ONK 2021
pp. 54–72.

FEJLESZTŐKÍSÉRLET MATEMATIKAÓRÁN EGY MEGGYŐZŐDÉS FELÜLÍRÁSÁRA

Kiss Márton

Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola,
MTA–ELKH–ELTE Matematikadidaktikai Kutatócsoport

kiss.marton@science.unideb.hu

Absztrakt

Akciókutatásként egy fejlesztőkísérletet terveztem egy kilencedikes osztályban, amellyel az volt a cél, hogy megváltozzon az a sokakban élő téves meggyőződés, hogy minden matematikai feladatnak van, és csak egy megoldása van. A felmérések úgy épültek fel, hogy tükrözték az órákon megteremteni kívánt hozzáállást. Tehát olyan feladatokat is kaptak a diákok, amelyeknél több esettel kellett számolni, illetve észre kellett venni, és tudni kellett kezelni az ellentmondást. A tanulók fejlődésének elemzése során a fő kérdések a következők voltak: Milyen mértékben fejleszthető egy adott témakör kapcsán, hogy egy tanuló felismeri-e a több lehetséges esetet és/vagy az ellentmondást? Ha észreveszi, hogyan kezeli a tanuló a több esetet és/vagy az ellentmondást? Milyen információt kaphatunk a tanulók írásbeli munkája alapján az önellenőrzésről és az önszabályozásról? Az elemzés után úgy tűnt, hogy az utó- és késleltetett tesztnél a kezdeti majdnem nullához képest már körülbelül a csoport fele több esettel dolgozott, illetve rájött az ellentmondásra, és összességében érzékelhető ezen tesztek összképe alapján a szemléletmódbeli változás. Jelentősen befolyásolta a tanulók fejleszthetőségének ütemét és mértékét a tárgyi tudás, amelynél az alapok komoly hiánya több tanulónál jelentkezett. Voltak olyan tanulók, akik a közvetlen fejlődési zónájuk alapján alkalmatlanok az egységes fejlesztésre, illetve voltak olyan tanulók is, akik számára önmagukhoz képest nagyon csekély mértékű az egységes fejlesztés hatása.

Kulcsszavak: matematikai problémamegoldás, meggyőződés, kritikus gondolkodás, metakogníció

Bevezetés

Az oktatás egy lényeges kihívása és feladata, hogy kialakítsa a tanulókban a tudományos világ és a hétköznapi élet összekapcsolásához szükséges megfelelő szemléletet, kritikai és tudatos gondolkodást, alkalmazható tudást. Erős túlzás lenne azt állítani, hogy ezt sikerül teljesítenie az oktatási rendszerünknek. Elismert kritika az is, hogy a tananyag és a követelményrendszer túlzottan ismeretközpontú. Ezek hozzájárulhatnak ahhoz, hogy az ebben a rendszerben könnyen fásulttá váló tanulóknál gyakoriak egy-egy tantárgy eljárásaival, tananyagával kapcsolatos olyan meggyőződések, amelyek nem helytállóak, és amelyek részlegességet, téves tudást adhatnak számukra, így negatívan befolyásolhatják fejlődésüket, teljesítményüket. Ezen meggyőződések felismerése, felülírása és megelőzése rendkívül tudatos, következetes és precíz munkát igényel a pedagógusoktól.

Az utóbbi évtizedekben egyre gyakoribbá váltak azon kutatások, amelyek tárgya a fogalomrendszerek kialakulására, a tudás szerkezetére, változására irányulnak (Korom, 2002). A kutatások ezen irányába illeszkednek a meggyőződések is. „Egy meggyőződés az egyén pszichológiai állapotának tekinthető bizonyos tételek igazságával vagy bizonyos dolgok előítéleteivel kapcsolatban" (Liu, 2010, p. 87).

Schoenfeld (1985, 1992) szerint a tisztán kognitív viselkedés ritka. Azaz, amit gyakran tiszta megismerésnek tekintünk, azt valójában számos tényező alakítja, mint például a motiváció, az érzelmek és a már említett meggyőződések. Az egyénnek a feladatok természetével kapcsolatos nézetei és véleménye befolyásolhatják az intellektuális teljesítményét. Leszűkítve a matematikára, az egyén matematikai világképe alakítja azt, ahogyan a matematikát végzi (Schoenfeld, 1985, 1992). A tanárnak nagy felelőssége van abban, milyen meggyőződések alakulnak ki a diákoknál. A matematikaoktatásnak lehetőséget kell biztosítania arra, hogy minél változatosabb problémahelyzetekkel találja szemben magát a tanuló (Schoenfeld, 2016).

A matematikaórákon megvalósuló, általunk tervezett fejlesztőkísérlet előzménye egy korábbi kutatásom (Kiss, 2019), amely 9. évfolyamos tanulók metakognitív tevékenységeit vizsgálta matematikai feladatoknál. A tapasztalatok többek között azt mutatták, hogy a diákok egy része nincs hozzászokva egy feladat több lehetséges megoldásának vizsgálatához, illetve, ha ellentmondással találkoznak, nehezen ismerik azt fel, és bizonytalanul kezelik. Ezen tapasztalatokra építve terveztünk fejlesztőkísérletet egy matematikából átlagos teljesítményű 9. osztályban, amellyel az volt a cél, hogy megváltozzon az a sokakban élő meggyőződés, miszerint minden matematikai feladatnak van, és pontosan egy megoldása van (Schoenfeld, 1992).

Elméleti háttér

Meggyőződések

A szakirodalomban nem találunk egységes definíciót a meggyőződésekre (beliefs). „Egy meggyőződés az egyén pszichológiai állapotának tekinthető bizonyos tételek igazságával vagy bizonyos dolgok előítéleteivel kapcsolatban" (Liu, 2010, p. 87). Ez az egyén reflektálásának eredményeként tekinthető, és nem feltétlenül tudásalapú vagy igazolt. A szociálpszichológusok a meggyőződéseket a megismerés egységeiként definiálják. „Ezek [az egységek] alkotják az egyén tudásának összességét, beleértve azt, amit az emberek tényeknek, véleményeknek, hipotéziseknek, valamint hitnek tekintenek" (Bar-Tal, 1990, p. 12).

Az előbbi megfogalmazások alapján sejthető, hogy a meggyőződések befolyásolják a tanulmányi teljesítményt. Liu (2010) összegezte az ismeretelméleti meggyőződések kutatásáról szóló eredményeket. Ezek a meggyőződések különböző kontextusban kapcsolódnak a diákok tanulmányi teljesítményéhez, illetve mind az általános meggyőződések, mind a matematikai meggyőződések előre jelezhetik a diákok tanulmányi teljesítményét.

A tanulói viselkedést és teljesítményt a matematikai problémamegoldás során számos tényező befolyásolhatja, köztük a tanulói meggyőződések (Schoenfeld, 1992, 2016). A meggyőződéseknek nincs egységes definíciója a matematikaoktatás területén sem. Schoenfeld (1985, 2016) szerint a meggyőződések olyan nézeteket jelentenek, amelyekkel valaki a matematikához és a matematikai feladatokhoz közelít, és amelyek alakítják az egyén matematikai fogalomalkotását és matematikai viselkedését.

A diákok matematikával kapcsolatos meggyőződéseinek Op't Eynde és munkatársai (2002) szerinti tág és bizonyos mértékig intuitív definíciója: „A diákok matematikával kapcsolatos meggyőződései azok, a tanulók által implicit vagy explicit módon igaznak tartott szubjektív elképzelések, amelyek befolyásolják a matematikai tanulást és problémamegoldást" (p. 16). A meggyőződések nemcsak egyenként, hanem összefonódva is hatnak a matematikai viselkedésre.

Törner (2002) a matematikai meggyőződéseket egy hierarchikus formában rendszerezte. Ebben az általános meggyőződések (a tanításról és a tanulásról), a területspecifikus meggyőződések (pl. geometriáról) és a tantárgyi meggyőződések (a tananyag mennyiségéről és szervezéséről) kölcsönhatásban vannak egymással. Schoenfeld (1985) és Ambrus (1995) az előzőtől valamelyest eltérően négy különböző kategóriára osztja a tanulói meggyőződéseket:

- a tanuló saját magáról (pl. képes vagyok problémákat megoldani);
- a tanulónak a környezetéről (pl. a tanulás versenyszerű);
- a tanulónak a tananyagról (pl. a tanítás sokatmondó);
- és a tanulónak a matematikáról alkotott nézetei (pl. a matematika szabályokon alapul).

A tanulók meggyőződéseinek azonosítására felhasználhatjuk a problémamegoldás során létrejött írásbeli munkájukat. Az, hogy a tanuló hogyan mutatja be a tudását, implicit módon tükrözi a matematikai meggyőződéseket (Csíkos et al., 2011). Schoenfeld (1985) szerint, amikor egy tanuló egy adott döntést hoz egy megoldási eljárás során, azt meggyőződései befolyásolják. A következő helyzetekben várhatunk döntéseket a tanulóktól: (1) a problémás helyzetek azonosítása, (2) a stratégia kiválasztása, (3) a stratégia végrehajtása és (4) a megoldás értékelése (Pólya, 1977). A Pólya-féle problémamegoldó modell mind a négy szakasza igényli a tanulóktól a kritikus gondolkodást.

Kritikus gondolkodás

A kritikus gondolkodás fejlesztése az egyik legfontosabb célja lenne az oktatásnak. Kritikus gondolkodás esetén a gondolkodó javítja gondolkodásának minőségét azáltal, hogy kézben tartja a gondolkodásban rejlő struktúrák működését (Aizikovitsh-Udi, 2010). A pedagógusok elismerik, hogy a kritikus gondolkodás fejlesztésére nagyobb hangsúlyt kellene fektetni a gyakorlatban (Ku, 2009). Felvetődik a kérdés, hogy a kritikai gondolkodást önálló témaként kell-e tanítani, vagy be kell-e építeni egy, az iskolai tantervben már jelen lévő témába. Továbbá ha a kritikai gondolkodás készségeit egy másik témával együtt tanítják, akkor ezeket a készségeket implicit módon, rejtett összetevőként kell-e tanítani, vagy a tanulási tapasztalat explicit részévé kell tenni (Aizikovitsh-Udi, 2019)?

