ITERÁLT HARMADFOKÚ KVANTUMINFORMATIKAI PROTOKOLLOK

Portik Attila[1,2], Kálmán Orsolya[2], Kiss Tamás[2]

[1]*Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A*
[2]*Wigner Fizikai Kutatóközpont, 1121 Budapest, Konkoly-Thege M. út 29-33.*

DOI: https://doi.org/10.14232/kvantumelektronika.9.28

Egy olyan kvantuminformatikai protokollt vizsgálunk, amely egy összefonó unitér kapu, majd mérés és a mérés eredményén alapuló szelekció homogén kezdőállapotú qubit-sokaságon történő ismételt alkalmazásán alapul [1]. Az így létrejövő folyamat megfeleltethető egy komplex polinomok hányadosaként előálló komplex függvény iterált dinamikájának, ha a qubitet egy komplex számmal reprezentáljuk, ezért bizonyos kezdőfeltételek esetén kaotikus viselkedésre vezet [2]. Az ilyen nemlineáris folyamatoknak számos kvantuminformatikai alkalmazása lehet, mint például a kvantumállapotok tisztítása [3] vagy a kvantumállapot-megkülönböztetés [4,5,6]. Egy másik, érzékenységükön alapuló gyakorlati felhasználásuk lehet a kvantum-áramkörök, kvantum-chipek tesztelése, a fellépő zaj és hibaforrások feltérképezése.

Az általunk tekintett sémában a homogén kezdőállapotú qubit-sokaságból (amelyben a qubitek ugyanolyan állapotúak és egymástól függetlenek) hármasával veszünk elemeket, amelyeket egy unitér művelettel összefonunk, majd a háromból két qubitet megmérünk. Ha a megmért qubiteket a kívánt állapotban találjuk, akkor a harmadik qubitet megtartjuk és rajta még egy további transzformációt végzünk (ellenkező esetben eldobjuk a harmadik qubitet is). A folyamatot az ilyen módon transzformált qubitekből képezett hármasokon tovább ismételjük, azaz iteráljuk.

Feltesszük tehát, hogy kezdetben van három független qubitünk, mindegyik ugyanabban a $|\psi_0\rangle = N_z\left(|0\rangle + z|1\rangle\right)$ kezdeti állapotban, ahol $z \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Ekkor a teljes rendszer állapota:

$$|\Psi\rangle = |\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle \otimes |\psi_0\rangle = N_z^3\big(|000\rangle + z|001\rangle + z|010\rangle + z^2|011\rangle + z|100\rangle + z^2|101\rangle + z^2|110\rangle + z^3|111\rangle\big)\,.$$

A qubitek összefonását két controlled-NOT (CNOT) kapuval végezzük. A CNOT egy két-qubites művelet, amely a kontroll qubit állapotától függően változtatja meg a cél-qubit állapotát: ha a kontroll-qubit állapota $|1\rangle$, akkor a cél-qubit állapota ellenkezőre vált, ha a kontroll-qubit állapota $|0\rangle$, akkor a cél-qubit állapota nem változik meg. Közismert, hogy a CNOT operátor szorzatállapotokból összefonódottakat hoz létre. Ahhoz, hogy mindhárom qubitet összefonjuk, két CNOT műveletre van szükségünk. A mi esetünkben mindkét CNOT ugyanazt a qubitet használja kontrollként (legyen ez az első qubit), a cél qubitek pedig különböznek (egyik esetben a 2-es, a másikban a 3-as). Az említett két CNOT egymás utáni alkalmazásával létrejövő műveletet pedig úgy is felfoghatjuk, mint a CNOT transzformáció három qubitre általánosított verzióját, melynek a mátrix reprezentációja a következőképpen adható meg:

$$G_{\mathrm{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol a bázisvektorok sorrendjét $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$-nek vettük. A három qubit állapota ezen transzformáció hatására a következőképpen változik meg:

$$G_{\mathrm{CNOT}}|\Psi\rangle = N_z^3\big(|000\rangle + z|001\rangle + z|010\rangle + z^2|011\rangle + z^3|100\rangle + z^2|101\rangle + z^2|110\rangle + z|111\rangle\big)\,.$$

