Pintér Klára

Szöveges feladatok különböző reprezentációi a kompetencia alapú matematikatanítás tükrében

Tanító- és Óvóképző Intézet

problémamegoldás, szöveges feladat, reprezentáció, egyenlet

Problémafelvetés

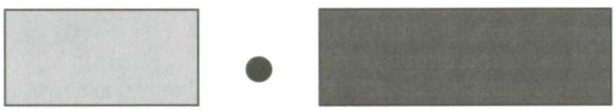
A szöveges feladatok, bár a matematika tanításában mindig központi szerepet kaptak, mégis a mai napig a legproblematikusabb résznek számítanak. A problémák okát többen vizsgálták, a 60-as, 70-es években Nagy József, a 90-es években Vidákovich Tibor, Csapó Benő végeztek országos reprezentatív felméréseket a szövegesfeladat-megoldó készségek működéséről. Bár a két felmérés közti időben fejlődés mutatható ki, a PISA felmérés gyakorlatias problémáinak megoldásában nagy elmaradást mutattak tanulóink. A matematikai és a mindennapi problémák elszigetelten jelennek meg, nem működik közöttük a transzfer. Akik az egyikben jó eredményt érnek el, nem biztos, hogy a másikban is eredményesek.

Az I. éves tanító szakos hallgatók körében végzett vizsgálataink azt mutatják, hogy sokszor a szövegek modelljének megfelelő műveletek megtalálásával, a szorzás és az összeadás megkülönböztetésével is gondok vannak.

Álljon itt egy példa ennek illusztrálására! A kérdés: *Hányszorosára változik egy kocka térfogata, ha minden élét kétszeresére növeljük?*

A tipikus rossz válasz, hogy a kétszeresére, amikor a hosszúságok arányát tévesen általánosítják a térfogatok arányára. Azonban most újabb rossz válaszok születtek, az első, hogy 7-szeresére, ami abból a tévedésből fakad, hogy a „7-tel több" fogalmát keverik a „7-szeres" fogalmával. Ugyanez okozza azt a hibát, amikor a válasz a „27-szeres", ugyanis a kocka élét ekkor nem 2-szeresére, hanem 2-vel növelték.

Nem meglepő a műveletekkel kapcsolatos bizonytalanság, ha tanárjelöltek a 2·3-at színes rudakkal a következőképpen gondolják szemléltetni:



További gond a gyerekek viszonya a szöveges feladatokhoz; már kicsi korban kezdenek kialakulni a félelmek, amit részben a generációk örökítenek egymásra, ugyanis a tanárok is tartanak ezektől a feladatoktól, aggódnak, hogy nem lesznek sikeresek a tanításban (Davis, McKillip 1980).

Az okokról

A szöveges feladatok megoldásának sikertelenségét Vidákovichék főként a szövegértés hiányosságaiban és az adatok helytelen kigyűjtésében látják. Tipikus példa, amikor a következő kérdésre: *Egy hajón 26 bárány és 10 kecske van, hány éves a kapitány?* a gyerekek a 26+10=36 választ adják.

A fordított szövegezésű feladatok nagyobb nehézséget jelentenek a gyerekek számára. Még 10–11 évesek is a „kulcsszó" stratégiát alkalmazzák a szöveges feladatok szimbolikus algebrai feladattá fordításakor. Az automatizmus miatt sem az újraolvasások száma, sem a megoldási idő nem nő a gyenge feladatmegoldók számára, ez azt jelzi, hogy ők nem gondolkodnak el a megoldáson (Verschaffel, 1994).

Más megközelítés szerint a gyerekek számára nem világos, hogy a betűk számok helyett állnak a matematikafeladatokban, és nem nevek helyett, ezért például nem szerencsés a nevekhez kötődő adatokat a név kezdőbetűjével jelölni. Hasonlóképpen gondot okozhat, ha a számokat a főnevekre vonatkozó mellékneveknek tekintik, például „A tanárok száma hatszorosa a diákok számának" mondatban a hatszorosa nem matematikai műveletet jelent számukra. Ez okozhatta a kocka térfogatának növekedésével kapcsolatos fent említett problémát (M. MacGregor; K. Stacey, 1993).

