Gegenseitige Schreiersche Gruppenerweiterungen.

Von L. RÉDEI und O. STEINFELD in Szeged.

Durchwegs seien gegeben zwei Gruppen G, Γ, von denen wir bequemlichkeitshalber annehmen, daß sie elementfremd sind. Bekanntlich nennt man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Schreiersche Erweiterung von Γ mit G, wenn $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler Γ' hat, so daß die Isomorphien

$$\Gamma' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx \mathfrak{G}$$

gelten. Eine solche Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir kurz mit $G \circ \Gamma$.

Unter einer gegenseitigen Schreierschen Erweiterung von G und Γ verstehen wir jede Gruppe, die gleichzeitig ein $G \circ \Gamma$ und ein $\Gamma \circ G$ ist. Diese Gruppen bezeichnen wir mit $G \bullet \Gamma$. (Die Begriffe $G \bullet \Gamma$ und $\Gamma \bullet G$ fallen zusammen, dagegen braucht ein $G \circ \Gamma$ im allgemeinen kein $\Gamma \circ G$ zu sein.)

Ausführlich gesprochen sind also die $G \bullet \Gamma$ diejenigen Gruppen $\mathfrak{G}$, die zwei Normalteiler G', Γ' enthalten, so daß

$$G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/G' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx G$$

gelten. Ist dabei der Durchschnitt von G' und Γ' das Einselement (von $\mathfrak{G}$), so ist $\mathfrak{G}$ bekanntlich das direkte Produkt $G \times \Gamma$ von G und Γ. Auch umgekehrt ist $G \times \Gamma$ stets ein $G \bullet \Gamma$. Von Interesse sind also nur diejenigen $\mathfrak{G} = G \bullet \Gamma$, für die die genannten G', Γ' einen Durchschnitt mit mindestens zwei Elementen haben. Ein einfaches Beispiel dieser Art bilden drei zyklische Gruppen $G, \Gamma, \mathfrak{G}$, wenn mindestens das eine von G, Γ endlich ist und für die Ordnungen dieser Gruppen $O(\mathfrak{G}) = O(G)O(\Gamma)$, $(O(G), O(\Gamma)) > 1$ gelten; in der Tat ist dann $\mathfrak{G} = G \bullet \Gamma \neq G \times \Gamma$. Ein weiteres Beispiel bilden drei Gruppen $G, \Gamma, \mathfrak{G}$, von denen $\mathfrak{G}$ die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte nichtkommutative elementare[1]) Gruppe mit $O(\mathfrak{G}) = p^3$ (p ungerade Primzahl), G die (zyklische) Gruppe mit $O(G) = p$ und Γ die nichtzyklische (Abelsche) Gruppe mit $O(\Gamma) = p^2$ ist.

Fortan bezeichnen a, b, c und α, β, γ beliebige Elemente, insbesondere e und ε das Einselement von G bzw. Γ.

Die Bestimmung aller $G \bullet \Gamma$ kann nach folgendem Satz geschehen:

---

[1]) Elementar nennt man eine Gruppe, wenn die Elemente außer dem Einselement von Primzahlordnung sind.

Satz. *Man nehme vier Funktionen*

$$(1)\qquad a^b,\ \alpha^b\ (\in \Gamma), \quad \alpha^\beta,\ a^\beta\ (\in G)$$

von je zwei Variabeln mit den Eigenschaften

$$(2)\qquad e^a = a^e = \varepsilon^a = \varepsilon,\ \alpha^e = \alpha, \quad \varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e^\alpha = e,\ a^\varepsilon = a,$$

$$(3)\qquad (\alpha\beta)^c = \alpha^c\beta^c, \qquad (ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma,$$

$$(4)\qquad b^c(\alpha^b)^c = \alpha^{bc}b^c, \qquad \beta^\gamma(a^\beta)^\gamma = a^{\beta\gamma}\beta^\gamma,$$

$$(5)\qquad (ab)^c(a^b)^c = a^{bc}b^c, \qquad (\alpha\beta)^\gamma(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}\beta^\gamma,$$

ferner vier Funktionen

$$(6)\qquad \varrho(\alpha),\ \sigma(a)\quad (\in \Gamma), \qquad r(a),\ s(\alpha)\quad (\in G)$$

von je einer Variabel mit den Eigenschaften

$$(7)\qquad \varrho(\alpha\beta) = \varrho(\alpha)\varrho(\beta), \qquad s(\alpha\beta) = \varrho(\alpha)^{\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\varrho(\beta)}s(\beta),$$

$$(8)\qquad \sigma(ab)\varrho(a^b) = \sigma(a)\sigma(b), \quad \sigma(ab)^{\varrho(a^b)}r(ab)^{\varrho(a^b)}s(a^b) = \sigma(a)^{\sigma(b)}r(a)^{\sigma(b)}r(b),$$