A kritikus gondolkodás tehát nem magától fejlődik, hanem egy tanult képesség. E kompetencia fejlesztéséhez a tanulóknak túl kell lépniük a tankönyvi ismeretek elsajátításán (Ku, 2009). A hagyományos iskolai dolgozatok, vizsgák nem kedveznek a kritikus gondolkodás fejlődésének, mivel gyakran erősen szelektívek, és nagy hangsúlyt fektetnek a tartalmi ismeretek számonkérésére. Akadály a megfelelő értékelés hiánya is, amely hatékonyan és objektíven mérné a kritikai gondolkodást (Ennis, 2003). A gyakorlatban tehát több jelenség gátolja a megfelelő fejlődést, pedig a 2020-as Nemzeti Alaptanterv álláspontja ezügyben sokat ígérő.

„A tanuló fejlessze a logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai és rendszerező gondolkodását" (5/2020. (I. 31.) Korm. rendelet, p. 328). Így szól a NAT 2020 matematikára vonatkozó részének 5. alapelve, amely lényegében a kritikus gondolkodás összetevőit fogalmazza meg. A matematika területén a kritikus gondolkodás olyan technikai eszköz, mint az eredmények helyességének ellenőrzése, egy adott feladat értékelése, összehasonlítás, következtetés, értelmezés és alkalmazás, megoldási stratégiák összessége (Aizikovitsh-Udi, 2010). A kritikus gondolkodás fogalma nagyon közel áll a metakogníció fogalmához.

Metakogníció

A metakogníció tulajdonképpen a mentális folyamatainkról való gondolkodást, vagyis a reflektivitás tudatos elemeit jelenti (Szendrei, 2005). Flavell és munkatársai (2002) 20 évnyi vizsgálat után megkülönböztették a metakogníció mint kognícióra vonatkozó kogníció két fő összetevőjét, nevezetesen a metakognitív tudást (deklaratív metatudás) és a metakognitív készségeket (procedurális metatudás vagy metakognitív stratégiák). A metakognitív tudás a megismerésről való tudásból áll (egyénre, feladatra, stratégiákra vonatkozóan), a metakognitív készségek pedig a saját kognitív tevékenységek megfigyelésével (nyomon követés/monitoring), ellenőrzésével és önszabályozásával (tervezés, irányítás, értékelés) kapcsolatos végrehajtókészségeket jelenti (Csíkos, 2016; Efklides, 2006; Zhao et al., 2019).

A metakogníció meghatározó előrejelzője a tanulásban és a problémamegoldásban nyújtott teljesítménynek. Korábbi tanulmányok kimutatták, hogy a metakognitív tevékenységekben való részvétel pozitív kapcsolatban állt az összes releváns stratégia használatával. A problémamegoldó stratégiák teljes mértékben közvetítő változónak bizonyultak a metakogníció és a teljesítmény között (Sperling et al., 2004, Zhao et al., 2019). Mindezek ellenére nem kap kellő hangsúlyt a metakogníció szerepe a tanítási gyakorlatban.

Depaepe és munkatársai (2010) kimutatták, hogy a tanárok ritkán, vagy egyáltalán nem fordítanak figyelmet egy-egy metakognitív készség használatának „hogyan" és „miért" kérdéseire. Dignath és Büttner (2018) megerősítették, hogy a tanárok főként kognitív és csak nagyon kevés metakognitív stratégiát tanítanak. Pólya (1977) problémamegoldó modelljének tanítása és alkalmazása egy összetett lehetőséget jelenthet a metakognitív stratégiák beépítésére.

A matematikatanítással kapcsolatban különösen a megfigyelés (nyomon követés/monitoring) mint metakognitív stratégia szerepét hangsúlyozzák (Desoete & De Craene, 2019; Schoenfeld, 1987,). Pólya (1977) és Schoenfeld (1985) gondolatait beépítve négy szakaszt különböztetünk meg a problémamegoldásban: (1) a probléma felmérése és megértése, (2) a megoldás tervezése és a cselekvések kiválasztása, (3) a megoldás menetének szabályozása és végrehajtása, (4) a tervezett döntések és eredmények értékelése, ellenőrzése. A megfigyelés mind a négy fázisban előfordul, és a saját kognitív tevékenységek folyamatos értékelésére utal azzal a céllal, hogy szabályozási folyamatokat indítson el (Schoenfeld, 1985). A megfigyelés tehát kritikus gondolkodást igénylő tevékenység a matematikai problémamegoldásban. A hibás monitoring tevékenység a megfelelő tartalmi tudás aktiválásában és a kognitív folyamatok szabályozásában hiányosságokhoz vezethet (Hacker et al., 2008).

A metakognitív tevékenységek esetében, csakúgy, mint a kritikus gondolkodás esetén, szintén a megfelelő értékelés hiányáról beszélhetünk, holott az oktatásban az értékelés módszerei egyre nagyobb figyelmet kapnak.

Értékelés

Az értékelés olyan folyamat, amely során a tanárok információt szereznek a tanulók tudásáról, attitűdjeiről vagy készségeiről. Az értékelés „a bizonyítékok összegyűjtésének, értelmezésének és felhasználásának folyamata a tanulók oktatásban nyújtott teljesítményének megítéléséhez” (Harlen, 2007, p. 11). A megfelelő értékeléssel azonosítani lehet a tanítási szükségleteket, elősegíthetjük a diákok tanulását, a visszajelzést a tanulók fejlődéséről, valamint a tanárok számára a tanítási tervek kidolgozását (Ennis, 2003).

Az értékelések különböző szerepük szerint besorolhatók szummatív vagy formatív kategóriába. A szummatív értékelés (assessment of learning) az előzetesen meghatározott normák, feladatok vagy célok elérését méri. Egy adott időpontig összegyűjtött eredményeket összegzi, hogy összehasonlító vagy számszerű értékeléseket adjon (Taras, 2005). A formatív értékelés (assessment for learning) olyan osztálytermi gyakorlat, amelyben az értékelést a tanulók tanulási szükségleteinek azonosítására használják, hogy a tanítást és a tanulást ennek megfelelően lehessen alakítani (Black & Wiliam, 2009). A formatív értékelés gazdag információáramlást teremthet a tanulók és a tanárok között, amellyel javíthatják a tanulás és tanítás minőségét (metakognitív folyamatok, problémamegoldás stb.) (Burkhardt & Schoenfeld, 2018).

A formatív értékelés hatását nehéz értékelni, és rendszeres megvalósítása nehéz feladat. Olyan tudást és készségeket igényel a tanár részéről, amelyek túlmutathatnak egy bizonyos szinten, pedig a metakognitív tevékenységek és a kritikus gondolkodás fejlesztésére is hatást gyakorolhatnának. Ennek sikeres alkalmazásához érzékenynek kell lenni többek között a tanulói meggyőződésekre is. Ezt gátolja, ha a tanárok nincsenek tisztában a tanulók előzetes ismereteivel, naiv elméleteivel (Korom, 1997).

Az értékelési kompetencia tehát a tanárok egyik kulcskompetenciájává vált. Ambrus (1995) szerint az értékelés sokkal több kell legyen az osztályzatokkal történő visszajelzésnél. Az ellenőrzés és értékelés céljai a matematikaoktatásban a következők (Ambrus, 1995):

– a matematikatanulás-tanítás tartalmára és módszereire vonatkozó döntések elősegítése;
– a matematikaóra légkörét befolyásoló döntések elősegítése;
– a fontos részek kiemelése, közvetítése;
– az osztályozás.

A Vigotszkij (1967) nevéhez fűződő legközelebbi fejlődési zóna jelentéstartalmában messze nem az érdemjeggyel történő értékelés kap hangsúlyt. Vigotszkij (1967) fontosnak tartotta, hogy a kutatások ne csak az aktuális fejlettségi szintet mérjék a tanulóknál. „Mint a kertésznek, ha meg kívánja ítélni kertjének állapotát, nem szabad csupán a kifejlett gyümölcsöt hozó almafákat tekintenie, hanem figyelembe kell vennie a fejlődő fákat is …” (Vigotszkij, 1967, p. 271). A tanuló aktuális és potenciális fejlettségi szintje közötti távolság definiálására Vigotszkij a legközelebbi fejlődési zónát vezette be. A diák aktuális fejlettségi szintjének meghatározása az általa önállóan megoldott feladatokon keresztül történik. Ezután a potenciális fejlettségi szint meghatározásához megfigyelik, hogy a tanuló hogyan old meg egy, az előzőnél nehezebb feladatot, miközben a tanár irányítókérdésekkel vagy kidolgozott példákkal segít. Az elmélete szerint egy tanuló egy adott „szakaszon" belül csak az arra vonatkozó legközelebbi fejlődés zónájáig juthat el.

A kutatás célja

A fejlesztőkísérlet célja az volt, hogy felülírja a vizsgált osztályban azt a meggyőződést, miszerint minden matematikai feladatnak van megoldása, és pontosan egy megoldása létezik (Schoenfeld, 1992). A kutatás célja pedig elemezni ennek a fejlesztőkísérletnek a tanulókra gyakorolt hatását a kutatási kérdések mentén.

Kutatási kérdések

1. Milyen mértékben fejleszthető egy adott témakör kapcsán, hogy egy tanuló felismeri-e a több lehetséges esetet és/vagy az ellentmondást a feladat megoldása során?
2. Ha észreveszi, hogyan kezeli a tanuló a több esetet és/vagy az ellentmondást a megoldás levezetésében?
3. Milyen információt kaphatunk a tanulók írásbeli munkája alapján az önellenőrzésről és az önszabályozásról mint metakognitív tevékenységekről?

A kutatás módszeréről, körülményeiről

A fejlesztőkísérlet akciókutatás volt. Egy akciókutatás általában kis mintával és kontrollcsoport nélkül valósul meg, és a módszer célja, hogy minél jobban körüljárjon egy tanítási gyakorlathoz kapcsolódó kérdést, illetve kísérletet tegyen egy problémahelyzet javítására, a változáshoz szükséges tudás létrehozására vagy az elmélet és gyakorlat közötti híd megépítésére. Az akciókutatás egyre népszerűbb azon gyakorló tanárok körében, akik kutatások aktív résztvevői szeretnének lenni.