Súlyos hiba, ha Pólya (1957) négylépéses modelljét a problémamegoldás folyamatára – 1. a feladat megértése, 2. tervkészítés, 3. a terv végrehajtása, 4. a megoldás vizsgálata – úgy értelmezik, hogy a feladat tényleges megoldásához csak akkor kezdhetünk hozzá, ha megvan a tervünk a megoldásra (Lénárd, 1984 259. o).

Ennek megjelenési formája a 2. osztályos matematika könyv alábbi részlete:

Gyűjtsd ki az adatokat! Írj a szövegről egyenletet! Számítsd ki az eredményt! Válaszolj a kérdésre!

(a) Juliska 5 gombát talált, Karcsi 7-tel többet. Hány gombát talált Karcsi?

Adatok: J: 5 gy, K: 7-tel t., K = ?

K = J + 7 K = 5 + 7 K = 12

Válasz: Karcsi 12 gombát talált.

(b) Lilla 5 éves, édesapja 7-szer annyi. Hány éves Lilla édesapja?

Adatok: L = 5 év, a = 7-szer, a = ?

a = L · 7 L = 5 · 7 a = 35

Válasz: 35 éves az apa.

... szét a könyvespolc

Itt érhető tetten a szöveges feladatokkal szembeni ellenérzések gyökere, amikor a kicsi gyerekeknek az 5+7-hez is egyenletet kell felírni. Ugyanis a problémát számukra nem a feladat megoldása, hanem előtte az egyenlet felírása jelenti. Irreális ilyen szintű metakogníciót elvárni 8 éves gyerekektől. Az egyenlet felírási kényszer szüli a félrevezető jelöléseket a relációjelnél, amelybe beleírják a többletet és a többszöröst is, majdnem egyformán. Ez is lehet oka a későbbiekben az összeadás és a szorzás keverésének.

A szimbolizmus korai bevezetése megtalálható már az 1. osztály első félévében is: amikor a 3<▲ egyenlőtlenséget a gyerekeknek úgy kell kiolvasni, hogy „háromszög nagyobb, mint 3", azaz amikor épp megtanulták, hogy balról jobbra olvassanak, ezt jobbról balra kellene kiolvasniuk. További sorrendbeli nehézséget jelent ugyanekkor a 3>■>0 egyenlőtlenség.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Tibor egy 18 350 m hosszúságú túraútvonalat jár végig. Percenként 68 m távolságot tesz meg. Az indulástól számítva hány perc múlva lesz 10 km-nél kisebb távolságra a céltól?

Adatok, összefüggések

Útvonal: 18 350 m. Megtett út: 1 perc alatt $1 \cdot 68$ m
t perc alatt $t \cdot 68$ m

Hátralévő út < 10 000 m.

Terv: 18 350 m – $t \cdot 68$ m < 10 000 m.

Megoldás: Próbálgatással, táblázat segítségével.
A megoldást egész percekben keressük.

t (perc)	Megtett út (m)	Hátralévő út (m)	Megoldás-e?
0	0	18 350	Nem
10	680	17 670	Nem
100	6 800	11 550	Nem
200	13 600	4 750	Igen
110	7 480	10 870	Nem
120	8 160	10 190	Nem
123	8 364	9 986	Igen
122	8 296	10 054	Nem

Az idő növekedésével csökken a hátralévő távolság.
A táblázatból leolvasható, hogy 122 perc elteltéig a hátralévő távolság nagyobb, mint 10 000 m.
A 123. perctől kezdve a hátralévő távolság kisebb, mint 10 000 m.
$t > 122$ perc

1 Mely számok írhatók a betűk helyébe úgy, hogy az állítás igaz legyen?

$6785 + a = 15\,620$,	$17\,052 - c = 9658$,	$e - 4627 = 9584$,
$6785 + b < 15\,620$;	$17\,052 - d > 9658$;	$f - 4627 \geqq 9584$;
$64 \cdot g = 17\,600$,	$8170 : i = 95$,	$k : 53 = 344$,
$64 \cdot h > 17\,600$;	$8170 : j \geqq 95$;	$l : 53 < 344$.