Az általunk vizsgált sémában von Neumann méréseket tekintünk a 2-es és 3-as qubiten és az 1-es qubitet csak abban az esetben tartjuk meg, ha mindkét mérés eredménye 0 volt (ez természetesen csak bizonyos valószínűséggel valósul meg a konkrét mérések során). Ekkor a megtartott qubit állapota:

$$|\psi'\rangle = N'_z\left(|0\rangle + z^3|1\rangle\right)\,.$$

A CNOT transzformációk és a méréseknek megfelelő szelekció elvégzése a $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $g(z) = z^3$ komplex leképezésnek felel meg, amelynek ismételgetése egy diszkrét idejű determinisztikus nemlineáris dinamikára vezet, amely önmagában nem kifejezetten izgalmas. Ezért minden lépésben beiktatunk még egy egy-qubites unitér transzformációt, melyet a megtartott qubiteken hajtunk végre. Ezt az unitér transzformációt – az esetünkben érvényes szimmetria-tulajdonságokat is figyelembe véve – a következőképpen paraméterezhetjük

$$U(p) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\begin{pmatrix} 1 & p \\ -\bar{p} & 1 \end{pmatrix},$$

ahol $p = \tan(\xi)e^{-i\varphi} \in \mathbb{C}$, és $\overline{p}$ a p komplex konjugáltja. Ennek a műveletnek a beiktatása után a megtartott qubit állapota

$$|\psi_1\rangle = N''_z\left(|0\rangle + \frac{z^3+p}{1-\overline{p}z^3}|1\rangle\right)$$

lesz, így az iterációs lépést a következő komplex racionális törtfüggvény reprezentálja

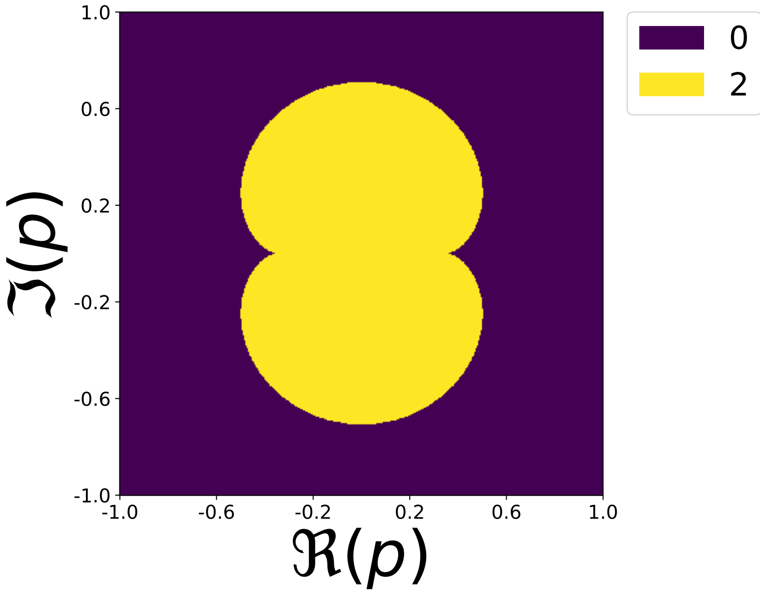
$$f_p(z) = \frac{z^3+p}{1-\overline{p}z^3}\,. \tag{1}$$

Ahhoz, hogy a kvantumrendszer viselkedését megismerjük elég ezt a komplex leképezést tanulmányoznunk. Az $f_p(z)$ függvény iterációja meglehetősen összetett dinamikai viselkedést mutat, e dinamika néhány tulajdonságát mutatjuk itt be.

Az $f_p(z)$ leképezésnek négy fixpontja van, melyek meghatározásához az $f_p(z) = z$ egyenletet kell megoldani, ami a

$$\bar{p}z^4 + z^3 - z + p = 0$$

komplex együtthatós negyedfokú polinom-egyenletre vezet, amelynek négy komplex megoldása van általános p esetén. A függvény $f'_p(z)$ deriváltjának a z_0 fixpontban felvett értéke alapján a fixpont lehet semleges ($|f'_p(z_0)| = 1$), taszító ($|f'_p(z_0)| > 1$), vagy vonzó ($|f'_p(z_0)| < 1$), esetleg szupervonzó



1. ábra. A p paramétertér origó körüli részének a szerkezete a p paraméterrel jellemzett f_p leképezés vonzó fixpontjainak száma szerint. Sárga szín jelöli azokat a paramétereket, amelyek esetén a leképezésnek két vonzó fixpontja van és lila azokat, amelyek esetén a leképezésnek nincs vonzó fixpontja. Az ábra elkészítéséhez 2500×2500-as felosztást használtunk.

