Über Funktionen, die ein endliches Dirichletsches Integral haben.

Von A. SÓLYI in Szeged.

Einleitung.

Es sei in dem n-dimensionalen Raum eine quadratisch integrierbare Funktion $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeben. Die Integrale

$$\int\limits_T \left(\frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha + h, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n)}{h}\right)^2 dV$$

(T bedeutet einen n-dimensionalen Bereich, $dV = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$) seien gleichmäßig beschränkt für alle h $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$.

Wegen variationstheoretischer Anwendungen bieten die folgenden Fragen ein gewisses Interesse: Was kann man von den partiellen Ableitungen von g sagen? Für welche $\nu > 2$ kann man folgern, daß $\int\limits_T |g|^\nu dV$ endlich bleibt? (Diese Exponenten werden wir „Integrabilitätsexponenten" nennen.)

Wir werden sehen, daß unsere Annahme äquivalent damit ist, daß die ersten partiellen Ableitungen der Funktion g fast überall existieren und quadratisch integrierbar sind. Oder, m. a. W., daß ihr, in geeigneter Weise definiertes Dirichletsches Integral endlich ist. Es wird sich auch ergeben, daß die Differenzenquotienten im quadratischen Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen konvergieren und daß g fast überall gleich dem Lebesgueschen Integral jeder seiner Ableitungen ist.

Was die Integrabilitätsexponenten betrifft, so wird bewiesen, daß alle ν Integrabilitätsexponenten sind, die der Ungleichung $\nu < \dfrac{2n}{n-2}$ genügen. Für $\nu > \dfrac{2n}{n-2}$ können, wie es ein einfaches

Beispiel zeigt, die Integrale $\int\limits_T |g|^\nu \, dV$ divergent werden. Den Fall $\nu = \frac{2n}{n-2}$ konnte ich nicht entscheiden.

Zur Behandlung dieser Fragen habe ich auf Anregung des Herrn Prof. F. RIESZ g in eine mehrfache Fouriersche Reihe entwickelt und den Beweis mit gewißen Abschätzungen der Fourierschen Koeffizienten durchgeführt. Wir mußten uns daher zuerst auf den Fall beschränken, wo g in allen Veränderlichen periodisch mit der Periode 2π ist und der Bereich T mit einem Periodenwürfel W von g identisch ist. Der allgemeine Fall wird mit Hilfe einer geeigneten Fortsetzung auf diesen einfacheren Fall zurückgeführt.

1. Über die Ableitungen von g.

Bezeichnungen.

$$D_\alpha^h g = \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha + h, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n)}{h}.$$

Es sei S die Menge derjenigen Punkte, die außerhalb T und von T in einer Entfernung kleiner als d liegen; d ist eine willkürlich gewählte positive Konstante.

Voraussetzung. Alle Integrale

$$\int\limits_{T+S} (D_\alpha^h g)^2 \, dV$$

sind gleichmäßig beschränkt.

Satz. *Die partiellen Ableitungen von g existieren in T fast überall. Sie sind alle quadratisch integrierbar. Die Differenzenquotienten von g streben im quadratischen Mittel gegen die entsprechenden Ableitungen, d. i.*

$$\int\limits_T (D_\alpha^h g - g_{x_\alpha})^2 \, dV \to 0, \quad \textit{wenn} \quad h \to 0.$$

Beweis für den periodischen Fall ($T = W$). g wird in eine mehrfache Fouriersche Reihe entwickelt:

$$g \sim \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{\infty} a_{l_1 \ldots l_n} e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)}.$$

Wir führen der Kürze halber die folgenden Bezeichnungen ein:

$$a_{l_1 \ldots l_n} = a_l,$$
$$e^{i(l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)} = e^{ilx}.$$

Es genügt aus Symmetriegründen nur die nach x_1 genommenen Differenzenquotienten zu untersuchen. Es ist

$$D_1^h g \sim \sum_{(l)} a_l \frac{e^{il_1 h}-1}{h} e^{ilx}.$$

Durch Anwendung des Parsevalschen Satzes bekommt man:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_W (D_1^h g)^2 dV = \sum_{(l)} |a_l|^2 \frac{(e^{il_1 h}-1)(e^{-il_1 h}-1)}{h^2}.$$

Da nach unserer Annahme unabhängig von h

$$\int_W (D_1^h g)^2 dV \leqq M$$

gilt, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{(l)} |a_l|^2 l_1^2$$

konvergent ist.