Minta és körülmények

Az akciókutatás a tanítási gyakorlatom során történt 2019-ben egy 9. évfolyamos osztályban. A minta választása azért esett 9. osztályosokra, mert fontos, hogy már a középiskola kezdő évfolyamában képet kapjunk a tanulók meggyőződéseiről, és időben beavatkozzunk, ha szükséges. Az akciókutatásban tehát tanári és kutatói szerepkörben vettem részt, amely egy kisvárosi szakgimnázium műszaki irányultságú 9. osztályában valósult meg. Az osztályt 29 fiú alkotta, akik matematikából átlagos teljesítményűnek tekinthetők. Az osztályátlag félévkor 3,10 volt, év végén pedig 3,14 lett. Az osztálynak heti három matematikaórája volt. Az akciókutatás megkezdése előtt már látogattam az osztály óráit, illetve tartottam nekik 3 órát a függvények témakörében. Az osztályt csak az akciókutatás ideje alatt tanítottam. Kontrollcsoport nem volt.

Fejlesztőtevékenységek bemutatása

A fejlesztőkísérlet egy teljes témakör tanítását ölelte fel a középszintű, normál, kilencedikes tananyagból. A témakör a geometrián belül a háromszögek, négyszögek, sokszögek témaköre volt. A fejlesztés során a normál tananyagtól nem történt eltérés, a középszintű érettségi követelményeknek megfelelő tanmenet szerint tanult az osztály, és minden órán előfordult a pontosan egy megoldással rendelkező feladatok mellett legalább egy olyan feladat, amelynek több megoldása volt, és/vagy ellentmondást tartalmazott. Az említett feladatok illeszkedtek a témakörhöz és a követelményekhez. Nem hangoztak el olyan mondatok az órákon, ami felfedte volna, hogy egy fejlesztőkísérlet történik, illetve, hogy egy meggyőződést akarunk felülírni. Így az a tényező, hogy a tanulók tudatában lettek volna a fejlesztés céljának, nem befolyásolhatta az eredményeket. Természetesen a feladatok megoldásának megbeszélésekor előfordulhattak olyan mondatok, mint a következők: „Miért ne lehetne egy feladatnak több megoldása?" „Létezhet-e olyan eset, hogy egy feladatnak nincs megoldása?" A fejlesztési folyamathoz hozzátartozott az is, hogy egy tesztet követő órán megtörtént az adott tesztben előforduló feladatok megoldásának megbeszélése.

Mérőeszközök

Ahogyan azt az 1. táblázat bemutatja, a fejlesztési folyamat egy előteszttel indult. Ezt követte 11 tanóra, amelyből az ötödiken írtak a tanulók egy köztes tesztet, majd a végén egy utótesztet, s végül másfél hónappal később egy, a kontextusból kiszakított késleltetett tesztet. A teszteket a témavezetőmmel együtt állítottuk össze. A köztes és az utóteszt egyben dolgozatok is voltak, amelyekre jegyet kaptak a tanulók. A késleltetett teszt be lett küldve az osztályba a tanáruk által, amit önálló órai munkaként oldottak meg. A teszteket egyrészt szummatív értékelésre használtuk, másrészt formatív értékelésre, mert az ott látott eredményekhez és tapasztalatokhoz igazítva kerültek megtervezésre a következő tanórák.

1. táblázat
A kutatásban megvalósult mérések és azok időbeli ütemezése

Mérőeszköz	*Előteszt*	*Köztes teszt*	*Utóteszt*	*Késleltetett teszt*
Óra sorszáma	0. tanóra	5. tanóra	12. tanóra	29. tanóra
Dátum	2019. 03. 11.	2019. 03. 25.	2019. 04. 15.	2019. 06. 03.

Az előteszttel együtt az összes teszt úgy épült fel, hogy tükrözte az órákon megteremteni kívánt hozzáállást. Tehát olyan feladatokat is kaptak a diákok a felmérésekben, amelyeknél több esettel kellett számolni, illetve észre kellett venni, és tudni kellett kezelni az ellentmondást. Mint ahogyan a tanórákon, úgy a dolgozatokban sem csak a több megoldást és/vagy ellentmondást tartalmazó feladatok kaptak helyet, de az elemzésben ezeket a feladatokat emeltük ki.

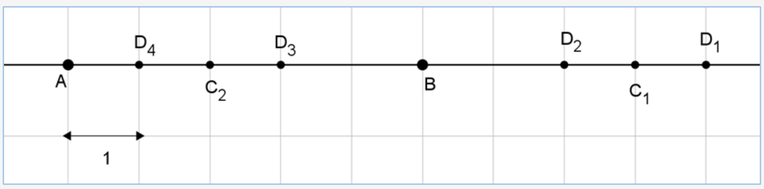
Az előteszt öt geometriai feladatból állt, amelyből az elsőnek több megoldása volt, a második pedig egy ellentmondást tartalmazott. A feladatokat általános iskolai ismeretekkel meg lehetett oldani. A köztes teszt két feladatból állt, amelyből az egyik több megoldást és ellentmondást tartalmazott. Az utóteszt három feladatból állt, amelyből az egyik több megoldást és ellentmondást is tartalmazott. A késleltetett teszt egyetlen feladata megegyezett a köztes teszt alkalmas feladatával. Az elő- és utótesztre 45 perce volt a diákoknak, a köztes tesztre 25 perce, a késleltetett tesztre pedig 10 perce.

A tesztek alatt írásban levezetendő feladatmegoldásból álló felméréseket értünk. A megoldások során az ellentmondást mindig egy esetként tekintettük.

Az előteszt 1. feladata

Anna, Béla, Cili és Dani egy egyenes mentén sorakoztak fel. Annától Béla 5 méterre, Bélától Cili 3 méterre, Cilitől pedig Dani egy méterre van. Hány méterre lehet Annától Dani?

Megoldás:
A feladatnak négy különböző megoldása van a gyerekek elhelyezkedésétől függően (lásd 1. ábra). Annától Dani vagy 1 méterre vagy 3 méterre vagy 7 méterre vagy 9 méterre van.



1. ábra
Az előteszt 1. feladatának megoldása

Az előteszt 2. feladata

Egészítsd ki a táblázatot! (A táblázatban az α, β, γ egy háromszög belső szögei, az α', β', γ' pedig ugyanazon háromszög külső szögei.)

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	50°				70°
	80°		110°	120°	

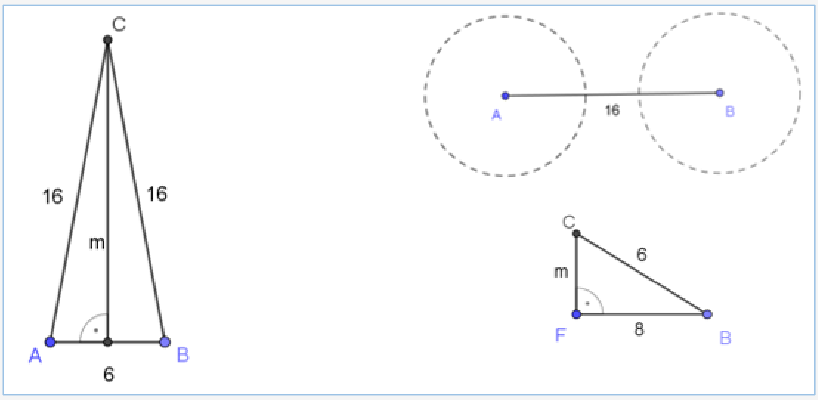
Megoldás:

Egy háromszög belső és külső szögeire vonatkozóan három összefüggésnek kell megfelelni (α+β+γ=180°; α'+β'+γ'=360°; α+α'=180°). A táblázat kitölthető, ha ezek közül két összefüggést használunk, de a harmadik segítségével ellenőrizhető a válasz. A táblázat első sorából hiányzó értékek sorrendben: 110°; 160°; 130°. A második sorban ellentmondást kapunk a szögekre vonatkozó összefüggésekből, tehát ilyen adatokkal nem létezik háromszög.

Köztes teszt

Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 6 cm és 16 cm. Mekkora az alaphoz tartozó magasság hossza?

Megoldás:



1. ábra

A köztes teszt adott feladatában megjelenő két eset

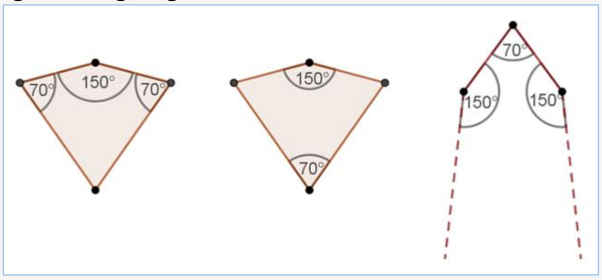
Ebben a feladatban két különböző esetet kell figyelembe venni, mivel a szövegből nem derül ki, melyik érték tartozik a háromszög alapjához és melyik a száraihoz (lásd 2. ábra).

Az első esetben az alaphoz tartozó magasság (m) a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározható: 32+m2=162, amiből m≈15,7 cm.

A második esetben azonban ellentmondást kapunk. A háromszög-egyenlőtlenséggel belátható (6+6≯16), hogy nincs olyan háromszög, amelynek a szárai 6 cm-esek, az alapja pedig 16 cm.

Utóteszt

Egy deltoid két belső szögének nagysága 70° és 150°. Mekkora a deltoid másik két belső szöge?



3. ábra

Az utóteszt adott feladatában megjelenő három eset

Megoldás:
Ebben a feladatban három különböző esetet kell figyelembe venni (lásd 3. ábra), mivel a szöveg nem tért ki rá, hogy az egyes szögek hol helyezkednek el. Az első esetben a hiányzó szög nagysága 70°. A második esetben a két hiányzó szög egyaránt 70°-os. Ez az eset így tulajdonképpen nem is különbözik az elsőtől. A harmadik esetben pedig ellentmondást kapunk, ami a konvex négyszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tétel segítségével igazolható (150°+150°+70°>360°).

Késleltetett teszt
Ugyanaz volt, mint a köztes teszt vizsgált feladata.

Eljárások

A tanulók meggyőződéseit implicit módon azonosítottuk, amelyhez a problémamegoldás során született tanulói levezetéseket, magyarázatokat használtuk fel. Azaz lényegében a matematikai tudás állt a középpontban, és abból fejtettük vissza, milyen meggyőződések befolyásolták a diákokat. Az akciókutatáshoz felhasznált elemzéseknél a tanulók áthúzott munkáit, valamint a tisztázati részeket is figyelembe vettük, és mindezek alapján értékeltünk és következtettünk. A diákok számára készült értékelésnél azonban csak a levezetések azon részei érhettek pontot, amelyek nem kerültek áthúzásra. Azoknál a feladatoknál, ahol több esetet és/vagy ellentmondást tartalmazott a megoldás, ott minden különböző eset pontokat ért, illetve pontokat ért az ellentmondás megállapítása és indoklása is. A tesztek feladatainak pontozása elsősorban a nehézségi szinttől függött, és nem az esetszámoktól.

