

AZ ELMOSÓDOTT SIMPSON MÓDSZER

Ferenczi Larisza^{1,2,3}, Ferenczi Tibor^{1,2,4}

NKE ÁKK Választási TDK

Chair of optimal control and economical cybernetics,

Odessa I.I.Mechnikov National University

Pannon Egyetem

Szent István Egyetem

0 Bevezetés

Dolgozatunkban az általunk kidolgozott elmosódott szavazáselméletünkkel kapcsolatos további fejlesztéseink kerülnek bemutatásra. Benne a választók „elmosódottan” szavaznak, azaz az összes jelöltnek pontosan akkora támogatást adnak, amennyire az tetszik nekik. A klasszikus szavazáselméletből már jól ismert Simpson módszerre terjesztettük ki elméletünket. Az elmosódott szavazáselmélet alapjai Ferenczi Tibor alapszakos szakdolgozatában kerültek kifejtésre (2016).

1 Az elmosódott szavazáselmélet főbb fogalmai és meghatározásai

1.1 Az elmosódott preferenciaprofil, a jelölt összesített támogatottsági szintje

Formálisan a szavazás szabályai egy olyan kollektív feladatmegoldást jelentenek, amelyben az egyének csoportja, akiket választóknak fogunk nevezni, együttesen kell, hogy kiválasszanak egy legjobb objectet néhány object közül, melyeket jelölteknek fogunk nevezni, amelyek viszonylatában az ő véleményük eltér.

A már meglévő szavazáselmélettel ellentétben itt nincs kizárva az sem, hogy a választónak két jelölt között nincs favoritja, tehát ugyanannyira tetszik neki mindkettő.

Feltételezzük azt, hogy a választók X véges halmaza kell, hogy kiválasszon egy jelöltet a jelöltek véges halmazából, Y -ből.

Mint tudjuk, a választók preferenciáját az alábbi, úgynevezett preferenciaprofil mutatja:¹

1. táblázat: preferenciaprofil

Választók csoportja	I	II	...	K
A választók száma a csoportban	N_1	N_2	...	N_k
A csoport által kialakított rangsor	a	b	...	c
	b	a	...	a

	c	c	...	b

Bevezetjük az elmosódott preferenciaprofil fogalmát: ez abban tér el a szokásos preferenciaprofiltól, hogy minden egyes választó kiegészítésképpen megjelöli még a jelölt támogatottságának a szintjét is.

2. táblázat: elmosódott preferenciaprofil

Választók csoportja	I		II		...	K	
A választók száma a csoportban	N_1		N_2		...	N_k	
A csoport által kialakított rangsor	a	s_{m-11}	b	s_{m-12}	...	c	s_{m-1k}
	b	s_{m-21}	a	s_{m-22}	...	a	s_{m-2k}

	c	s_{01}	c	s_{02}	...	b	s_{0k}

Ahol s_{ij} $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, k}$, $0 \leq s_{0j} \leq \dots \leq s_{m-1j}$ a jelölt támogatottsági szintje más jelöltekhez viszonyítva, és

$$\sum_{i=0}^{m-1} s_{i1} = \sum_{i=0}^{m-1} s_{i2} = \dots = \sum_{i=0}^{m-1} s_{ik} = S \quad (1)$$

1 Tanulmányunkhoz az alábbi forrást használtuk fel: Кичмаренко О.Д., Огуленко А.П., 2012, mely a következő szakirodalmakon alapult: Вагнер Г., 1973; Вольский В.И., 1987; Вольский В.И., Лезина З.М., 1991; Воробьев Н.Н., 1985; Ларичев О.Н., 1979; Маркин Б.Г., 1974; Моисеев Н.Н., 1970; Мулен Э., 1991; Arrow K. J., (1951) 1963, 2nd ed; Gibbard A., 1973.

Ily módon minden választónak meg kell jelölnie a saját rangsorán túlmenően az adott jelölt támogatottságának a mértékét. A támogatottsági szintek összege az összes választó számára azonos összegű és egyenlő S -sel.

Ha S értékét 1-nek vagy 100-nak vesszük, akkor első ránézésre is könnyen értelmezhetővé válik, milyen mértékben támogatja az adott választócsoporthoz ezt vagy azt a jelöltet.

Megjegyzés

A különböző választócsoporthoz adhatunk lehetőséget arra, hogy különböző pontot osszanak szét a jelöltek között (S_1, S_2, \dots, S_k), de ebben az esetben az elmosódott preferenciaprofil a további számolások előtt normalizálni kell.

Meghatározás. Az a jelölt összesített támogatottsági szintjét (*the overall level of support - ToLS*), az alábbi képlet szerint számítjuk ki:

$$ToLS(a) = \sum_{j=1}^k N_j s_{ij} / S \quad (2)$$

ahol s_{ij} az a jelölt támogatottsági szintje a j -edik szavazási csoportban.