Es gibt daher auf Grund des Riesz—Fischerschen Satzes eine Funktion g_1, die die Fourierkoeffizienten $l_1 a_l$ besitzt. Wir wollen zeigen, daß in T fast überall

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}.$$

Wir schätzen dazu das Quadratintegral von $g_1 - D_1^h g$ ab. Wegen

$$g_1 - D_1^h g \sim \sum_{(l)} a_l \left(\frac{e^{il_1 h}-1}{h} - l_1\right) e^{ilx}$$

hat man

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_W (g_1 - D_1^h g)^2 dV = \sum_{(l)} |a_l|^2 \left|\frac{e^{il_1 h}-1}{h} - l_1\right|^2.$$

Wir spalten die Summe in zwei Teile, je nachdem $|l_1| \leqq N$ oder $> N$ ist.

Der erste Teil konvergiert offenbar gegen 0, wenn $h \to 0$. Die zweite Summe ist kleiner, als

$$\sum_{|l_1| > N} 4|a_l|^2 l_1^2.$$

Wenn wir N ins Unendliche wachsen lassen, dann strebt auch diese Summe wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{l_1,\ldots,l_n=-\infty}^{+\infty} |a_l|^2 l_1^2$$

gegen 0. Es folgt daher:

$$\int_W (g_1 - D_1^h g)^2 \, dV \to 0,$$

wenn $h \to 0$. Aus dieser Relation folgt aber die Gültigkeit unseres Satzes.

2. Über die Integrierbarkeitsexponenten von g.

Es folgt für $n=1$ unmittelbar aus dem vorigen Satze, daß g das Integral seiner Ableitung und somit stetig ist. Man sieht aus dem Beispiel $g = \log^{0 \cdot 1} r$ mit $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, daß die Stetigkeit von g schon für $n=2$ nicht gefolgert werden kann. Es folgt aber, daß die Integrierbarkeitsexponenten von g beliebig groß sind. Für $n > 2$ liegen die Integrierbarkeitsexponenten unter einer endlichen Schranke, welche gegen 2 strebt, wenn n ins Unendliche wächst. Es gilt nämlich der

Satz. *Aus den gemachten Voraussetzungen über die Differenzenquotienten folgt, daß $\int_T |g|^\nu \, dV$ endlich ist für jedes positive ν, welche der Ungleichung*

$$\nu < \frac{2n}{n-2}$$

genügt ($n \neq 1, 2$). *Für $n=1$ ist g stetig, für $n=2$ kann ν beliebig groß gewählt werden.*

Bemerkung. Man kann die in dem Satz vorkommende obere Schranke nicht verkleinern. Das sieht man aus dem Gegenbeispiel:

$$g = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2} - \varepsilon}}.$$

Diese Funktion genügt unseren Voraussetzungen für jedes positive ε, dennoch kann ε für jedes $\nu > \dfrac{2n}{n-2}$ so klein gewählt werden, daß $\int |g|^\nu \, dV$ divergiere. Es wäre interessant und wegen der variationstheoretischen Anwendungen wichtig, auch den Fall $\nu = \dfrac{2n}{n-2}$ zu untersuchen. Es ist mir aber die Entscheidung dieses Falles nicht gelungen.

B e w e i s für den periodischen Fall ($T = W$). Es folgt aus dem Young—Hausdorffschen Satze, daß, wenn zwei positive Zahlen, μ und ν, der Relation

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1$$

genügen, $\mu \leqq \nu$, und die Reihe $\sum_{(l)} |a_l|^\mu$ konvergiert, dann konvergiert auch das Integral

$$\int_W |g|^\nu \, dV.$$

Wir haben also, um unseren Satz zu beweisen, nur die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{\infty} |a_l|^\mu$$

für jedes

$$\mu > \frac{1}{1 - \frac{n-2}{2n}} = \frac{2n}{n+2}$$

zu zeigen.