Vizsgáltuk az osztály eredményeit, illetve az eredmények alapján kiválasztottunk négy különböző teljesítményű tanulót, akiknél esettanulmányként követtük végig a fejlesztési folyamatot.

Az elemzés során a „foglalkozott az ellentmondásra vezető esettel” kategória nem feltételez tudatosságot a tanulóktól. Tehát ezen kategórián belül anélkül is foglalkozhattak az esettel a diákok, hogy előbb vagy utóbb észrevették volna az ellentmondást.

A „felismerte az ellentmondást” kategória már tudatosságot feltételez. A tanuló áthúzta az ellentmondásos esetet, vagy odaírta például hogy „nem létezik”, esetleg meg is indokolta azt.

A több esettel foglalkozók kategóriájában az ellentmondás is egy esetnek számított.

„Az ellentmondást a megoldás részeként kezelte” kategóriába soroltuk azokat a tanulókat, akik nem húzták át az ábrájukat és az esetleges számolást, hanem legalább annyit odaírtak, hogy például „ilyen háromszög nem létezik.”

Az önellenőrzés és az önszabályozás mint metakognitív tevékenységek mozzanatára az írásbeli munkák alapján leginkább egy-egy tanulói áthúzásból, javításból volt lehetőségünk következtetni. Így az áthúzás és javítás nélkül dolgozó tanulók többsége nem szolgált plusz információval számunkra ebben a tekintetben.

Az „áthúzás és módosítás történt” kategória azt jelenti, hogy a tanuló a levezetésének egy részét vagy az eredményt áthúzta, hogy helyette a tisztázatban szereplő változtatást vegye figyelembe a tanár. Ha valaki a megoldása során áthúzta az ellentmondásos esetet, az a kódoláskor nem tartozott a „módosítás hibára vonatkozott” kategóriához, bár attól még a tanulók tekinthették annak.

A fejlesztési folyamat során nyújtott teljesítmények alapján kiválasztottunk négy tanulót, akiket eredményeik szempontjából esettanulmányként is elemeztünk. Négy olyan tanulót akartunk kiválasztani, akik különböző fejlődési szinteket jártak be a folyamat alatt, és teljesítményük egyfajta típust jelent, azaz bemutatásuk által közelítőleg lefedhettük az osztályban megfigyelhető teljesítményeket. Az eredmények mélyebb elemzése érdekében a tanulók fejlődési folyamatát 4 szakaszra osztottuk: (1) a feladat megértése; (2) a témában szükséges tartalmi ismeretek elsajátítása; (3) több eset és ellentmondás felismerése; (4) e kérdések tudatos kezelése és magyarázata. A fejlesztéstől elvárt szint legalább a 3-as volt, hiszen a fejlesztőkísérlet célja az volt, hogy a diákok felismerjék, ha egy feladatnak több megoldása van, és/vagy ellentmondást tartalmaz.

A fejlődési szinteket az előtesztek és korábbi kutatásom (Kiss, 2019) tapasztalatai alapján határoztuk meg. A feladatok megoldása sorrendben azt a 4 alaplépést igényli, amelyet az említett 4 szint képvisel, ezért a fejlődést is erre vetítettük ki. Az előteszt eredményei alapján állapítottuk meg, hogy a tanulók milyen szintről indultak. Az elemzéshez Vigotszkij (1967) elméletét is használtuk. A köztes és az utótesztet alkalmasnak tartottuk arra, hogy az akkori nagymértékű gyakorlás után nyújtott teljesítménye a tanulóknak megmutassa a lehetséges fejlődési szintjüket. A késleltetett teszt pedig, mivel másfél hónap után és kontextusból kiszakítva került megíratásra, jól mutathatta, hogy mi az aktuális fejlettségi szintje a tanulóknak. Mérési eszközeink korlátjai alapján csak akkor jelenthettük ki, hogy egy tanuló legközelebbi fejlődési zónája tartalmazott egy adott szintet, ha azt legalább egy teszt alkalmával elérte.

Eredmények

Az osztály eredményei az „ellentmondásos eset" szempontjából

Az előteszt 2. feladatában, a köztes, az utó- és a késleltetett teszt bemutatott feladataiban találkozhattak a tanulók ellentmondással. Az előteszt 2. feladatánál a táblázat 2. sora tartalmazta az ellentmondást. A tanulók munkáiban nagyon sok módosítás látható ebben a sorban, (ami arra enged következtetni, hogy a tanulók egy részének akár feltűnhetett, hogy „valami nincs rendben"), ám mégis csak egyetlen tanulóról állíthatjuk azt, hogy felismerte az ellentmondást. Azonban ő is inkább módosította az adatokat, hogy elkerülje az ellentmondást. Áthúzta az adott 120°-os szöget, majd módosította 100°-ra, hogy minden összefüggés teljesüljön a háromszög belső és külső szögeire (lásd 4. ábra).

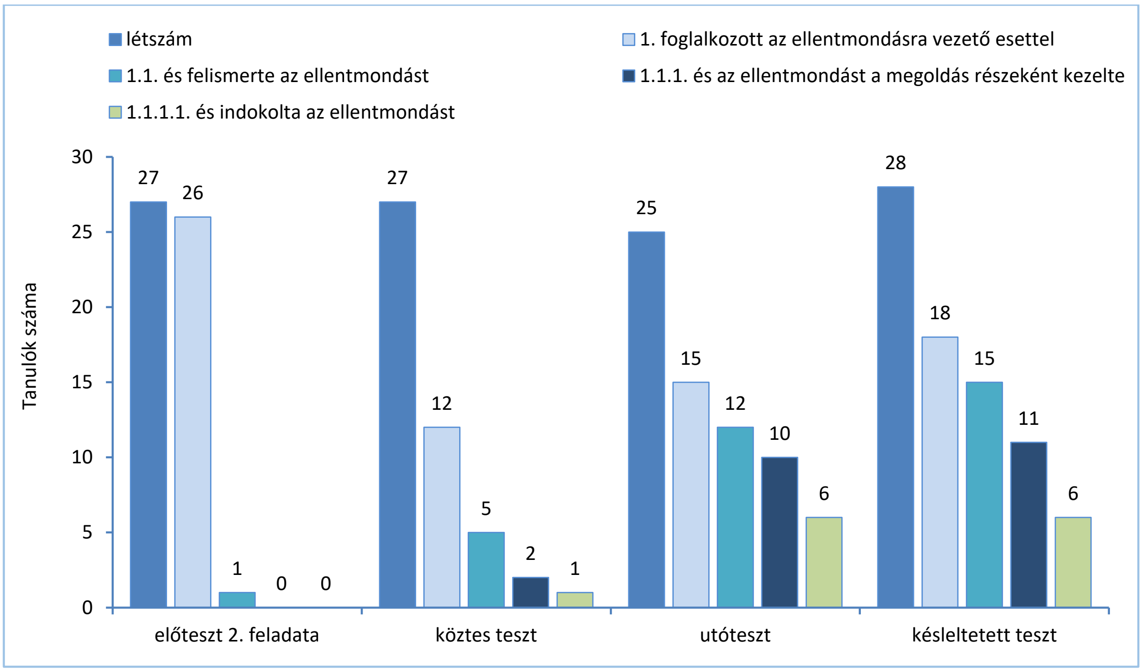
α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	50°	110°	160°	130°	70°
70°	80°	30°	110°	~~120°~~ 100°	150°

4. ábra
Az előteszt 2. feladatában a tanuló módosítja az adatokat, hogy feloldja az ellentmondást

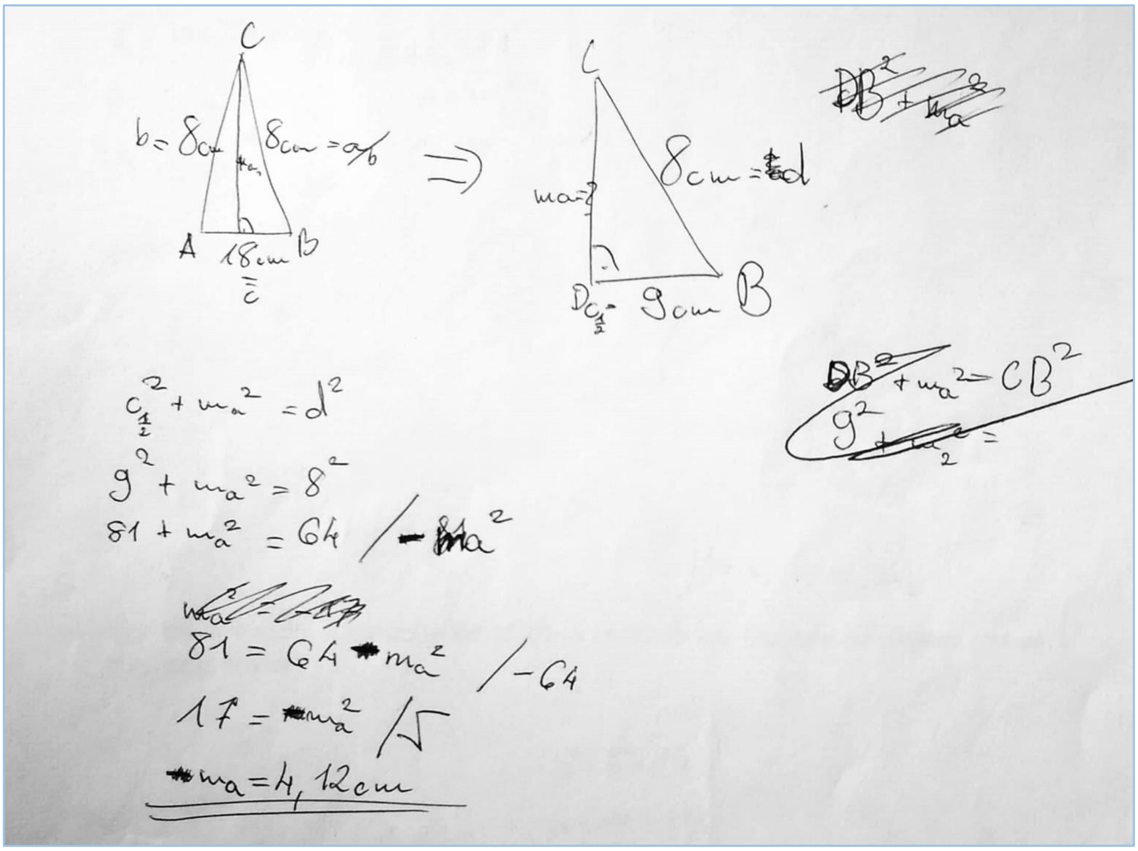
A többi három tesztben nem „kiegészítős", hanem „kidolgozós" feladatban találkozhattak a tanulók ellentmondással, ezért lehet a „foglalkozott az ellentmondásra vezető esettel" kategóriához tartozó érték kimagasló az előteszt 2. feladatában (lásd 5. ábra). Az 5. ábra bemutatja, hogy az ellentmondások felismeréseinek és a megfelelő kezeléseinek a száma nőtt a fejlesztőkísérlet során.