($|f_p'(z_0)| = 0$). Egy iterált racionális komplex polinomfüggvényekre vonatkozó tétel szerint maximum 4 vonzó fixpontot vagy fix ciklust találhatunk.

Megvizsgáltuk, hogy a p paraméter különböző értékeihez tartozó, (1) egyenletben megadott f_p leképezéseknek hány vonzó fixpontja van. Ehhez numerikus szimulációt végeztünk, amelynek során kijelöltünk egy véges tartományt a paramétertérből, ennek vettük egy alkalmas felosztását, az egyes p értékek esetén megkerestük a fixpontokat, majd kiértékeltük a függvény deriváltját az adott fixpontokban. Az így kapott eredményeket az 1. ábra mutatja. A paramétertér tükörszimmetriát mutat mind a valós mind a képzetes tengelyre. A két vonzó fixponttal rendelkező leképezéseknek megfelelő tartományt körülöleli az, amely esetén a fixpontok közül egy sem vonzó (utóbbi térrészben természetesen létezhetnek hosszabb vonzó ciklusok). Megjegyezzük, hogy minden p-re vagy 0 vagy 2 fixpontot találtunk.

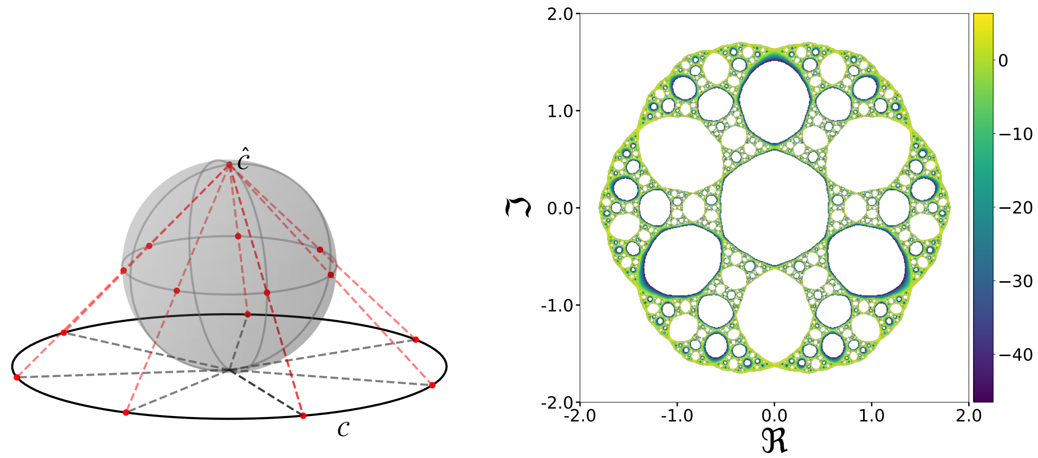
Egy adott p paraméterrel jellemzett $f_p(z)$ függvény iterálása nyomán a z állapottéren két (egymást kiegészítő) halmazt különböztethetünk meg. Az ún. Fatou-halmaz azon pontokat tartalmazza, melyek közül a kezdetben egymáshoz közeliek több iteráció után is közel maradnak és konvergálnak a leképezés valamely vonzó ciklusához. Ezzel szemben az ún. Julia-halmaz elemei olyan pontok, melyek nem tartanak egyik vonzó ciklushoz sem, és a kezdőállapot tetszőlegesen kicsiny perturbációja is drasztikusan különböző állapotra vezethet az iterációs lépések során. A Julia-halmaz tehát az instabil pontokat tartalmazza, melyek kaotikusan viselkednek. A kaotikus viselkedést jellemezhetjük az ún. Ljapunov-exponenssel, amely a kezdetben közeli fázistérbeli pontok egymástól való exponenciális eltávolodását írja le. Ha az értéke pozitív, az a rendszerbeli valódi kaotikus viselkedés megjelenését jelenti.