1.2 Alpreferenciaprofilok

A P_1 preferenciaprofil akkor nevezzük a P preferenciaprofil alpreferenciaprofiljának, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

- A P_1 preferenciaprofil összes jelöltje beletartozik a P preferenciaprofil jelöltjeinek a halmazába.
- Az összes választócsoporthoz megmarad a jelöltek sorrendje, azaz, ha a feljebb van a P preferenciaprofilban, mint b , akkor feljebb kell lennie a P_1 alpreferenciaprofilban is.

Az elmosódott alpreferenciaprofil

A VP_1 elmosódott preferenciaprofil akkor nevezzük a VP preferenciaprofil alpreferenciaprofiljának, ha teljesülnek a következő feltételek:

- A VP_1 preferenciaprofil összes jelöltje beletartozik a VP preferenciaprofil jelöltjeinek a halmazába.
- Az összes választócsoporthoz megmarad a jelöltek sorrendje, azaz, ha a feljebb van a VP preferenciaprofilban, mint b , akkor feljebb kell lennie a VP_1 alpreferenciaprofilban is.

- X jelölt támogatottsági szintje a j -edik csoportban:

$$\sum_{i \in L} \frac{s_{ij}}{s_{ij}} S \quad (3)$$

A (3) képletben L azon jelöltek helyeinek a halmaza, amelyek beletartoznak a VP_1 alpreferenciaprofil jelöltjeinek a halmazába. Az s_{ij} a jelölt támogatottsági szintje a VP preferenciaprofilban a j -edik választócsoporthoz.

Megjegyzés

Abban az esetben, ha nem maga az alpreferenciaprofil a célja az alpreferenciaprofil felépítésének, akkor ezen a helyen az S -et nyugodtan fel lehet cserélni eggyessel és a továbbiakban az összes számítást $S=1$ értékkel lehet elvégezni.

1.3 Az elmosódott páros összehasonlítás algoritmus

Először megvizsgáljuk azt az esetet, amikor csak két jelölt között kell választani.

Meghatározás. Az a jelölt elmosódott preferenciát élvez b jelölt viszonylatában ($a(>)b$), ha $ToLS(a) > ToLS(b)$.

b jelölt elmosódott preferenciát élvez a jelölt viszonylatában ($b(>)a$), ha $ToLS(b) > ToLS(a)$.

Ha $ToLS(a) = ToLS(b)$, akkor a és b jelölt egyenértékű.

Bonyolultabb, ha a páros összehasonlítást olyan elmosódott preferenciaprofil számára kell elvégezni, melyben három vagy több jelölt szerepel. Ebben az esetben először fel kell, hogy építsük az alpreferenciaprofil ezen két jelölt számára és csak azután kezdhetjük el a jelöltek összehasonlítását az alpreferenciaprofil alapján a fentiekben leírtak szerint.

$ToLS(a(>)b)$ -val jelöljük $ToLS(a(>)b) = ToLS(a)$, ahol $ToLS(a)$ abból az elmosódott alpreferenciaprofilból való összesített elmosódott támogatottsági szint, amelyben csak a és b jelöltek szerepelnek.

Meghatározás. A maximálisan lehetséges általános támogatottsági szint értéke

$$\sum_{j=1}^k N_j \quad (4)$$

x jelölt szigorú preferenciát élvez az ($>$) viszonylatában, ha $ToLS(x) > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k N_j$

Azt, hogy a támogatottsági szint mértéke lényeges hatást képes gyakorolni a szavazás eredményére, az alábbi példán mutatjuk be.

Példa №1. Két jelölt vesz részt a választásokon: a és b . Azon emberek száma, akik hajlandóak rájuk szavazni, gyakorlatilag szinte megegyező, esetünkben b jelölt olyan reformokat szeretne és ígér végrehajtani, amelyek nagyon sok embernek rendkívüli mértékben ellenszenvesek. Nézzük meg a választási profilt:

3. táblázat: Példa №1 elmosódott preferenciaprofilja

	I		II
	49		51
a	100	b	52
b	0	a	48

$b(>)a$ a többségi döntés szerint 51 49 ellenében. Habár a valóságban a jelölt összesített támogatottsága $ToLS(a)=(49*100+51*48)/100=73,48$, a b jelölt összesített támogatottsági szintje pedig $ToLS(b)=51*52/100=26,52$, azaz $a(>)b$, tehát fordított.

A fenti példa jól láthatóan érzékelteti, hogy az eredmények lényegesen eltérnek egymástól.

