CSALLNER ANDRÁS ERIK

Speciális túlbecslő függvények alkalmazása az építőmérnöki tervezésben

ALKALMAZOTT TERMÉSZETTUDOMÁNYI INTÉZET

intervallum-analízis, vasbeton gerenda, optimalizálás, lépcsős függvények

1. Bevezetés

Egy vasbeton gerendában ébredő hatások közül talán az egyik legveszélyesebb a nyíróerő, amely a szerkezet alulméretezettsége esetén minden előjel nélküli hirtelen összeomlást eredményezhet. Ezért általában külön nyírási vasalást szokás alkalmazni ezen erők felvételére.

A költségek minimalizálása egy korlátozási feltételekkel terhelt optimalizálási feladathoz vezet. A feladat megoldásának egyik módja a korlátozási feltételeket szolgáltató matematikai modell vizsgálata és pontosítása, a másik a meglévő modell jobb megoldása. Ebben a dolgozatban az utóbbira adunk példákat.

2. A matematikai modell

A fizikai összefüggéseket itt nem vizsgáljuk, az olvasó az erre vonatkozó részleteket megtalálja a megfelelő szabványban (lásd 0). A továbbiakban feltesszük, hogy a nyíróerőfüggvény, illetve a felhasznált acélmennyiség és a nyíróerővel szembeni ellenállás közötti explicit összefüggés adottak. A megoldandó probléma egy olyan vasalás megadása, amely minimális költség mellett ellenáll az ébredő nyíróerőnek. Bár a fizikai modell pontosan megadja a szükséges acélmennyiséget a gerenda hosszának minden pontjában, ezek az eredmények közvetlenül nem alkalmazhatók. Ennek oka, hogy a vasalás különálló darabokból áll – kengyelek, ill. felhajlított, betétek –, így az acél sűrűsége nem módosítható tetszőlegesen a gerenda hossza mentén. Egy minimális hossz azonban rögzíthető, amelyen a vasalás nem változhat. Így a vasalás megtervezhető a gerenda egy olyan beosztásának használata mellett, amelynek egyetlen szakasza sem rövidebb egy előre megadott értéknél. Minden ilyen szakasz fölött a nyíróerőt állandónak tekintjük.

A következő kérdések merülnek fel ezzel kapcsolatban: Hogyan osszuk fel a teljes hosszat? Hogyan határozzuk meg a szakaszok fölött a nyíróerőt túlbecslő állandókat?

A következőkben néhány fogalmat rögzítünk.

1. definíció. *Legyen* $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subseteq \mathbf{R})$ *két valós függvény. A g függvényt az f egy* túlbecslő függvé*nyének nevezzük D fölött, ha minden* $x \in D$ *értékre* $f(x) \le g(x)$ *teljesül.*

Esetünkben a nyíróerőfüggvény az *f*, míg *g* a nyírási vasalásunk által felvett erő. A felvett erő és a tényleges nyíróerő közötti különbség a túlbecslés. Tetszőleges függvények esetében a túlbecslés fogalma a következőképpen adható meg.

2. definíció. *Legyen f és g az 1. definíció szerinti két valós függvény. A g* túlbecslését *f-re vonatkozóan D fölött* $g_f(D)$ *-vel jelöljük, és az alábbi határozott integrállal definiáljuk:*

$$g_f(D) = \int_D \left(g(x) - f(x)\right) dx \cdot \qquad (1)$$

Esetünkben *f* a nyíróerőfüggvény, *g* pedig egy túlbecslő lépcsős függvény, amely a gerenda hossza mentén a nyírási vasalás által felvett erőt reprezentálja.

A *g* függvény lépcsői szélességének alsó korlátja egy rögzített $w \in \mathbf{R}$ érték. A célunk egy megfelelő túlbecslő *g* függvény megadása, amely minimális túlbecslést eredményez. Ennek a problémának a matematikai megfogalmazása a következő modellel lehetséges.