A z pontbeli Ljapunov-exponenst a következő kifejezéssel definiálhatjuk [7]:

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(|f'(z)|_R \cdot |f'(f(z))|_R \cdot \left|f'(f^{\circ 2}(z))\right|_R \cdots \left|f'(f^{\circ n-1}(z))\right|_R \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left|f'(f^{\circ n-1}(z))\right| \right). \quad (2)$$

Itt $f^{\circ n}(z)$ az $f(z)$ függvény n-edik iteráltját, $|\cdot|_R$ pedig a Riemann-gömbön mért távolságot jelöli a Riemann-gömb déli pólusától, mely adott z-re $|z|_R = 2\,|z|\,/\sqrt{|z|^2+1}$.

A Julia-halmazon megjelenő káoszt és a pozitív Ljapunov-exponens megjelenését úgy vizsgáltuk, hogy az adott p paraméterrel jellemzett $f_p(z)$ leképezést numerikusan iterálva közelítettük a (2) egyenletet. Az eredményt a $p = i$ paraméternek megfelelő esetben a 2. ábra mutatja, melyen megfigyelhető, hogy az exponens egy fraktál alakzat mentén vesz fel pozitív értéket, ez a halmaz a leképezés Julia-halmaza. Ellenőrizhető, hogy azokban a tartományokban, ahol a Ljapunov-exponens negatív, a kezdőállapotok két 2-hosszú stabil vonzó ciklushoz tartanak (Fatou-halmaz).



2. ábra. (Bal oldal) A $\mathbb{C}$ és $\hat{\mathbb{C}}$ közötti megfeleltetés a komplex számgömb és az azt egy pontban érintő komplex számsík közötti *sztereografikus leképezéssel* adható meg. A sztereografikus leképezés során a gömb síkkal való érintkezési pontjával átellenes pontjából induló félegyenesek által a síkból kimetszett $z \in \mathbb{C}$ pontot és a gömbből kimetszett $z' \in \hat{\mathbb{C}}$ megfeleltetjük egymásnak. Ekkor a 0 és a ∞ pontok rendre az érintkezési pontnak és az azzal átellenes pontnak felelnek meg. (Jobb oldal) A $p = i$ paraméterhez tartozó leképezés fázistere a numerikusan közelített Ljapunov-exponens értéke szerint kiszínezve. A vonzó ciklusok vonzási tartományai nincsenek kiszínezve.

Összefoglalva, az iterált harmadfokú nemlineáris protokoll bemutatott tulajdonságai alapvetően hasonlítanak a másodfokú esethez (ott a $p = 1$ paraméterértéket véve), azonban a 2. ábrán bemutatott fraktál szimmetriája megváltozott: négyfogásos helyett hatfogásossá vált. A teljes p paramétertér feltérképezésével várhatóan még jobban megérthetjük majd a harmadfokú dinamika sajátosságait és a másodfokútól eltérő tulajdonságait. Ez kulcsfontosságú lehet a protokoll alkalmazása szempontjából.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást az Innovációs és Technológiai Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta a Kvantuminformatika Nemzeti Laboratórium, a K124351 sz. és a 2017-1.2.1-NKP-2017-00001 sz. projekt keretében.

Irodalom

[1] T. Kiss, I. Jex, G. Alber and S. Vymětal, Phys. Rev. A **74**, 040301(R) (2006). https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.040301

[2] A. Gilyén, T. Kiss and I. Jex, Sci. Rep. **6**, 20076 (2016). https://doi.org/10.1038/srep20076

[3] T. Kiss, S. Vymětal, L. D. Tóth, A. Gábris, I. Jex and G. Alber, Phys. Rev. Lett. **107**, 100501 (2011).
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.100501

[4] J. M. Torres, J. Z. Bernád, G. Alber, O. Kálmán and T. Kiss, Phys. Rev. A **95**, 023828 (2017).
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.023828

[5] O. Kálmán and T. Kiss, Phys. Rev. A **97**, 032125 (2018).
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.032125

[6] G. Zhu O. Kálmán, K. Wang, L. Xiao, D. Qu, X. Zhan, Z. Bian, T. Kiss, and P. Xue, Phys. Rev. A **100**, 052307 (2019).
https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.052307

[7] A. Gilyén, Egy qubites káosz és kapcsolata a komplex dinamikus rendszerekhez (TDK dolgozat, 2013).