Az eredményekhez hozzá kell tenni, hogy például a köztes tesztnél, amikor 12 diák foglalkozott az ellentmondásos esettel, közülük 5 olyan tanuló volt, aki nem alkalmazta helyesen a Pitagorasz-tételt. Ez megakadályozhatta őket abban, hogy fel is ismerjék az ellentmondást. A 6. ábrán látszik, amikor egy tanuló az ellentmondásos esettel dolgozott (8 cm-es szárak, 18 cm-es alap). Hiába rajzolt külön derékszögű háromszöget is, akkor sem tűnt fel számára az ellentmondás, hogy az átfogó (8 cm) rövidebb egy befogónál (9 cm). A Pitagorasz-tételbe „jól" helyettesített be, de ebben az esetben nem kaphatott pozitív végeredményt a hiányzó oldalra, az m_a-ra. Nem is kapott, és ez „nem tetszett" neki. Áthúzta a negatív előjelet, hogy számára egy elfogadható eredményt kapjon. Tehát inkább önkényesen befolyásolta az eredményt, mintsem megállapítsa az ellentmondást.

Akik felismerték az ellentmondást, azon diákok körülbelül 83%-a az utótesztnél, körülbelül 73%-a pedig a késleltetett tesztnél az ellentmondást már a megoldás részeként tekintette, míg a köztes tesztnél ez az érték csak 40% volt. Az ellentmondás bizonyos szintű indoklására az előző kategória tanulóinak közel fele vállalkozott az utolsó három tesztnél. A köztes tesztnél ez mindössze egy tanulót jelentett, az utó- és késleltetett tesztnél 6-6 tanuló indokolt.



5. ábra
A tesztek eredményei az ellentmondások felismeréséről és kezeléséről



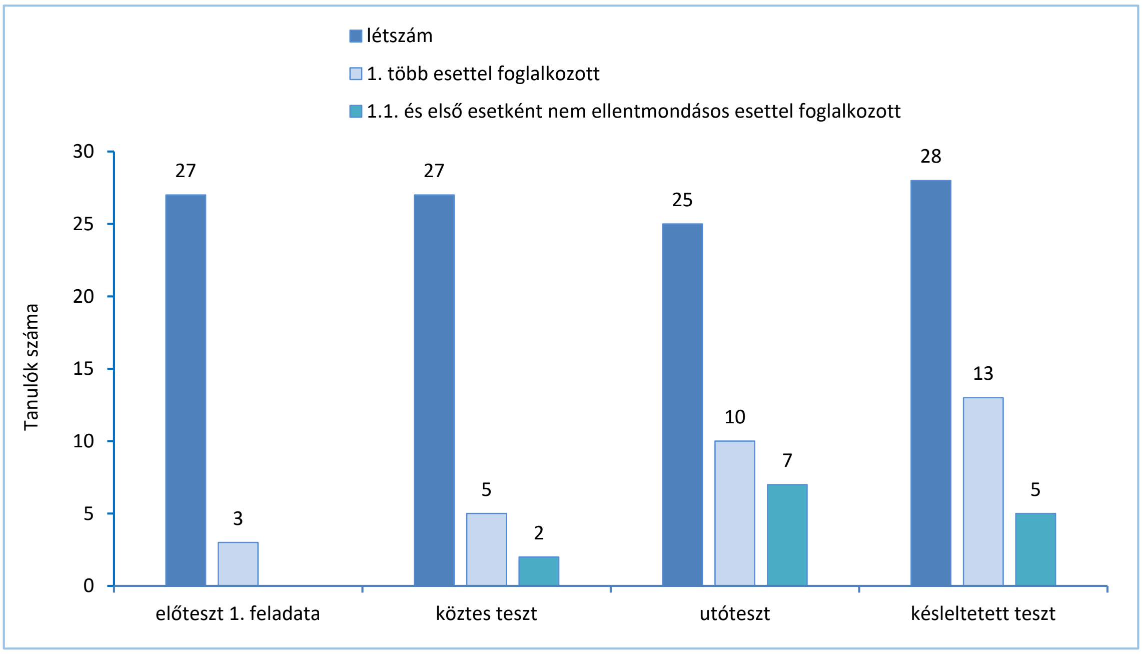
6. ábra
A tanuló a köztes tesztben módosította a negatív előjelet

Az osztály eredményei a „több eset” szempontjából

Az előteszt 1. feladatát leszámítva a többi teszt vizsgált feladatai úgy tartalmaztak több esetet, hogy azok közül az egyik eset mindig ellentmondás volt. Az ellentmondás felismerése és kezelése tehát befolyásolta a több esetre vonatkozó eredményeket.

Az előteszt 1. feladatánál mindössze 2 tanuló adott egynél több megoldást. Ők viszont megadták mind a négyet. Volt még egy tanuló, akinek az áthúzott munkájából látszik, hogy rájött a több lehetséges esetre, végül csak egyet adott meg, ugyanazt az „elvárt” egy megoldást, mint amit azok a társai adtak, akik egyetlen esetet vettek számításba.

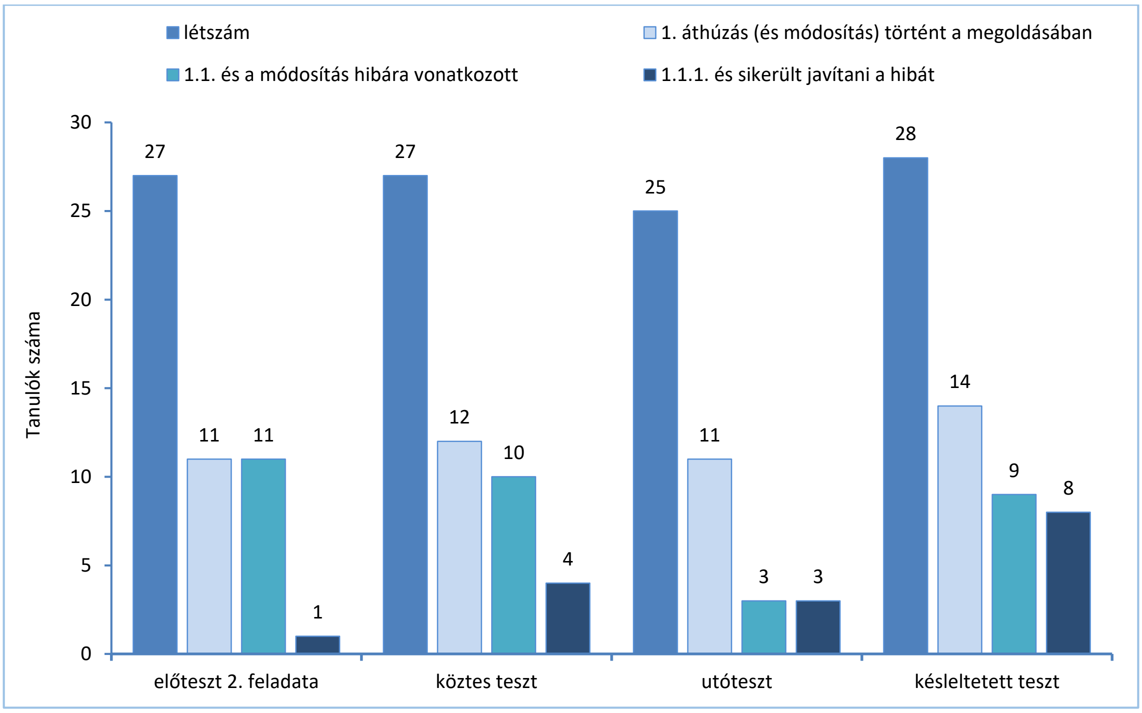
A 7. ábrán látható, hogy az előteszt 1. feladatánál 3 olyan tanuló volt, akik több esettel foglalkoztak. Ez a kategória magában foglalja azokat a diákokat is, akik bár felírták, végül áthúzták a több esetet a papírjukon. A köztes tesztnél sem volt jobb a helyzet. Az utó- és késleltetett tesztnél viszont már a tanulók 40%-a, illetve 46%-a foglalkozott több esettel a megoldás során. Előbbiek 70%-a, utóbbiak körülbelül 38%-a úgy tette ezt meg, hogy első esetként már kaptak egy lehetséges megoldást, tehát tudatosan kereshettek további esetet. Azon tanulók, akik első esetben ellentmondást kaptak, és utána vizsgálták másik esetet is, abból a meggyőződésből is vizsgálhatták azt, miszerint minden matematikai feladatnak van megoldása, de akár tudatosan is kereshették a több esetet.