Da jede Reihe

$$\sum_{(l)} l_\beta^2 |a_l|^2 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergiert, so konvergiert auch

$$\sum_{(l)} (l_1^2 + \ldots + l_n^2) |a_l|^2 = \sum_{(l)} l^2 |a_l|^2,$$

wobei wir die Summe $l_1^2 + \ldots + l_n^2$ mit l^2 bezeichnet haben.

Wir werden die Konvergenz der Reihe

$$\sum |a_l|^\mu$$

mit Hilfe der bekannten Hölderschen Ungleichung:

$$|\sum u_l v_l| \leqq (\sum |u_l|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |v_l|^q)^{\frac{1}{q}} \quad \left(p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

beweisen. Man setze

$$q = \frac{2}{\mu}, \; p = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{2}} = \frac{2}{2-\mu}, \quad u_l = \frac{1}{l^\mu}, \quad v_l = |l a_l|^\mu.$$

Mit diesen Werten lautet die Höldersche Ungleichung, wie folgt:

$$\sum |a_l|^\mu \leqq \left(\sum \frac{1}{l^{\frac{2\mu}{2-\mu}}}\right)^{\frac{2-\mu}{2}} \left(\sum l^2 |a_l|^2\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Der zweite Faktor rechts ist konvergent. Der erste ist dann und nur dann konvergent, wenn das Integral

$$\int \frac{1}{l^{\frac{2\mu}{2-\mu}}} d l_1 \ldots d l_n$$

im Unendlichen konvergent ist. Dies gilt dann und nur dann, wenn

$$\frac{2\mu}{2-\mu} > n,$$

also

$$\mu > \frac{2n}{n+2}$$

ist. Die zugehörigen Integrabilitätsexponenten ν sind daher der Ungleichung

$$\nu < \frac{2n}{n-2}$$

unterworfen.

3. Ausdehnung der Gültigkeit unserer Sätze auf den allgemeinen Fall.

Wir setzten beim Beweise unserer Sätze voraus, daß g periodisch für jede ihrer Veränderlichen mit der Periode 2π und T ein Periodenwürfel sei.

Um uns von dieser Voraussetzung zu befreien, führen wir den allgemeinen Fall durch Fortsetzung von g auf den periodischen Fall zurück.

Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß T im Inneren des Würfels W: $0 \leqq x_\alpha \leqq 2\pi$ liegt, so daß der Abstand zwischen T und dem Rande von W größer, als eine positive Größe d ist. Es sei wieder S die Menge derjenigen Punkte außerhalb T, deren Abstand von T kleiner als d ist. Den Abstand des Punktes $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von T bezeichnen wir mit $t = t(P)$. Wir definieren die Fortsetzungsfunktion, wie folgt:

$$\begin{aligned} G &= g && \text{in } T \\ G &= \left(1 - \frac{t}{d}\right) g && \text{in } S \\ G &= 0 && \text{in } W - S - T. \end{aligned}$$

Wir setzen G außerhalb des Würfels periodisch in Bezug jeder der Veränderlichen mit der Periode 2π fort. Wir wählen $h < d$. Das Integral

$$\int_W (D_\alpha^h G)^2 \, dV$$

bleibt offenbar beschränkt. Es gilt nämlich, wenn wir die charakteristische Funktion des Gebietes $T+S$ mit φ bezeichnen,

$$|D_\alpha^h G(P)| \leqq \varphi(P)\, |D_\alpha^h g(P)| + \left|\frac{g(P)}{d}\right| + \left|\frac{g(P_1)}{d}\right|,$$

wobei wir den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha + h, \ldots, x_n)$ durch P_1 bezeichnet haben.

Da die Quadratintegrale der Glieder an der rechten Seite für alle h gleichmäßig beschränkt bleiben, haben wir gezeigt, daß die Voraussetzungen der Sätze aus Abschnitt **1** und **2** für G erfüllt sind. Da g in T mit G identisch ist, so gelten in T für g dieselben Sätze, w. z. b. w.

(Eingegangen am 22. Juni 1939)