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-f(\xi)\right)d\xi+cn\right)$$
$$\text{ahol } x_i - x_{i-1} \ge w \quad \forall i=1,\dots,n, \tag{2}$$
$$x_0 \text{ és } x_n \text{ rögzítettek.}$$

Az $x_1,\dots, x_{n-1}$ a gerenda hosszának felosztási pontjai, míg x_0 és x_n a gerenda két végpontja. A túlbecslő lépcsős függvény lépcsőinek magasságát a $\sup\{f(x) \mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $i=1,\dots,n$ összefüggések definiálják, ahol a felosztás, sőt, még a felosztási szakaszok száma, n is ismeretlen. A $c = 0$ esetben a modell csupán az anyagárat veszi figyelembe. Amennyiben $c > 0$, akkor a nyírási vasalás fajtájának módosításából származó költséget is beszámítjuk. A w jelöli a lépcsők minimális szélességét.

Általában ez a probléma igen nehezen megoldható, mivel már egyetlen lépcsőfok magasságának kiszámítása is NP-nehéz. Ebben a dolgozatban nem kíséreljük meg a pontos minimum kiszámítását, csupán jó heurisztikus algoritmusokat próbálunk adni, amelyek garantáltan túlbecslő lépcsős függvényt szolgáltatnak, és alkalmasak egy automatizált eljárás részeként tervezői rendszerek kifejlesztésére.

3. Túlbecslő lépcsős függvények szerkesztése

A következőkben bemutatunk néhány heurisztikát, amelyek szinte bármilyen alakú *nyíróerőfüggvény* esetén garantált túlbecslő lépcsős függvényt adnak. Minden itt vázolt algoritmus az intervallum-analízis elvét alkalmazza, ezért az alapvető fogalmakat röviden a következőkben összefoglaljuk.

3.1. Intervallum-analízis

Bár számos nemlineáris optimalizáló algoritmus létezik, a következőkben mégis az intervallum-aritmetikán alapuló intervallumos módszereket használjuk, mivel ezek garantált eredményeket szolgáltatnak, ami építőmérnöki tervezés esetén elengedhetetlen. Ezt a tulajdonságukat az alkalmazott intervallum-analízis két alapvető tulajdonsága biztosítja. Az első az intervallum-aritmetika egyik alapelve, amely azt mondja ki, hogy ha egy $\boldsymbol{x}=[\underline{x},\overline{x}]$ valós intervallumot (ahol $\underline{x},\overline{x}\in\mathbf{R}$ és $\underline{x}\le\overline{x}$) egy digitális számítógépen ábrázolunk, akkor az $\boldsymbol{x}_M=[\underline{x_M},\overline{x_M}]$ gépi intervallum – olyan intervallum, amelynek végpontjai egy adott számítógépen ábrázolhatók –, amelyet a kérdéses intervallum reprezentálására használunk mindig tartalmazza azt, azaz $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{x}_M$ mindig teljesül, és $\boldsymbol{x}_M$ a legkeskenyebb ilyen intervallum. Ezt hívják *kifelé kerekítés*nek. A második az intervallumos függvények és alapműveletek *befoglalási elve*. Jelölje a zárt intervallumok halmazát $\mathbf{I}=\{[a,b]\mid a,b\in\mathbf{R}\}$, a valós számok egy D résztartományának összes intervallumát pedig $\mathbf{I}(D)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{I}\mid \boldsymbol{x}\subseteq D\}$. Ha egy $\boldsymbol{f}:\mathbf{I}(D)\to\mathbf{I}$ intervallumos függvényt az $f:D\to\mathbf{R}$ valós függvény helyett használunk, akkor minden $\boldsymbol{x}\in\mathbf{I}(D)$ intervallumra $\mathrm{Range}_f(\boldsymbol{x})\subseteq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ teljesül.

Egy további fogalom, amelyet alább használni fogunk, a valós számok legegyszerűbb intervallum kiterjesztésének, az ún. naiv intervallum-aritmetikának a befoglalási monotonitása. Egy valós $f:D\to\mathbf{R}$ függvény $\boldsymbol{f}:\mathbf{I}(D)\to\mathbf{I}$ befoglaló függvényét *befoglalási monoton*nak vagy *izoton*nak nevezzük, ha minden $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{I}(D)$ intervallumra az $\boldsymbol{x}\subseteq\boldsymbol{y}$ tartalmazásból következik $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\subseteq\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$. A naiv intervallum kiterjesztés rendelkezik továbbá a *zéró-monotonitás* tulajdonságával, azaz ha $\mathrm{width}(\boldsymbol{x})\to 0$, akkor $\mathrm{width}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\to 0$ is teljesül, ahol $\mathrm{width}(\boldsymbol{x})=\overline{x}-\underline{x}$ az adott intervallum szélességét jelöli.