7. ábra
A tesztek eredményei a több esetről

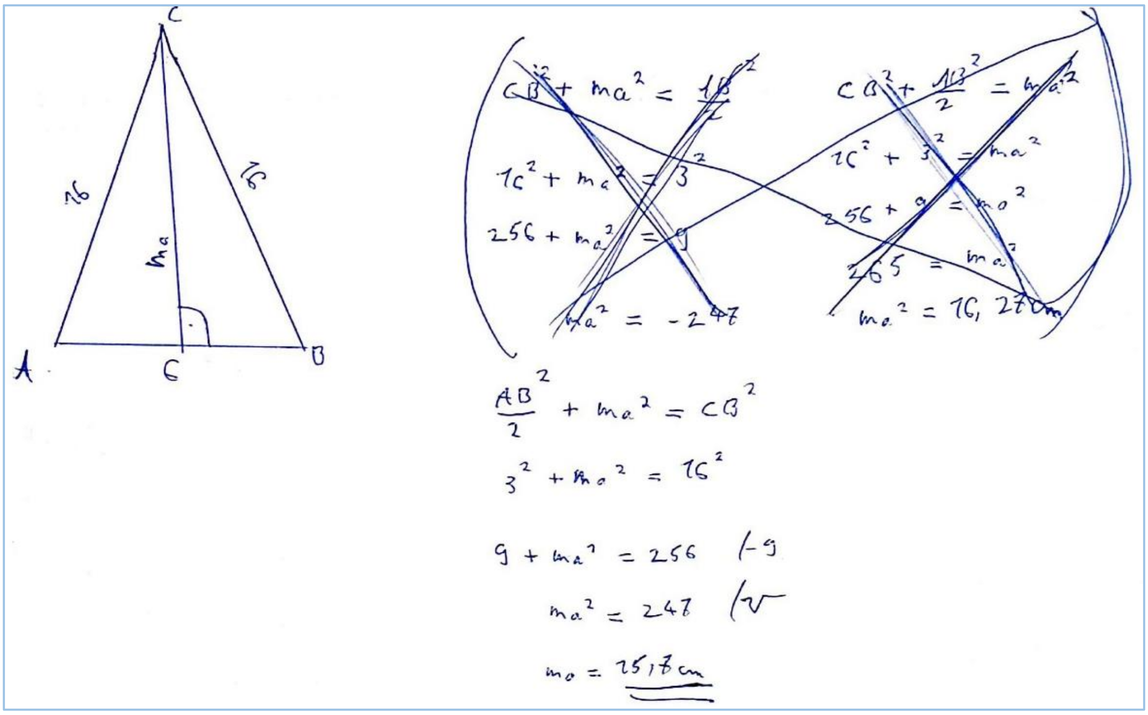
Az osztály eredményei az önellenőrzés és az önszabályozás szempontjából

Az önellenőrzésre és az önszabályozásra mint metakognitív tevékenységekre vonatkozó eredményeket a 8. ábra foglalja össze. Ezen látható, hogy közel ugyanannyi tanuló húzott át, esetleg módosított valamit a megoldásában a különböző teszteknél. Ez vonatkozhatott rajzra, számolásra, eredményre vagy a Pitagorasz-tételre, de jelenhette az ellentmondásos eset áthúzását is. Ahhoz, hogy egy tanuló eljusson legalább az áthúzásig, önellenőrzést és önszabályozást kellett végezzen. Az utó- és késleltetett tesztnél a javítási kísérletek szinte minden esetben sikeresek voltak (lásd 8. ábra), a köztes tesztnél ez az arány 40% volt, és leginkább a Pitagorasz-tétel helyes felírása okozta a gondot. A késleltetett tesztnél inkább már csak számolási hibák voltak, ami azt mutathatta, hogy a tárgyi tudás stabilabb lett.



8. ábra
A tesztek eredményei az önellenőrzésről és az önszabályozásról

A 9. ábrán egy példa látható arra, amikor egy tanuló módosította a munkáját, a módosítás hibára vonatkozott (Pitagorasz-tétel), és sikerült javítania azt. Az ábrán látszik, hogy az első két, áthúzott esetben nem megfelelően írta fel a tanuló a Pitagorasz-tételt. A hibára az eredményei értelmezéséből (negatív, illetve hosszabb, mint az átfogó) jöhetett rá. Ezután harmadjára is próbálkozott a megoldással, s végül sikerrel járt.



9. ábra
A tanuló a köztes tesztben felismerte a hibáját, amit kitartóan és sikeresen javított

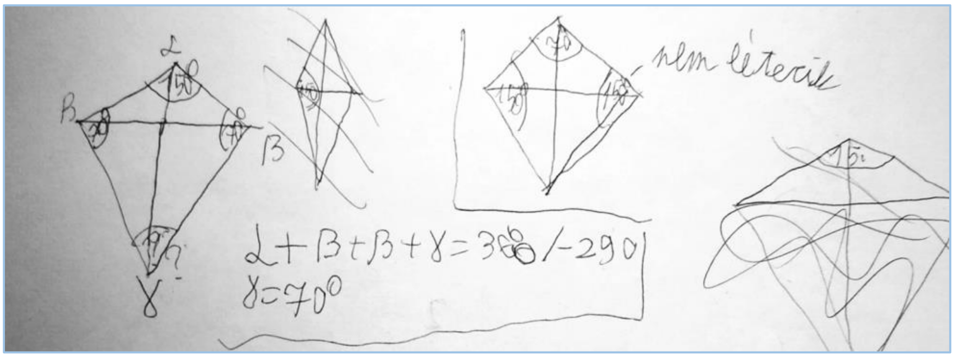
A kiválasztott négy tanuló eredményeiről

Az első tanuló (T1) jellemzése:

T1: Az egyetlen tanuló, akinek már az elő- és köztes teszt alapján a 4-es szinthez tartozott az aktuális fejlettségi szintje. Vizsgált feladatai hibátlanok voltak, igényesen kidolgozott, pontos megoldásokkal. Minden tesztnél több esettel foglalkozott, felismerte az ellentmondást, megfelelően kezelte és indokolta azokat. Az elő- és a köztes teszthez képest az utó- és a késleltetett tesztben még fokozta a részletességét és a precízségét. Bár ez a tanuló szintet már nem léphetett, ennek ellenére az adott szinten belül történhetett fejlődés az esetében. Félévi osztályzata 5-ös volt, év végi osztályzata is 5-ös lett.

A második tanuló (T2) jellemzése:

T2: Az előtesztben csak egy megoldást adott meg, illetve hiányzott a megfelelő tartalmi tudása az ellentmondás felismeréséhez. Nem volt hozzászokva az ilyen típusú feladatokhoz. A köztes tesztben helyesen alkalmazta a Pitagorasz-tételt. Az órákon voltak ügyes hozzászólásai a feladatokhoz, azonban rendszeresen fegyelmezési problémák adódtak vele. Bár a köztes tesztben még nem tért ki több esetre és az ellentmondásra, de a Pitagorasz-tétel helytelen használatát észrevette a munkájában, és megfelelően javította azt. Ennek feltétele volt a szükséges tárgyi tudás, illetve bizonyos szintű kritikus gondolkodás, hogy önellenőrzés és önszabályozás történjen. Ahogy a 10. ábra bemutatja, az utótesztben úgy tűnt, hogy tudatosan kereshette a több esetet, mert egy megoldás után vizsgált másik esetet is. Az ellentmondást jelentő esetet is a megoldás részének tekintette, de az ellentmondás okát külön nem jegyezte le. A késleltetett tesztnél ezt a teljesítményt javítani tudta. Ott már indokolta is az ellentmondást az egyenlőszárú háromszögre vonatkozó feladat esetén: „nem létezik [a háromszög], mert a két szár összege kevesebb 16-nál”.



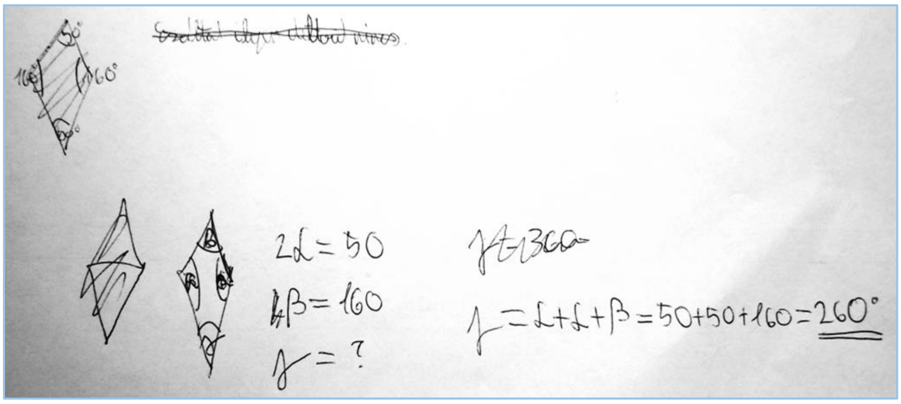
10. ábra

A tanuló az utótesztben több esetet keresett, és felismerte az ellentmondást is

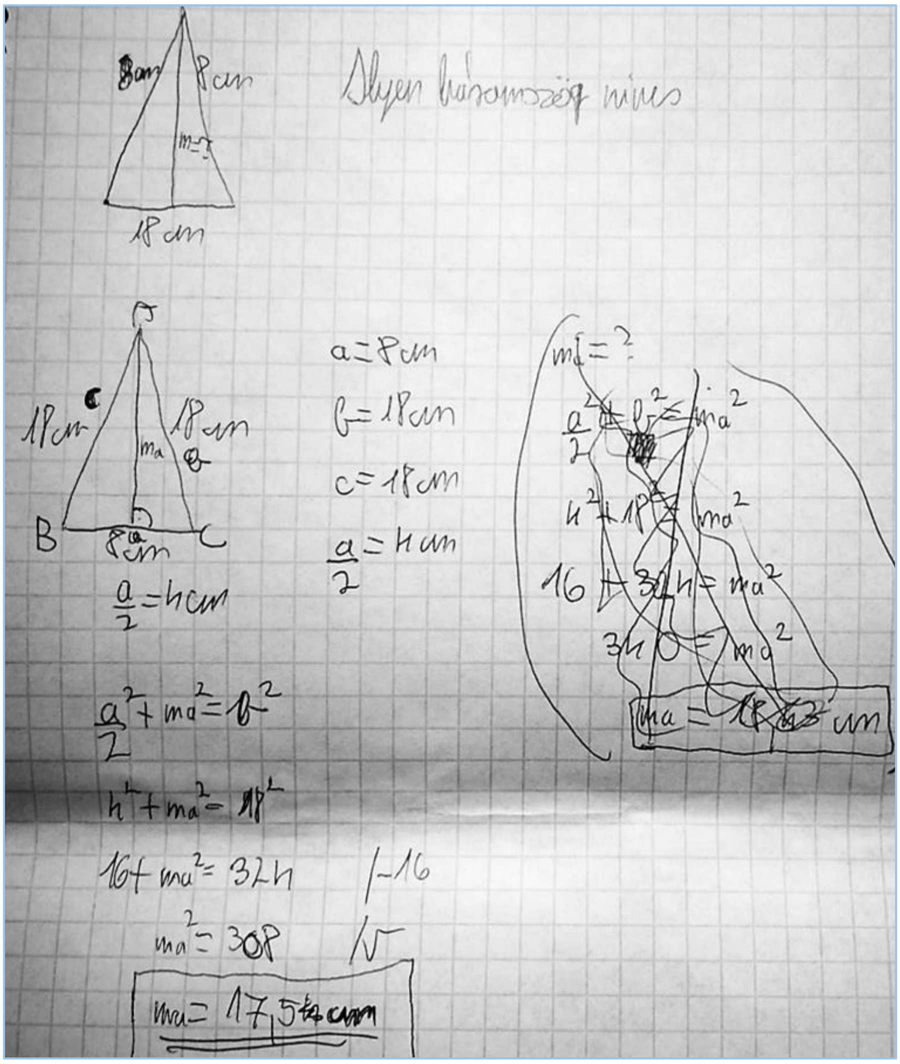
Az utó- és késleltetett teszt alapján úgy látszik, hogy a tanuló rendelkezik a sikeres problémamegoldáshoz szükséges tartalmi ismeretekkel, és sikerült beépítenie azt a meggyőződést, hogy létezhet több megoldás és ellentmondás is egy probléma esetén. Ennek felismerését és a magyarázatát több mint egy hónap után (a kontextusból kiemelve is) képes volt önállóan elvégezni. Minden szintet bejárt a fejlesztés során, mondhatni fokozatosan történt a fejlődése. Legközelebbi fejlődési zónája tartalmazta a 4-es szintet, amit a késleltetett teszt során ért el. Félévi osztályzata 2-es volt, év végi osztályzata 3-as lett.

