt kapunk (Simon, 2014b).

A HÁRIT és RMKT teljes egymás közötti hálózatainak csúcspontjaiknak számából és sűrűségeikből fakadóan a véletlen hálózatok esetén 82-re illetve egy 62-re rögzítjük a csúcspontok számát, majd lépésről-lépésre csökkentjük a gráfsűrűséget. A legnagyobb összefüggő komponensek esetén pedig 69-re illetve 42-re rögzíjük a véletlen hálózatok csúcspontjainak számát. A numerikus eredményeket a 2. táblázatban közöljük.

Az eredmények alapján egyértelműen kijelenthetjük, hogy a HÁRIT és az RMKT adatközőinek teljes egymás közötti hálózatait a fraktálelemzés szemszögéből nem tipologizálhatjuk Barabási-Albert gráfok segítségével. A Barabási-Albert modell mindig összefüggő gráfokat generál, ugyanakkor a vizsgált két társadalmi hálózat egyike sem összefüggő, így nem összefüggő Erdős-Rényi gráfok segítségével talán jobban jellemezhetjük a HÁRIT és az RMKT teljes egymás közötti hálózatait. Éppen ezért vizsgáljuk külön a társadalmi hálózatok legnagyobb összefüggő komponenseit, amelyeket már csak Barabási-Albert hálózatokkal jellemzünk.

Az Erdős-Rényi gráfok numerikus eredményei között találunk olyan paraméterkombinációkat, amelyekre az adatközlők teljes egymás közötti hálózatokaira számolt dimenziértékekhez közeli értékeket kaptunk. A HÁRIT esetén az ER3 Erdős-Rényi gráf segítségével közelíthetjük leginkább a társadalmi hálózat dimenzióértékét illetve RMKT esetén a dimenzióérték az ER10 és az ER11 Erdős-Rényi gráfok dimenzióértékei közé esik.

Ugyanakkor, az eredmények alapján a vizsgált társadalmi hálózatok legnagyobb összefüggő komponenseinek dimenzióértékeihez közeli értékeket Barabási-Albert hálózatok esetén kapunk. Jelen esetben a HÁRIT hálózatának legnagyobb összefüggő komponense leginkább BA3 Barabási-Albert gráffal közelíthető, az RMKT legnagyobb összefüggő komponense pedig BA10 Barabási-Albert gráf segítségével jellemezhető leginkább.

2. táblázat Az Erdős-Rényi és a Barabási-Albert gráfok dimenzióértékei a HÁRIT az RMKT teljes egymás közötti hálózataira – és ezek legnagyobb összefüggő komponenseire – számolt dimenzióértékek kontextusában.

Kód	**Gráfmodell**	**Paraméterek**	**Dimenzióérték**	**Társadalmi hálózat**	**Dimenzióérték**
ER1	Erdős-Rényi	(82,0.1)	2.7926	HÁRIT	1.1185
ER2	Erdős-Rényi	(82,0.05)	1.6644	HÁRIT	1.1185
ER3	Erdős-Rényi	(82,0.04)	1.0874	HÁRIT	1.1185
ER4	Erdős-Rényi	(82,0.035)	1.0663	HÁRIT	1.1185
ER5	Erdős-Rényi	(82,0.03)	1.0597	HÁRIT	1.1185
ER6	Erdős-Rényi	(82,0.01)	0.2514	HÁRIT	1.1185
BA1	Barabási-Albert	(82,2,2)	2.4074	HÁRIT	1.1185
BA2	Barabási-Albert	(82,2,1)	1.6698	HÁRIT	1.1185
BA3	Barabási-Albert	(69,2,5)	1.8758	HÁRIT_ÖF	2.4360
BA4	Barabási-Albert	(69,2,4)	2.3668	HÁRIT_ÖF	2.4360
BA5	Barabási-Albert	(69,2,3)	2.6032	HÁRIT_ÖF	2.4360
BA6	Barabási-Albert	(69,2,2)	2.6956	HÁRIT_ÖF	2.4360
BA7	Barabási-Albert	(69,2,1)	2.9182	HÁRIT_ÖF	2.4360
ER6	Erdős-Rényi	(62,0.1)	2.3033	RMKT	0.6353
ER7	Erdős-Rényi	(62,0.05)	1.7925	RMKT	0.6353
ER8	Erdős-Rényi	(62,0.04)	0.7003	RMKT	0.6353
ER9	Erdős-Rényi	(62,0.035)	0.8308	RMKT	0.6353
ER10	Erdős-Rényi	(62,0.03)	0.7270	RMKT	0.6353
ER11	Erdős-Rényi	(62,0.02)	0.5571	RMKT	0.6353
ER12	Erdős-Rényi	(62,0.01)	0.2404	RMKT	0.6353
BA8	Barabási-Albert	(62,2,2)	2.3189	RMKT	0.6353
BA9	Barabási-Albert	(62,2,1)	1.6839	RMKT	0.6353
BA10	Barabási-Albert	(42,2,5)	1.7346	RMKT_ÖF	1.8004
BA11	Barabási-Albert	(42,2,4)	2.0879	RMKT_ÖF	1.8004
BA12	Barabási-Albert	(42,2,3)	2.2595	RMKT_ÖF	1.8004
BA13	Barabási-Albert	(42,2,2)	2.3726	RMKT_ÖF	1.8004
BA7	Barabási-Albert	(42,2,1)	2.6957	RMKT_ÖF	1.8004

Megjegyzés: a számításokat MATLAB-ban végeztük el. ER illetve BA jelzéssel és egy számmal kódoltuk a különböző Erdős-Rényi illetve Barabási-Albert gráfokat. ÖF-fel különböztettük meg azon eseteket, amikor a társadalmi hálózatok legnagyobb összefüggő komponenseit helyeztük a modellek különböző paraméterkombinációira kapott eredmények mellé.