$$(9)\qquad \varrho(\alpha)\sigma(a) = \sigma(a)\varrho(\alpha^a), \quad \varrho(\alpha)^{\sigma(a)}s(\alpha)^{\sigma(a)}r(a) = \sigma(a)^{\varrho(\alpha^a)}r(a)^{\varrho(\alpha^a)}s(\alpha^a)$$

und der weiteren Eigenschaft, daß die Abbildung

$$(10)\qquad (a,\alpha) \to (\sigma(a)^{\varrho(\alpha)}r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha),\ \sigma(a)\varrho(\alpha))$$

eine Permutation aller Elemente

$$(11)\qquad (a,\alpha)$$

ist. Wird dann in der Menge dieser Elemente (11) *die Multiplikation*

$$(12)\qquad (a,\alpha)(b,\beta) = (ab,\ a^b\alpha^b\beta)$$

definiert, so entstehen (bis auf Isomorphie) eben die sämtlichen gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen $\mathfrak{G}$ *von* G *und* Γ.

Es gilt auch die folgende:

Ergänzung. *In einer solchen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *bilden die Elemente* (11) *mit*

$$(13)\qquad a = e \quad \text{bzw.} \quad \sigma(a)\varrho(\alpha) = \varepsilon$$

je einen Normalteiler Γ', G' *mit*

$$(14)\qquad G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/G' \approx \Gamma, \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx G.$$

Dabei besteht der Durchschnitt

$$(15)\qquad \vartheta = G' \cap \Gamma'$$

aus denjenigen Elementen (e,α), *für die*

$$(16)\qquad \varrho(\alpha) = \varepsilon$$

ist. (Diese α bilden nach (7) den Kern des Endomorphismus $\alpha \to \varrho(\alpha)$ von Γ. Dann und nur dann ist also $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der Untergruppen G', Γ', wenn dieser Endomorphismus ein Meromorphismus ist.)

Bemerkung. Unseren Satz kann man den Hauptsatz der gegenseitigen Schreierschen Gruppenerweiterungen nennen, da durch ihn das aufgeworfene Problem in ähnlichem Sinne erledigt ist, wie auch das Problem der (gewöhnlichen) Schreierschen Gruppenerweiterungen durch den bekannten Schreierschen Hauptsatz gelöst wurde. Nach unserem Satz scheint z. B. keine schwierige Aufgabe zu sein die gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen von zwei endlich erzeugbaren[2]) Abelschen Gruppen explicit anzugeben. Mit diesem und weiteren Beispielen möchten wir uns an anderer Stelle beschäftigen. — Obwohl unser Problem symmetrisch in G und Γ ist, so zeigen sich doch in unserem Satz neben vielen Symmetrien auch gewisse Asymmetrien. Es wäre erwünscht, die Lösungen in vollkommen symmetrischer Form anzugeben, was uns aber nicht geglückt hat.

B e w e i s d e s S a t z e s. Wird in der Menge aller (11) eine Multiplikation

(17) $$(a,\alpha)(b,\beta)=(ab, a^{\beta}\alpha^{b}\beta)$$

definiert, wobei

(18) $$a^{\beta}, \alpha^{b} \quad (\in \Gamma)$$

irgendzwei Funktionen mit den „Anfangsbedingungen"

(19) $$e^{\alpha}=a^{\varepsilon}=\varepsilon^{a}=\varepsilon,\quad \alpha^{e}=\alpha$$

sind, so nennen wir nach RÉDEI[3]) die entstandene (multiplikative) Struktur ein Schreiersches Produkt von G und Γ und bezeichnen dieses mit $G\cdot\Gamma$. (Wegen (17), (19) hat $G\cdot\Gamma$ das Einselement (e,ε), braucht aber im allgemeinen nicht assoziativ zu sein.) Mit Hilfe dieses Begriffs lässt sich nach RÉDEI[3]) der erwähnte Schreiersche Hauptsatz in den folgenden zwei Sätzen formulieren:

(A) Die unter den Schreierschen Produkten $G\cdot\Gamma$ vorkommenden Gruppen sind (von Isomorphie abgesehen) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $G\circ\Gamma$ (von Γ mit G). Und zwar bilden in jeder Gruppe $G\cdot\Gamma$ die Elemente (e,α) einen Normalteiler Γ' mit den Eigenschaften[4])

(20) $$\Gamma'\approx\Gamma\ ((e,\alpha)\to\alpha),\qquad (G\cdot\Gamma)/\Gamma'\approx G\ ((a,\varepsilon)\Gamma'\approx a).$$

(B) Damit ein Schreiersches Produkt $G\cdot\Gamma$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß

(21) $$(\alpha\beta)^{c}=\alpha^{c}\beta^{c},$$

(22) $$b^{c}(\alpha^{b})^{c}=\alpha^{bc}b^{c},$$

(23) $$(ab)^{c}(a^{b})^{c}=a^{bc}b^{c}$$

erfüllt sind.