A szöveges feladatok megoldására kikényszerített egyenletekre megoldási módszerük sincs a gyerekeknek – nem is lehet, amíg nem tanulták meg betűs kifejezésekkel számolni, ami 7. osztályos tananyag. Természetesen vannak olyan egyenletek, melyek egyszerűek, kicsi számok szerepelnek bennük, és a műveletek tulajdonságai alapján megoldhatók. Nem ilyen az ábrán látható 4. osztályos feladat, amely a gondolkodás helyett a próbálgatás módszerére neveli a gyerekeket, ráadásul folytonos mennyiség meghatározásakor próbálgat diszkrét értékeket.

A fent bemutatott korai szimbolizmus ellentmond a Piaget által leírt fejlődési szakaszoknak, miszerint a formális műveletek kialakulása a gyerekek 12 éves kora előtt nem várható (Piaget, 1970), amit alátámasztanak újabb kutatások is, mely szerint 10. osztályos tanulóknak is csupán 20–30 %-a éri el a formális műveletek szintjét (Elschenbroich, 2001).

Megoldási lehetőségek

Többen vizsgálták, hogyan lehetne eredményesebbé tenni a gyerekek átvezetését a „retorikus algebrából" a „szimbolikus algebrába". Lényeges, hogy a matematikai műveletek matematikai objektumot jelentsenek számukra, ne csupán végrehajtandó algoritmust, amit azzal lehet elősegíteni, ha mindig szöveges szituációkból indulunk, és a gyerekek kellő tapasztalatot tudnak szerezni számokkal az általánosítás előtt (Swafford, 2000).

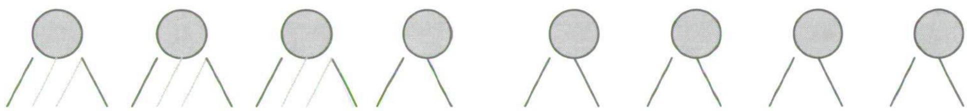
Közelebb jutunk a megoldáshoz, ha az ismereteket, problémákat különböző reprezentációkban fogalmazzuk meg: enaktív, ikonikus, szimbolikus formában (Bruner, 1966). Ezzel lehetőséget adunk a két agyfélteke közötti kapcsolatok épülésének is, amely magasabb szintű megértést tesz lehetővé (Hámori, 1999). Az infomációk képi reprezentációban való megfogalmazásának szükségességét támasztja alá Paivio kódelmélete, mely szerint az ember külön képi, külön verbális kódolórendszerrel rendelkezik (Paivio, 1981). A különböző reprezentációk problémamegoldásra gyakorolt pozitív hatásait többen elemezték (Ambrus 2007, Vásárhelyi 2007, Arcavi 2003).

A különböző reprezentációk alkalmazására mutatunk egy klasszikus példát:

Az udvarban tyúkok és nyulak vannak. Összesen 8 fejet és 22 lábat számoltunk meg. Hány tyúk és hány nyúl van?

A probléma megoldható tevékenységgel, a fejeket korongokkal, a lábakat pálcikákkal rakjuk ki, így a gyerekek maguktól rájöhetnek arra a megoldási módszerre, hogy mivel minden állatnak van legalább két lába, előbb minden fejhez adjunk 2 lábat, majd a megmaradt lábakat osszuk ki kettesével, így bizonyos tyúkokból nyulak lesznek.

Ezt a megoldást konkrét eszközök nélkül rajzzal is követhetjük:



Miután kiosztottuk a két lábat mindegyik fejhez, összesen $2 \cdot 8 = 16$ lábat osztottunk ki, így $22 - 16 = 6$ láb maradt, amit kettesével kiosztva $6 : 2 = 3$ állatnak jut, tehát 3 nyúl és 5 tyúk van.