A harmadik tanuló (T3) jellemzése:

T3: Az előteszt 1. feladatában ő is csak egy megoldást adott, illetve nem vette észre az ellentmondást az elő- és a köztes tesztben sem. Nem volt hozzászokva az ilyen típusú feladatokhoz. Az órákon is látszott, hogy hiányzik a megfelelő tartalmi tudása geometriából, amely még az utóteszt során is bizonytalan volt. Az ellentmondást az utótesztben felismerte, és hozzáfűzte, hogy „Ezáltal ilyen deltoid nincs”, utólag mégis inkább áthúzta (lásd 11. ábra). Tehát a megfelelő kezelés és az indoklás is hiányzott. Továbbá az ellentmondásmentes esetet sem tudta megoldani. A három ismert szög összegeként adta meg a hiányzó szöget.



11. ábra
A tanuló az utótesztnél nem tudta kezelni az ellentmondást, és tárgyi tudása hiányos



12. ábra
A tanuló több esetet néz, felismeri az ellentmondást és a hibáját is

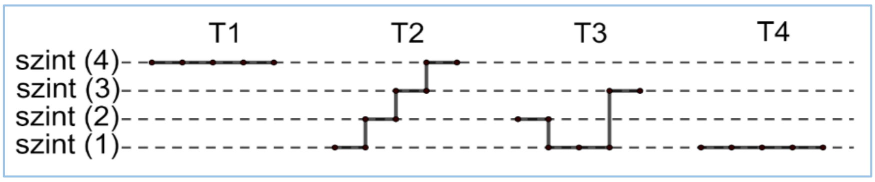
A 12. ábrán látható, hogy a késleltetett tesztnél azonban már felvállalta, hogy „Ilyen háromszög nincs”, bár ennek a magyarázata itt is hiányzik. A másik esetben először hibásan írta fel a Pitagorasz-tételt, de rájött erre, és sikerült javítania magát. Önellenőrzés és önszabályozás valósult meg. Valószínűleg feltűnhetett neki, hogy a befogóra nagyobb értéket kapott, mint amekkora az átfogó volt. 3-as szintet sikerült elérnie a késleltetett teszt alkalmával. Félévi osztályzata 4-es volt, év végi osztályzata 4-es lett.

A negyedik tanuló (T4) jellemzése:

T4: A négy tanuló közül a leggyengébben teljesített az elő- és a köztes tesztek alapján. Hiányzott a megfelelő tárgyi tudása a feladatok megoldásához, és élt benne a felülírandó meggyőződés a megoldások számára vonatkozóan. 1-es szintről indult, és nem sikerült innen elmozdulnia a folyamat alatt. Félévi osztályzata 1-es volt, év végi osztályzata 2-es lett.

A 13. ábrán az egységnyi, vízszintes szakaszok azt jelzik, hogy a négy teszt alkalmával milyen szinten teljesített egy tanuló. Az általunk részletesebben elemzett négy diák teljesítménye azt mutatja, hogy közülük hárman elérték az általunk kitűzött legalább 3-as szintet, ami tehát azt jelenti, hogy ők eljutottak a több eset és az ellentmondás felismeréséig. A késleltetett tesztnél nyújtott teljesítmény alapján, bár T1 és T2 tanulónak is sikerült elérnie a 4-es szintet, ez nem azt jelenti, hogy egyforma tudással és képzettséggel rendelkeznek a témát és a fejlesztést illetően, de mindketten képesek voltak a több eset és az ellentmondás felismerésére, tudatos kezelésére, indoklására. T1 tanuló mindvégig 4-es szinten volt, esetében a fejlesztőprogram esetleges hozzáadott értéke eszközeink segítségével nem mérhető. Ellenben T2 tanulónál jelentős fejlődést tudtunk kimutatni, mindegyik szintet végigjárta a program idején. A 13. ábráról az is látszik, hogy T3 tanuló nem ért el 4-es szintet a fejlesztés során, így legközelebbi fejlődési zónája vélhetően nem tartalmazta ezt a szintet, de az elvárt 3-as szintet sikerült teljesítenie. T4-nek viszont méréseink alapján látszólag semmit sem sikerült fejlődnie. Ebben közrejátszhatott hajlandóságának hiánya, illetve az, hogy legközelebbi fejlődési zónájától még a 2-es szint is távol lehetett. Érdekes megfigyelés, hogy míg T2 tanuló osztályzatai félévkor és év végén gyengébbek voltak, mint T3 tanulónak, a fejlesztés során mégis T2 ért el magasabb szintet. A 13. ábrán látható, hogy bár mindenki ugyanazt a fejlesztést kapta, mégsem sikerült mindenkinek ugyanúgy fejlődnie, és ha sikerült is, akkor nem feltétlenül egyenlő mértékben.

Olyan tanulók is voltak az osztályban, akik megmutatták a köztes és az utóteszt alapján, hogy a legközelebbi fejlődési zónájuk tartalmazza a 4-es szintet, de a késleltetett teszt során már nem tudták azt tartani, vagyis az aktuális fejlettségi szintjük még nem tartott ott.



13. ábra
A négy tanuló fejlődési ütemei a négy teszt alapján

Összegzés

Válaszok a kutatási kérdésekre

1. Milyen mértékben fejleszthető egy adott témakör kapcsán, hogy egy tanuló felismeri-e a több lehetséges esetet és/vagy az ellentmondást a feladat megoldása során?

Az elemzés azt mutatta, hogy a kezdeti majdnem nullához képest az utó- és késleltetett tesztnél már körülbelül az osztály fele több esetet vett számításba a megoldása során, illetve rájött az ellentmondásra. Fejlesztőkísérletünk célja a vizsgált osztály közel felénél megvalósult. Vagyis a tanulók által egy implicit módon igaznak tartott szubjektív elképzelést (Op't Eynde et al., 2002) – minden matematikai feladatnak pontosan egy megoldása van – sikerült felülírni a részt vevő tanulók jelentős részénél.

A tesztek összképe alapján érzékelhető a szemléletmódbeli változás az osztály valamennyi tanulóján. Mi lehet az oka annak a tapasztalatnak, hogy a fejlődés nem az egész osztályban történt meg? Jelentősen befolyásolta a tanulók fejleszthetőségének ütemét és mértékét a tárgyi tudás (Kiss & Kónya, 2020, 2021). Sokkal nehezebb felismernie egy diáknak, hogy egy eset ellentmondásos, ha nem tudja megfelelően használni például a Pitagorasz-tételt. A 3-as szint elérésének sikertelensége tanulói részről történhetett például a tárgyi tudás hiányosságaiból, a mélyen rögzült meggyőződésekből vagy a megfelelő tanulói együttműködés és hajlandóság hiányából is. Másrészt az is feltételezhető, hogy tanár szakos hallgatóként kevés rutinnal és nem magas hatásfokon végeztem a tanítást. A tanulók integráltan vettek részt az órákon, és kevésbé jutott idő a felzárkóztatásra és a tehetséggondozásra. Voltak olyan tanulók, akik vélhetően a legközelebbi fejlődési zónájuk alapján alkalmatlanok lehettek az egységes fejlesztésre, illetve akadtak olyan tanulók is, akik számára önmagukhoz képest nagyon csekély mértékű volt az egységes fejlesztés hatása. Úgy tűnik, szükség lett volna differenciált fejlesztésre. Ennek megvalósítása viszont további megoldandó problémákat vethet fel.

2. Ha észreveszi, hogyan kezeli a tanuló a több esetet és/vagy az ellentmondást a megoldás levezetésében?

A tanulók többsége a fejlesztés végére a több eset és az ellentmondás felismeréséig jutott el. A tanulók egy része az utó- és a késleltetett tesztnél már tudatosan kereshette a több esetet, mert annak ellenére, hogy találtak egy megoldást, további esetet is vizsgáltak. Sőt, voltak, akik előre táblázatot készítettek a több megoldásnak, pedig az órákon ilyen szemléltetésre nem volt példa. Akadtak viszont olyan tanulók is, akik vélhetően csak azért foglalkoztak másik esettel is, mert elsőre ellentmondásba ütköztek. Több olyan diák is volt, aki csak áthúzta az ellentmondásra vezető esetet. Így az ellentmondás felismerése és a megoldásként való értelmezése már sikerként volt elkönyvelhető számunkra. Kevés tanuló tudta megadni az ellentmondás okát.

3. Milyen információt kaphatunk a tanulók írásbeli munkája alapján az önellenőrzésről és az önszabályozásról mint metakognitív tevékenységekről?

A szóban forgó meggyőződés felülírásával a tanulók metakognitív tudását (a megismerésről való tudását egy feladatra, stratégiákra vonatkozóan) is módosíthattuk, fejleszthettük. A több esetet és/vagy ellentmondást tartalmazó feladatok megoldása a tanulók kritikus gondolkodása és metakognitív készségei (saját kognitív tevékenységeinek megfigyelése, ellenőrzése és önszabályozása) szempontjából is nagyobb igénybevételt jelenthetett, mint a pontosan egy megoldással bíró feladatok egy része.