2 Elmosódott Simpson módszer

2.1 Simpson módszer

Megvizsgáljuk a jelöltet és bármely más jelöltet, x -et. $S(a > x)$ azon választók száma, melyek szerint $a > x$. Az a jelölt Simpson indexének hívjuk a legkisebbet ezek közül a számok közül, ahol x végigfut az összes jelöltön. A maximális Simpson indexszel rendelkező jelölt kerül megválasztásra.

$$\max(S(x))$$

2.2 Elmosódott Simpson módszer

Megvizsgáljuk a jelöltet és bármely más jelöltet, x -et. Minden egyes x jelölt számára kiszámítjuk a $ToLS(a(>)x)$ értékét. Az a jelölt elmosódott Simpson indexének hívjuk a legkisebbet ezek közül a számok közül: $\min ToLS(a(>)x)$

ahol x végigfut az összes jelöltön. A maximális elmosódott Simpson indexszel rendelkező jelölt kerül megválasztásra.

Példa №2. Öt jelölt: a, b, c, d és e szerepelnek a választásokon. Öt választási csoport van, ahol a választók száma 3, 5, 7, 3 és 3:

4. táblázat: Példa №2 elmosódott preferenciaprofilja

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
a	50	a	65	b	40	c	35	c	30
d	40	c	20	d	30	e	25	e	25
c	5	e	10	c	20	d	20	d	20
b	3	d	5	e	10	b	10	b	15
e	2	b	0	a	0	a	10	a	10

Felépítjük az elmosódott páros összehasonlítások táblázatát, ennek érdekében ki kell számítanunk az összes lehetséges elmosódott páros összehasonlítást:

5. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (a és b)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
a	50/53	a	1	b	1	b	1/2	b	3/5
b	3/53	b	0	a	0	a	1/2	a	2/5

$$\text{Tols}(a) = 50/53 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 1/2 \cdot 3 + 2/5 \cdot 3 = 10,53$$

$$\text{Tols}(b) = 3/53 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1/2 \cdot 3 + 3/5 \cdot 3 = 10,47$$

6. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (a és c)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
a	50/55	a	65/85	c	1	c	35/45	c	3/4
c	5/55	c	20/85	a	0	a	10/45	a	1/4

$$\text{Tols}(a) = 50/55 \cdot 3 + 65/85 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 10/45 \cdot 3 + 1/4 \cdot 3 = 7,97$$

$$\text{Tols}(c) = 5/55 \cdot 3 + 20/85 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 35/45 \cdot 3 + 3/4 \cdot 3 = 13,03$$

Az elmosódott Simpson módszer

7. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (a és d)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
a	50/90	a	65/70	d	1	d	2/3	d	2/3
d	40/90	d	5/70	a	0	a	1/3	a	1/3

$$\text{Tols(a)}=50/90*3+65/70*5+0*7+1/3*3+1/3*3=8,31$$

$$\text{Tols(d)}=40/90*3+5/70*5+1*7+2/3*3+2/3*3=12,69$$

8. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (a és e)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
a	50/52	a	65/75	e	1	e	25/35	e	25/35
e	2/52	e	10/75	a	0	a	10/35	a	10/35

$$\text{Tols(a)}=50/52*3+65/75*5+0*7+10/35*3+10/35*3=8,93$$

$$\text{Tols(e)}=2/52*3+10/75*5+1*7+25/35*3+25/35*3=12,07$$

9. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (b és c)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
c	5/8	c	1	b	2/3	c	35/45	c	2/3
b	3/8	b	0	c	1/3	b	10/45	b	1/3

$$\text{Tols(b)}=3/8*3+0*5+2/3*7+10/45*3+1/3*3=7,46$$

$$\text{Tols(c)}=5/8*3+1*5+1/3*7+35/45*3+2/3*3=13,54$$

10. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (b és d)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
d	40/43	d	1	b	4/7	d	2/3	d	20/35
b	3/43	b	0	d	3/7	b	1/3	b	15/35

$$\text{Tols(b)}=3/43*3+0*5+4/7*7+1/3*3+15/35*3=6,5$$

$$\text{Tols(d)}=40/43*3+1*5+3/7*7+2/3*3+20/35*3=14,5$$

11. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (b és e)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
b	3/5	e	1	b	4/5	e	25/35	e	25/40
e	2/5	b	0	e	1/5	b	10/35	b	15/40

$$\text{Tols}(b)=3/5*3+0*5+4/5*7+10/35*3+15/40*3=9,38$$

$$\text{Tols}(e)=2/5*3+1*5+1/5*7+25/35*3+25/40*3=11,62$$

12. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (c és d)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
d	8/9	c	20/25	d	3/5	c	35/55	c	3/5
c	1/9	d	5/25	c	2/5	d	20/55	d	2/5