Nyilvánvaló, hogy ha a kerekített valós értékek és függvények helyett intervallumokat, illetve befoglaló intervallumos függvényeket használunk, akkor az eredményeink garantáltak, és a bennük foglalt hiba – egy intervallum tetszőleges pontját tekintve – nem haladja meg az intervallum szélességét.

Minden intervallumos műveletet és függvényt úgy definiálunk, hogy a befoglalási elv érvényesüljön. Ez és a kifelé kerekítés együttesen biztosítják, hogy sem a számítási módszerek, sem a számítógép kerekítései nem eredményeznek olyan intervallumokat, amelyek nem tartalmazzák a valós eredményt. További információkat az olvasó pl. a 0 könyvben talál.

A következő alfejezetben bemutatunk néhány olyan heurisztikát, amelyek segítségével intervallumos módon tudunk jó túlbecslő lépcsős függvényeket megadni. Feltesszük, hogy a valós függvények helyett alkalmazott intervallumos befoglaló függvények a fenti elveknek megfelelnek.

3.2. Lépcsőzési heurisztikák

A következő pontokban három heurisztikát mutatunk be, amelyek algoritmikus módon adnak túlbecslő lépcsős függvényt bármilyen szakaszonként analitikus függvényre. A módszerek részletes ismertetése elhangzott az 0 előadáson.

3.2.1. A mohó megközelítés

Mivel általában egy túlbecslő lépcsős függvény várhatóan annál kisebb túlbecslést eredményez, minél finomabb beosztást alkalmazunk, a mohó megközelítésben igyekszünk egyenlő, vagy közel egyenlő szélességű szakaszokra osztani a vizsgált tartományt, ahol ez a szélesség persze nem haladhatja meg a minimális *w* szélességet. Elég nehéz lehet azonban jó felső becsléseket adni az egyes szakaszok fölött a célfüggvényre, mivel ez általánosságban egy-egy nemlineáris globális optimalizálási feladatot jelent. A probléma egy garantált megbízhatóságú megoldása a korlátozás és szétválasztás elvén működő intervallumos globális megoldók használata lehet. Egydimenziós esetben ez nem is jár túl nagy műveletigénnyel. A mi esetünkben azonban egy egyszerűbb módszer, a *véges felosztás* is megteszi. A teljes vizsgált tartományt felosztjuk kicsi, egyenlő szélességű intervallumokra, és naiv intervallum-aritmetikát alkalmazva mindegyik fölött kiszámítunk egy felső korlátot. Ezen módszer túlbecslése elég kicsi lehet a felhasznált intervallumos kiterjesztés izotonitása és zérókonvergenciája miatt.

Ha azonban a *c* konstans a (2) egyenletben nem nulla, akkor ez a módszer *n* elég nagy értékeit eredményezheti, ami a célfüggvényt jelentős mértékben a tényleges minimum fölé viheti. Ez a komplikáció elkerülhető, ha további, paraméterezett heurisztikákat vezetünk be. Nevezetesen, nem indítunk új lépcsőt addig, amíg az aktuális lépcső túlbecslése meg nem halad egy adott emelkedési faktort. Az *emelkedési faktort* a szakasz fölötti túlbecslésnek és a szakasz szélességének a hányadosával definiáljuk. Azokat a lépéseket, amelyeket ennek az ötletnek a segítségével számítunk ki, *intelligens lépésköznek* nevezzük. Ily módon nem csak a lépcsők számát tudjuk csökkenteni, de a szükségtelen lépcsőváltások is elkerülhetők. Megfelelő emelkedési faktort találni azonban szintén nem könnyű feladat, ennek a megoldásától azonban terjedelmi korlátok miatt itt eltekintünk.

