Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels"[1].

Par MARCEL RIESZ à Lund.

M. BRELOT a bien voulu me signaler que dans la définition des masses de GREEN μ_M relatives à un ensemble fermé F de capacité positive et à un pôle M, il ne suffit pas de demander que le potentiel $r_{MP}^{\alpha-m}$ soit conservé en tout point P de F sauf peut-être dans un ensemble de capacité nulle, mais qu'il faut encore ajouter quelque condition restrictive pour assurer l'unicité de la distribution de GREEN. L'erreur vient d'un oubli fâcheux quoique banal qui m'est arrivé en énonçant le théorème d'équilibre de M. FROSTMAN (p. 8). Voici l'énoncé correct de ce théorème.

Soit F un ensemble fermé et borné de capacité positive; il existe alors une répartition unique de masse positive engendrant un potentiel qui est $=1$ sur F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et ≤ 1 dans l'espace entier[2].

J'obtiens les masses de GREEN de celles qui donnent le potentiel d'équilibre par une transformation de KELVIN (p. 14—15). Pour rendre le texte exact au point de vue de l'unicité on n'a en réalité qu'à intervertir l'ordre des deux dernières phrases de la page 14 après avoir remplacé les derniers mots de la première

[1]) Ces *Acta*, **9** (1938), p. 1—42.

[2]) La dernière inégalité figure dans mon travail parmi les propriétés du potentiel d'équilibre, mais elle n'intervient pas dans la définition. Or sans une telle restriction, la répartition consistant p. ex. en la masse unité concentrée au centre d'une sphère de rayon *un* pourrait aussi être considérée comme une répartition d'équilibre pour l'ensemble fermé F composé de la surface de la sphère et de son centre. En effet, son potentiel est $=1$ sur tout l'ensemble F sauf au centre, c'est-à-dire sauf dans un ensemble de capacité nulle.

phrase "cette propriété-là" par les mots "les propriétés (1) et (2)". Pour la commodité du lecteur nous donnons ici la définition corrigée complète :

15. Soient F un ensemble fermé, non nécessairement borné, de capacité positive, M un point extérieur à F, et désignons par μ' la distribution engendrant le potentiel d'équilibre sur l'ensemble fermé et borné F' que la transformation (1) du numéro précédent fait correspondre à F. En définissant alors la distribution de masse positive μ_M relative à F par la formule (3) du même numéro, il vient

$$\int_F r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu_M(Q) = r_{MP}^{\alpha-m}, \tag{1}$$

égalité valable pour tout point P de F excepté peut-être pour un ensemble de capacité nulle. Le potentiel d'équilibre étant toujours $\leqq 1$, on a encore l'inégalité fondamentale

$$h_M(P) = \int_F r_{PQ}^{\alpha-m} d\mu_M(Q) \leqq r_{MP}^{\alpha-m}, \tag{2}$$

P étant un point tout à fait arbitraire de l'espace. Le calcul étant réversible, on conclut que la distribution μ_M est entièrement déterminée par les propriétés (1) et (2). Nous appellerons les masses μ_M *masses de Green relatives à l'ensemble F et au pôle M.*

Le lecteur voudra bien tenir compte de cette définition précisée des masses de GREEN dans toute question d'unicité[3]), et cela aussi en ce qui concerne le travail de M. FROSTMAN "Sur le balayage des masses" publié dans ce recueil immédiatement après le mien.

Dans mon travail je ne m'occupe pas de questions d'unicité concernant le balayage d'une distribution générale que je définis par des formules explicites au moyen des masses de GREEN. Dans un travail récent[4]) M. BRELOT donne sur ce sujet quelques théorèmes très précis. Je profite de l'occasion pour montrer comment les résultats de M. BRELOT ressortent de ceux donnés dans mon travail. M. BRELOT montre par exemple qu'en balayant sur l'ensemble fermé F de capacité positive des masses $\geqq 0$, il y a unicité si le potentiel reste conservé sur F sauf au plus sur un ensemble de capacité nulle et si en outre l'une au moins des deux conditions suivantes est remplie :

a) Le potentiel n'est pas augmenté aux points extérieurs à F.

[3]) Cette question intervient en particulier au n° 25 où il faut observer que les deux potentiels comparés sont partout $\leqq r_{MQ}^{\alpha-m}$.

[4]) M. BRELOT, Fonctions sous-harmoniques et balayage, *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique,* **24** (1938), p. 301—312 et p. 421—436.

b) La répartition obtenue sur F ne comporte pas de masses sur les ensembles de capacité nulle.

Démontrons d'abord l'unicité dans la condition *b)*. On voit immédiatement que le potentiel obtenu par le balayage peut à l'extérieur de F être représenté par la formule (2) du n° **19** de mon travail. Alors le potentiel est déterminé sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et dès lors de mesure nulle; les masses sont par conséquent entièrement déterminées par le théorème d'unicité du n° **10.**

Par le théorème du n° **13,** appliqué à la différence entre le potentiel original et celui obtenu par le balayage, la condition *a)* se réduit facilement à la condition *b)*.

(Reçu le 14 novembre 1938)