$$\text{Tols}(c)=1/9*3+20/25*5+2/5*7+35/55*3+3/5*3=10,84$$

$$\text{Tols}(d)=8/9*3+5/25*5+3/5*7+20/55*3+2/5*3=10,16$$

13. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (c és e)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
c	5/7	c	2/3	c	2/3	c	35/60	c	30/55
e	2/7	e	1/3	e	1/3	e	25/60	e	25/55

$$\text{Tols}(c)=5/7*3+2/3*5+2/3*7+35/60*3+30/55*3=13,53$$

$$\text{Tols}(e)=2/7*3+1/3*5+1/3*7+25/60*3+25/55*3=7,47$$

14. táblázat: Példa №2 elmosódott alpreferenciaprofilja (d és e)

I		II		III		IV		V	
3		5		7		3		3	
d	40/42	e	2/3	d	3/4	e	25/45	e	25/45
e	2/42	d	1/3	e	1/4	d	20/45	d	20/45

$$\text{Tols}(d)=40/42*3+1/3*5+3/4*7+20/45*3+20/45*3=12,44$$

$$\text{Tols}(e)=2/42*3+2/3*5+1/4*7+25/45*3+25/45*3=8,56$$

Ezek után a kiszámított adatokat összeírjuk az elmosódott páros összehasonlítás táblázatába:

15. táblázat: Példa №2 elmosódott páros összehasonlítás táblázata

(>)	a	b	c	d	e
a	-	10,53	7,97	8,31	8,93
b	10,47	-	7,46	6,5	9,38
c	13,03	13,54	-	10,84	13,53
d	12,69	14,5	10,16	-	12,44
e	12,07	11,62	7,47	8,56	-

A kapott táblázatot kiegészítjük egy oszloppal, amely x jelölt elmosódott Simpson indexét tartalmazza, (ehhez minden sorban megkeressük a legkisebb számot és kiírjuk az utolsó oszlopba):

16. táblázat: Példa №2 elmosódott páros összehasonlítás táblázata Simpson-indexel

(>)	a	b	c	d	e	S(x)
a	-	10,53	7,97	8,31	8,93	7,97
b	10,47	-	7,46	6,5	9,38	6,5
c	13,03	13,54	-	10,84	13,53	10,84
d	12,69	14,5	10,16	-	12,44	10,16
e	12,07	11,62	7,47	8,56	-	7,47

Ahogy látjuk, c az elmosódott Simpson módszer nyertese, mivel az ő Simpson-indexe a legnagyobb.

3 Befejezés

Ebben a munkában a Simpson-módszer elmosódott verziójával ismerkedhettünk meg, az elmosódott Simpson módszerrel. Az elmosódott szavazáselmélet a választópolgárok preferenciáinak pontosabb értékelésére ad lehetőséget. Figyelembe véve, hogy a jelöltek támogatottsági szintje igen fontos tényező, melyet a klasszikus szavazáselmélet nem vesz figyelembe, bizonyos esetekben az elmosódott szavazáselmélet képleteinek használata a ma létező módszerekben akár ellenkező eredményhez vezethet a klasszikushoz képest.

8323

EGY-ka

XB 249550

Ferenczi Larisza, Ferenczi Tibor

A javasolt új módszerek eredményesen alkalmazhatóak a modern világban, mely lassan a teljes komputerezáció irányába halad. Például nagy sikerrel lehet használni az elektronikus szavazás végrehajtására.

Azonban mielőtt ténylegesen is felhasználásra kerül bármelyik módszer is a való életben, alapos elemzés alá kell vetni azokat.

Irodalomjegyzék

Вагнер, Г. (1973): Основы исследования операций.-М.:Мир

Вольский, В.И. (1987): Турнирные функции в задачах коллективного и многокритериального выбора. Исследования по теории структур.- М.:Наука

Вольский, В.И., Лезина, З.М. (1991): Голосование в малых группах. Процедуры и методы сравнительного анализа.-М.:Наука

Воробьев, Н.Н. (1985): Теория игр для экономистов - кибернетиков.- М.:Наука

Кичмаренко, О.Д., Огуленко, А.П. (2012): Теория принятия решений. ОНУ имени И.И.Мечникова

Ларичев, О.Н. (1979): Наука и искусство принятия решений.-М.: Наука

Маркин, Б.Г. (1974): Проблема группового выбора.-М.: Наука

Моисеев, Н.Н. (1970): Математика - управление - экономика. - М.: Знание

Мулен, Э. (1991): Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир

Arrow, K. J. (1951): Social Choice and Individual Values. New York: Wiley. In 1963, 2nd ed.

Gibbard, A. (1973): Manipulation of voting schemes: A general result. *Econometrica*



X₂₇₂₀₈₉