Az előbbi megoldás lépéseit pontosan követi a szimbolikus megoldás is: jelölje x a nyulak, y a tyúkok számát. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert, amelyet az egyenlő együtthatók módszerével oldunk meg:

$x+y = 8$

$4x + 2y = 22$

Az első egyenletet 2-vel szorozzuk: $2x + 2y = 2 \cdot 8$, majd kivonjuk a másodikból:

$2x = 22 - 16$. Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel osztva: $x = 3$, ebből pedig $y = 5$.

A gyerekeknek nem csak a szimbolikus modelleket kellene tanítani, hanem a képi és a tevékenységgel lejátszható modelleket is, ezek később is az absztrakció alapjául szolgálnának. Lényeges, hogy ezeket a modellezési módszereket is tanítani kell!

A szövegesfeladat-megoldó képesség fejlesztésére irányuló kutatások pozitív eredményeket mutatnak (Verschaffel, 1997). Hangsúlyozzák, hogy valós problémaszituációkat kell állítani a gyerekek elé, így aktívabban részt vesznek a problémamegoldás folyamatában. Olyan módszereket kell tanítani, amelyek más feladatok megoldásánál is alkalmazhatók, és lehetőleg ne korlátozódjon csupán egy fejezetre ez a szemlélet.

Gyakorlati megvalósítás

A fentiek figyelembe vételével építettük fel a *Sokszínű Matematika* tankönyvcsalád matematikakönyveiben a problémamegoldás, a szövegesfeladat-megoldási képesség fejlesztését. Alapvető szempontok:

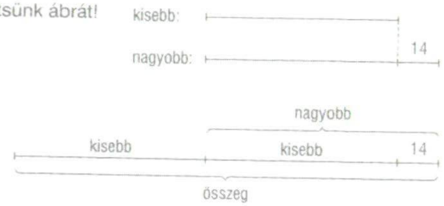
- a különböző reprezentációk és kapcsolataik tanítása;
- a fokozatosság a reprezentációk tanításában;
- ne legyenek egyenletek, az algebrai kifejezések tanítása előtt;
- a feladatmegoldás általános elveinek tanítása külön fejezetben;
- mindegyik fejezetben adunk fel problémamegoldási képességet fejlesztő feladatokat;
- törekszünk a tantárgyak közötti integrációra, és a gyakorlatias problémák választására.

3. példa

Egy 46 cm hosszú pálcát két darabra törünk. Az egyik darab 14 cm-rel hosszabb a másiknál. Milyen hosszúak a darabok külön-külön?

1. megoldás

Készítsünk ábrát!

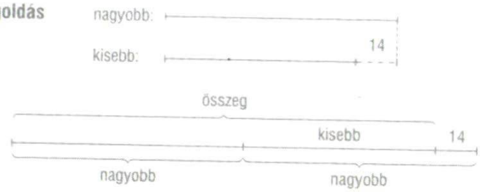


A kisebbik darab kétszerese az összegnél 14 centiméterrel kevesebb: 46 − 14 = 32 (cm). Így a kisebbik darab 32 : 2 = 16 (cm) hosszú, a nagyobbik pedig 16 + 14 = 30 (cm).

Ellenőrzés: A két darab együtt 16 + 30 = 46 (cm).
Az egyik 30 − 16 = 14 (cm)-rel nagyobb, mint a másik.

Válasz: Az egyik darab 16 cm, a másik 30 cm hosszú.

2. megoldás



A nagyobbik darab kétszerese az összegnél 14 centiméterrel több: 46 + 14 = 60 (cm). Így a nagyobbik darab 60 : 2 = 30 (cm), a kisebbik pedig 30 − 14 = 16 (cm).

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az 1. megoldásban.

Válasz: Az egyik darab 16 cm, a másik 30 cm hosszú.