A mohó megközelítés természetesen nagyon gyors és könnyen programozható, de rendelkezik néhány kevésbé előnyös tulajdonsággal is. Amennyiben a túlbecsülendő függvény szimmetrikus egy résztartomány fölött, a mohó algoritmussal előállított lépcsős túlbecslése általában nem az, ami eleve kizárja az optimális túlbecslés elérését. Ezen kívül a tartomány utolsó szakaszának szélessége ebben az esetben igen nagy valószínűséggel jóval szélesebb a megelőzőknél – és persze *w*-nél –, kivéve, ha a tartomány szélességét elosztva *w*-vel a maradék kicsi. A következő pontban tárgyalt heurisztika ezen hátrányok kiküszöbölésére tesz kísérletet.

3.2.2. A szélsőértékhelyek kiterjesztésének módszere

A szélsőértékhelyek kiterjesztése módszerének ötlete egy háromlépéses algoritmussal írható le:

1. Keressük meg az *f* lokális szélsőértékhelyeit, és szerkesszünk keskeny intervallumokat „föléjük"!
2. Terjesszük ki bizonyos módszerrel ezeket az intervallumokat!
3. Töltsük ki az így maradt hézagokat további lépcsőkkel a mohó algoritmus segítségével!

Intervallum-analízis segítségével nem túl nehéz feladat az *f* összes helyi szélsőértékét megtalálni, ha *f* egyszer differenciálható. A véges felosztás módszerét alkalmazva a megoldás még egyszerűbb, és a differenciálhatóságra sincs szükségünk. Akárhogyan is oldjuk meg a kérdést, az így keletkezett intervallumok ezután kiterjeszthetők negatív és pozitív irányba is úgy, hogy közben az emelkedési faktort figyelve kiegyensúlyozzuk őket a szélsőértékhelyek fölött – mindig abba az irányba növelünk, amerre ez a faktor kisebb. Az így kapott lépcsők között megmaradt hézagokat azután vagy a mohó megközelítést követve töltjük ki, ha azok elég szélesek, vagy tovább növesztjük az eredeti intervallumokat, ha a szomszédos szakaszok közötti távolság nem éri el *w* értékét.

3.2.3. Intelligens lépések használata

Új módszert kaphatunk, ha a szélsőértékhelyek kiterjesztésének módszerében a 3. lépésben az egyenlő szélességű szakaszokat eredményező mohó stratégia helyett intelligens lépésközt alkalmazunk.

4. Összegzés

A mérnöki problémák vizsgálatánál mindig figyelembe kell vennünk a biztonság kiemelkedő fontosságát. A tervezés intervallum-analitikus megközelítése biztosítja, hogy a kapott eredmények – felső korlátok – garantáltak, így eredményeink biztonságos építmények automatizált tervezését teszik lehetővé. A túlbecslő heurisztikák azonban nem csak vasbetongerendák tervezésénél használhatók, hanem minden olyan modell esetében (pl. off-line nemlineáris szabályozás), ahol jó túlbecslő lépcsős függvényekre van szükség.

Köszönetnyilvánítás

A kutatásokat részben az OTKA T046822 és az OTKA T048377 pályázatok, valamint a KÉSZ Kft. és a Szegedi Tudományegyetem támogatja.

IRODALOMJEGYZÉK

1. A.E. Csallner, Step Function Overestimators With Left-Bounded Step Widths, Book of Abstracts of the SCAN 2006, pp.137, Duisburg, Germany, September 26–29, 2006.
2. R. B. Kearfott, Rigorous global search: continuous problems, Kluwer, Dordrecht, 1996.
3. MSZ EN 1992/1/1:2005 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules of buildings.

ANDRÁS ERIK CSALLNER

Applying special overestimating functions in civil engineering design

Investigating engineering problems the enormous necessity of safety has always to be taken into account. The interval analytical approach of design assures that the results – upper bounds – obtained are guaranteed, hence our results are appropriate for building safe structures upon an automatized design. However, the overestimating heuristics are not only useful for the design of reinforced concrete beams, but for all models (e.g. off-line nonlinear regulation) where good stepped overestimators are needed.