Sok olyan áthúzás történt a tanulói munkákban, amelyekből látszódott, hogy nem voltak hozzászokva ahhoz, hogy ellentmondással és/vagy több esettel találkozhatnak egy feladat megoldása során, kritikus gondolkodásuk pedig vélhetően nem volt elég fejlett a helyzet felismeréséhez. Ezt a jelenséget a tárgyi tudásuk esetleges bizonytalansága csak fokozta. Ugyanakkor az áthúzások azt is jelenthették, hogy megvalósulhatott egyfajta önellenőrző és önszabályozó tevékenység, hiszen a tanulók így felülbírálták egy részét a megoldásuknak. Többen észrevették hibájukat, és javítani tudták azt. Elmondható, hogy az osztály diákjai egy részének igénye volt az önellenőrzésre.

Összegzés

Ezen tanulmány egy konkrét tanulói meggyőződés felülírására irányuló fejlesztés körülményeit, kivitelezését és tapasztalatait mutatta be. Az akciókutatásunk által igyekeztünk hozzájárulni a tanulók gondolkodásának és feladatmegoldásának részletesebb megismeréséhez, amely elengedhetetlen a hatékony tanításhoz. Alkalmazott módszerünk lehetővé tette, hogy a vizsgált osztály valamennyi tanulójánál felülírjunk egy meggyőződést, amely definíciója szerint az egyén pszichológiai állapotának tekinthető bizonyos dolgok igazságával és előítéleteivel kapcsolatban (Liu, 2010). A felülíráshoz hozzájárulhattak a diákok metakognitív készségei és a kritikus gondolkodásuk, amelyek magukban foglalják az elemzés, az értékelés és a következtetések levonásának képességét (Aizikovitsh-Udi, 2010). A fejlesztőkísérlet esetében a metakognitív készségek és a kritikai gondolkodás a tantervben szereplő témában rejtett összetevőként jelentek meg, így épültek be a tanításba. A szóban forgó meggyőződés, miszerint minden matematikai feladatnak van pontosan egy megoldása, a tanulónak a tananyagról és a matematikáról alkotott nézeteihez (Ambrus, 1995; Schoenfeld, 1985) tartozik.

A fejlesztés elején jellemző jelenség volt a tanulóknál, hogy ha „nem jött ki az eredmény”, akkor sem gondoltak arra, hogy az ellentmondást jelenthet. Az eredmények azt mutatták, hogy a tárgyi tudás szerepe szükséges, de nem elégséges feltétele volt az általunk középpontba állított meggyőződés felülírásának. Az ellentmondás okát kevés tanuló tudta megadni, vagyis úgy tűnik, hogy ehhez a fejlesztőkísérlet a vizsgált csoportban kevésnek bizonyult. Meglepő eredmény, hogy másfél hónappal a fejlesztés és a témakör lezárását követően a késleltetett tesztnél nem volt gyengébb az osztály teljesítménye a tárgyi tudást és a több eset, illetve ellentmondás felismerését illetően, mint az utótesztnél.

A kutatás módszere tehát akciókutatás volt, ami bizonyos szinten kvantitatív (az osztály eredményei), másrészt kvalitatív (esettanulmányok) módon elemezte az összegyűjtött adatokat. Az akciókutatás jellemzően egy jelenséget vizsgál. Az eredmények általánosításának és felhasználhatóságának korlátja az akciókutatás sajátosságaiból is adódik. A kutatás nem dolgozott kontrollcsoporttal, és nem volt elég széles körű. Egy adott osztály és egy tanár szerepelt a kutatásban. A korlátok közé tartozik még, hogy a minta megválasztására szűk volt a lehetőségek köre, mérési eszközeink csupán a négy teszt alapján született írásbeli munkák voltak. Például T1 tanuló mindvégig a legmagasabb, 4-es szinten volt, így az ő esetében a fejlesztés esetleges hozzáadott értéke mérési eszközeinkkel nem kimutatható. Következésképpen a 13 egymást követő matematikaórát felölelő folyamatról szóló tapasztalataink nem általánosíthatók az összes 9. évfolyamos diák matematikai meggyőződéseire, teljesítményére és viselkedésére. A tanulmány azonban fontos információkat tárhatott fel a vizsgált jelenségről, alkalmazható szemléletmódot adhat az érdeklődő tanárok számára, és segítséget nyújthat egy hasonló kísérlet kivitelezéséhez. Mindezek nem csak a matematikát érintik, hiszen más tantárgyaknál is előfordulnak az általunk vizsgált vagy ahhoz hasonló meggyőződések.

A tankönyvek, feladatgyűjtemények és így vélhetően a tanórák többsége is nagyon kevés olyan feladatot tartalmaz, amely több megoldásra vagy ellentmondásra vezet. A kutatás újszerűségéhez tartozhat, hogy ezek a típusú feladatok a fejlesztőkísérlet minden óráján és a dolgozatokban is megjelentek. Ez nagyobb figyelmet helyezhetett a jelenségre.

További kutatási feladatot jelenthet a minta bővítése létszám és évfolyam szempontjából, kontrollcsoport megfigyelése, az eddigitől eltérő témakörök, illetve más tantárgyak bevonása. Mélyebb kutatási kérdések lehetnek a jövőben: Hogyan kerülhető el azon meggyőződések kialakulása a tanulókban, amelyek nem helytállóak? Vajon a megelőzéshez elégséges feltétel-e a kritikai gondolkodás és a metakognitív stratégiák hangsúlyos szerepe az oktatásban?

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programja támogatta.

Irodalom

Aizikovitsh-Udi, E. (2010). *Developing critical thinking through probability models, intuitive judgments and decision-making under uncertainty* [Doctoral dissertation, Ben Gurion University of the Negev]. chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://library.macam.ac.il/study/pdf_files/d12647.pdf

Aizikovitsh-Udi, E. (2019). Construction of critical thinking skills by the infusion approach in probability and statistics in daily life. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1823–1830). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról. https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megtekintes

Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó.

Bar-Tal, D. (1990). Group beliefs: A conception for analyzing group structure, processes, and behavior. Springer-Verlag.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. (2018). Assessment in the service of learning: challenges and opportunities or Plus ça Change, Plus c'est la même Chose. *ZDM Mathematics Education, 50*(4), 571–585. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0937-1

Csíkos, C. (2016). *A gondolkodás stratégiai összetevőinek fejlesztése iskoláskorban* [Akadémiai doktori értekezés]. http://real-d.mtak.hu/959/7/dc_1156_15_doktori_mu.pdf

Csíkos, C., Kelemen, R., & Verschaffel, L. (2011). Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: A large sample Hungarian study. *ZDM Mathematics Education, 43*(4), 561–571. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0308-7

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: Analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM Mathematics Education, 42*(2), 205–218. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0221-5

Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM Mathematics Education, 51*(4), 565–575. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w

Dignath, C., & Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – Insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition and Learning, 13*(2), 127–157. https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x

Efklides, A. (2006). Metacognition and affect: What can metacognitive experiences tell us about the learning process? *Educational Research Review, 1*(1), 3–14. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2005.11.001

Ennis, R. H. (2003). Critical thinking assessment. In D. Fasko (Ed.), *Critical thinking and reasoning: Current theories, research, and practice* (pp. 293–313). Hampton Press.

Flavell, J., Miller, P., & Miller, S. (2002). *Cognitive development* (4th ed.). Englewood Cliffs.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–57). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_3

Hacker, D. J., Bol, L., & Keener, M. C. (2008). Metacognition in education: A focus on calibration. In J. Dunlosky & R. A. Bjork (Eds.), *Handbook of metamemory and memory* (pp. 429–455). Psychology Press.

Harlen, W. (2007). Meanings, processes and properties of assessment. In W. Harlen (Ed.), *Assessment of learning* (pp. 11–24). SAGE Publications. https://dx.doi.org/10.4135/9781446214695.n2

Kiss, M. (2019). A feladatmegoldás „feldíszítése"? – Metakognitív tevékenységek a problémamegoldás során [OTDK dolgozat].

Kiss, M., & Kónya, E. (2020). Is it possible to develop metacognition in Mathematics classroom environment? *Teaching Mathematics and Computer Science, 18*(3), 123–132. https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0485

Kiss, M., & Kónya, E. (2021). Do students analyze and evaluate the result of their problem solving activity? In B. May-Tatsis, K. Tatsis, & E. Swoboda (Eds.), *Critical thinking in mathematics: Perspectives and challenges* (pp. 143–152). Publishing House of the University of Rzeszów.

Korom, E. (1997). Naiv elméletek és tévképzetek a természettudományos fogalmak tanulásakor. *Magyar Pedagógia, 97*(1), 19–40.

Korom, E. (2002). Az iskolai tudás és a hétköznapi tapasztalat ellentmondásai: Természettudományos tévképzetek. In B. Csapó (Ed.), *Az iskolai tudás* (pp. 149–176). Osiris Kiadó.

Ku, K. Y. L. (2009). Assessing students' critical thinking performance: Urging for measurements using multi-response format. *Thinking Skills and Creativity, 4*(1), 70–76. https://doi.org/10.1016/j.tsc.2009.02.001

Liu, P. (2010). Are beliefs believable? An investigation of college students' epistemological beliefs and behavior in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(2), 86–98.

Marlene, S., Orpha K., D., & Rosetta, H. (2005). Epistemological beliefs, mathematical problem-solving beliefs, and academic performance of middle school students. *The Elementary School Journal, 105*(3), 289–304.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 13–37)? Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2

Pólya, G. (1977). A gondolkodás iskolája: A matematika új módszerei új megvilágításban. Gondolat Kiadó.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*(4), 329–363.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all that fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics sducation* (pp. 189–215). Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1–38.

Sperling, R., DuBois, N., Howard, B., & Staley, R. (2004). Metacognition and self-regulated learning constructs. *Educational Research and Evaluation, 10*(2), 117–139. https://doi.org/10.1076/edre.10.2.117.27905

Szendrei, J. (2005). Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról. TYPOTEX Kiadó.

Taras, M. (2005). Assessment – summative and formative – some theoretical reflections. *British Journal of Educational Studies, 53*(4), 466–478. https://doi.org/10.1111/j.1467-8527.2005.00307.x

Törner, G. (2002). Mathematical beliefs — A search for a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 73–94). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_5

Vigotszkij, L. Sz. (1967). *Gondolkodás és beszéd*. Akadémiai Kiadó.

Zhao, N., Teng, X., Li, W., Li, Y., Wang, S., Wen, H., & Yi, M. (2019). A path model for metacognition and its relation to problem-solving strategies and achievement for different tasks. *ZDM Mathematics Education, 51*(4), 641–653. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01067-3