69

A 6. osztályos tankönyvben szerepel a *Hogyan oldjunk meg feladatokat?* című fejezet, amely leckénként tárgyalja a problémamegoldás lépéseit, a kérdés megértését, az adatok kigyűjtését, a különböző következtetéses megoldási módszereket, az ellenőrzési stratégiákat és a válaszadás szükségességét. Ezzel erősítjük a problémamegoldásra vonatkozó metakogníciót, továbbá hasznos gondolkodási stratégiákat tanítunk a gyerekeknek, például a visszafele gondolkodást, a szöveges feladatok megoldását szakaszok segítségével (ez utóbbira látunk egy példát az ábrán). A tanári útmutatóban ötleteket adunk a tananyag tevékenységekkel való bevezetéséhez, például az ábrán látható problémát felvethetjük a gyerekeknek úgy, hogy a kezükbe adunk egy 46 cm hosszú fonalat, amit úgy kell két darabra vágniuk, hogy az egyik darab 14 cm-rel hosszabb legyen a másiknál. Ezzel a gyerekek maguk fedezik fel a megoldási stratégiát és a szakaszok rajzolásához is közelebb kerülnek. A fejezet kipróbálása során azt tapasztaltuk, hogy a tanulók jobban megállták a helyüket a matematikaversenyeken, hiszen nem speciális feladattípusokat, hanem megoldási módszereket tanultak, így új helyzetekben is sikeresebbek voltak

Zárszó

A gyerekeknek szóló tananyagoknál is fontosabb, hogy a problémamegoldás fejlesztését beépítsük a jövendő tanárok, tanítók képzésébe, így mintát látva lesznek képesek majdani tanítványaikat is erre nevelni.

IRODALOM

Ambrus A.: A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban. http://xml.inf.elte.hu/~mathdid

Arcavi, A. (2003): The role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics 52: 215–241.

Bruner, J.S. (1966): Towards a theory of instruction. Harvard University Press.

Davis, E. J.; McKillip, W. D. (1980): Improving Story-Problem Solving in Elementary School Mathematics. *Problem Solving in School Mathematics NCTM 1980 Yearbook, ed. S. Krulik, R.E.Reys*

De Corte, E. (1997): A matematikatanulás és -tanítás kutatásának fő áramlatai és távlatai. *Iskolakultúra,* 12.

Elschenbroich, H.J. (2001): Visuelles Lehren und Lernen In: Beitrage zum Mathematikunterricht div Verlag Franzbecker 169–172.

Hámori, J. (1999): Az emberi agy aszimmetriái. Dialog Campus Budapest, Pécs.

Lénárd Ferenc (1984): A problémamegoldó gondolkodás, Akadémiai Kiadó, Budapest.

MacGregor, M; Stacey, K (1993): Cognitive Models UnderlyingStudents' Formulation of Simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1993, Vol 24, No. 3, 217–232.

Paivio, A., Begg,J. (1981): Psycholgy of language. New Yersey Prentice Hall.

Piaget, J. (1970): Az értelmi fejlődés szakaszai, In: Piaget, J.: Válogatott tanulmányok, Budapest Gondolat, 66–75.

Pólya György (1957): A gondolkodás iskolája. Bibliotheca, Budapest.

Swafford, J. O.; Langrall, C.W.: Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and represent Problem Situations, *Journal for Research in Mathematics Education.* 2000, Vol 31, No. 1, 89–112.

Vásárhelyi É.: Problem Solving with Help of Combination of Different Representations. http://xml.inf.elte.hu/~mathdid

Verschaffel, L. (1994): Using Retelling Data to Study Elementary School Children's Representations and Solutions of Compare Problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1994, Vol 25, No. 2, 141–165.

Verschaffel, L. (1997): Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment With Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education,* 1997, Vol 28, No. 5, 577–601.

KLÁRA PINTÉR

Different representations of narrative mathematical problems within the frame of competence-based instruction

In the process of modernization of instruction, those type of curricula and syllabi are emphasized which help development of the students' abilities and competencies necessary in everyday life. From this respect, one of the most important elements in the competence-based mathematics instruction is the development of problem-solving skills through narrative tasks (DE Corte 1997). In the article, problems and possible causes are outlined. One of the possible problem areas is 'early symbolism', because this abstract knowledge is not backed up by practical experience or symbolical representation connected to the tasks, which could be acquired through manual skills.

In the course book series „Sokszínű Matematika" (Multicolored Mathematics), published by Mozaik Kiadó, the authors attempt to build up these representations gradually and simultaneously. The principles and some momenta of this structure are introduced in the article.