Fontos megállapításunk, hogy a legnagyobb összefüggő komponensek fraktálelemzése amelett érvel, hogy a HÁRIT és az RMKT hálózatainak összefüggő komponensei leginkább Barabási-Albert gráfokkal jellemezhetőek.

Ugyanakkor, mivel a Barabási-Albert hálózatokkal csak összefüggő hálózatokat tudunk jellemezni, ezért a fraktálvizsgálatok kontextusában a HÁRIT és az RMKT adatközlőinek teljes egymás közötti hálózatai jobban jellemezhetőek Erdős-Rényi hálózatokkal.

5. ÖSSZEGZÉS ÉS KÖVETKEZTETÉS: TÁRSADALMI HÁLÓZATOK TIPOLOGIZÁLÁSA

Jelen tanulmányban két erdélyi magyar társadalmi szervezet személyi hálózatainak fraktálelemzésére vállalkoztunk. A mohó-színezési algoritmust segítségével meghatároztuk a Háromszéki Ifjúsági Tanács önkénteshálójának és a Romániai Magyar Közgazdász Társaság személyi aktorhálózatának fraktáldimenzió-értékeit, majd ezen értékeket Erdős-Rényi illetve Barabási-Albert gráfok kontextusában értelmeztük.

Megállapíthatjuk, hogy a fraktálelemzés szempontjából a HÁRIT és az RMKT teljes egymás közötti hálózatai leginkább nem összefüggő Erdős-Rényi gráfokkal társíthatóak. Továbbá, mindkét ekképpen értelmezett társadalmi hálózatra érvényesül, hogy fraktáldimenzió-értékük leginkább önmaguknál ritkább gráfsűrűségű Erdős-Rényi gráffal jellemezhetőek.

Ugyanakkor, a HÁRIT és az RMKT legnagyobb összefüggő komponenseit Barabási-Albert hálózatokkal tudtunk jellemezni, ezáltal is igazolva, hogy összefüggő társadalmi hálózatok modellezésére jelen esetben is a Barabási-Albert modell használható leginkább.

Végül, de nem utolsó sorban, eredményeink további kutatásra ösztönöznek. Például célunk lehet a Barabási-Albert modell egy olyan módosított változatának megfogalmazása, amellyel jellemezhetnénk ritka társadalmi hálózatokat is, köztük a HÁRIT önkénteshálóját és az RMKT személyi aktorainak rendszerét is.

6. IRODALOMJEGYZÉK

Albert, R., Barabási A. L. (2002): Statistical mechanics of complex networks, *Review of modern phisycs*, 74, 48-85 o.

Erdős, P. – Rényi, A. (1959): On Random Graphs I, *Publicationes Mathematicae*, 6, 290-297 o..

Falconner, K. (2003): Fractal Geometry – Mathematical Foundations and Applications, New York, John Wiley.

Frank, A. (2014): Gráfelmélet, [http://cs.elte.hu/~frank/jegyzet/graf/graf.2014.pdf], jegyzet, 2015-03-24.

Frank, A. (2013): Operációkutatás, [http://cs.elte.hu/~frank/jegyzet/opkut/uulin.2013.pdf], jegyzet, 2015-03-24.

Fruchterman, T. M. J. – Reingold, E. M. (1991): *Graph* Drawing by Force-Directed Placement, *Software – Practice and Experience*, 21 - 11, pp. 1129–1164.

Gilbert, E. (1959): Random Graphs. *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 1141-1144 o.

The MathWorks (2007): MATLAB R2007b, Inc, Natick, Massachusetts, United States.

Simon, L. (2014a): A fraktáldimenzió érve a valószínűségi hálózatok egy innovatív algoritmussal való ábrázolása mellett, In: Székely Tünde (szerk): *Innováció és kreativitás a tudományban*, Kolozsvár, Erdély Múzeum Egyesület – Romániai Magyar Doktoranduszok és Fiatal Kutatók Szövetsége, 241-257.

Simon, L. (2014b): Doboz-lefedési gráfalgoritmusok gyorsítása és optimalizálása centralitásfogalmak segítségével, In: Darvay Zsolt, A Magyar Tudomány Napja Erdélyben – 5. Matematika és Informatika Alkalmazásokkal, konferenciakötet, elfogadva.

Simon, L. – Szőcs, E. (2015): Centrális aktorok a XXII. RMKT Közgazdász Vándorgyűlés résztvevői struktúrájában, Közgazdász Fórum, Kolozsvár, RMKT, elfogadva.

Simon, L. – Szőcs, E. (2013): Fraktáltulajdonságok a háromszéki civil szervezetek hálózatában, *Hálózatkutatás tanulmánykötet*, Budapest, Inter – Eötvös, elfogadva.

Song, C. – Gallos, L. K. – Havlin, S. – Makse, H. (2007): *How to* calculate the fractal dimension of a complex network- the box covering algorithm, *Journal of Statistical Mechanics*, P03006, 2007.