Dies alles wollen wir auch auf Γ, G statt G, Γ anwenden. Zu diesem Zweck muß vor allem gesagt werden, daß nach obigem ein Schreiersches

---

[2]) Endlich erzeugbar nennen wir eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden.

[3]) L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[4]) Mit $S\approx S'$ $(\alpha\to\alpha')$ bezeichnen wir, daß $\alpha\to\alpha'$ eine isomorphe Abbildung der Struktur S auf die Struktur S' ist.

Produkt $\Gamma \cdot G$ aus den Elementen (α, a) besteht, die nach der Regel

$$(\alpha, a)\ (\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha^\beta a^\beta b) \tag{24}$$

multipliziert werden, wobei

$$\alpha^\beta,\ a^\beta\ (\in G) \tag{25}$$

zwei Funktionen sind, unterworfen den „Anfangsbedingungen"

$$\varepsilon^\alpha = \alpha^\varepsilon = e^\alpha = e, \quad a^\varepsilon = a. \tag{26}$$

Den Sätzen (A), (B) ähnlich gelten dann:

(A′) Die unter den Schreierschen Produkten $\Gamma \cdot G$ vorkommenden Gruppen sind (von Isomorphie abgesehen) die sämtlichen Schreierschen Erweiterungen $\Gamma \circ G$ (von G mit Γ). Und zwar bilden in jeder Gruppe $\Gamma \cdot G$ die Elemente (ε, a) einen Normalteiler G_0 mit den Eigenschaften

$$G_0 \approx G\ ((\varepsilon, a) \rightarrow a), \qquad (\Gamma \cdot G)/G_0 \approx \Gamma\ ((\alpha, e) G_0 \rightarrow \alpha). \tag{27}$$

(B′) Damit ein Schreiersches Produkt $\Gamma \cdot G$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(ab)^\gamma = a^\gamma b^\gamma, \tag{28}$$

$$\beta^\gamma (a^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma} \beta^\gamma, \tag{29}$$

$$(\alpha\beta)^\gamma (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma} \beta^\gamma \tag{30}$$

erfüllt sind.

Nach diesen Vorbereitungen legen wir uns ein Schreiersches Produkt

$$\mathfrak{G} = G \cdot \Gamma \tag{31}$$

vor. Dies besteht — wir wiederholen — aus den Elementen (a, α), die (nach (17) d. h.) nach (12) multipliziert werden, wobei für die Funktionen a^b, α^b ((18) und (19) d. h.) (1_1) und (2_1) vorausgesetzt sind.[5]) Nach den Sätzen (A), (B) stimmen (bis auf Isomorphie) die sämtlichen gegenseitigen Schreierschen Erweiterungen $G \bullet \Gamma$ von G und Γ mit denjenigen Gruppen (31) überein, die mit einem $\Gamma \cdot G$ isomorph sind. Wir haben deshalb die Bedingungen aufzustellen, damit (31) eine Gruppe und isomorph mit einem $\Gamma \cdot G$ ist. Es wird sich zeigen, daß das dann und nur dann der Fall ist, wenn es weitere sechs Funktionen $\alpha^\beta, a^\beta, \varrho(\alpha), \sigma(a), r(a), s(\alpha)$ gibt, so daß (1) bis (10) erfüllt sind. Das wird eben die Richtigkeit unseres Satzes bedeuten.

Damit (31) eine Gruppe ist, ist nach Satz (A) notwending und hinreichend, daß ((21) bis (23) d. h.) (3_1) bis (5_1) erfüllt sind. Im übrigen Teil des Beweises dürfen wir also (mit den vorhererwähnten (1_1) (2_1) zusammen) (1_1) bis (5_1) voraussetzen — diese besagen eben, daß $\mathfrak{G}$ in (31) eine Gruppe ist — und dann haben wir nur noch die notwendige und hinreichende Bedingung zu bestimmen, damit ein Isomorphismus

$$\mathfrak{G} \approx \mathfrak{G}' \tag{32}$$

---

[5]) Mit (1_1) bis (9_1) bzw. (1_2) bis (9_2) bezeichnen wir die erste bzw. zweite Hälfte von (1) bis (9).

gilt, wobei $\mathfrak{G}'$ irgendein Schreiersches Produkt

$$\mathfrak{G}' = \Gamma \cdot G \tag{33}$$

bezeichnet.

Der Isomorphismus (32) bedeutet, daß es zwei Funktionen

$$f(a, \alpha) \in G, \quad \varphi(a, \alpha) \in \Gamma \tag{34}$$

gibt, so daß

$$(a, \alpha) \to (\varphi(a, \alpha), f(a, \alpha)) \qquad (f(a, \alpha) \in G, \varphi(a, \alpha) \in \Gamma) \tag{35}$$

eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller (a, α) auf die Menge aller (α, a) ist und die Homomorphieeigenschaft

$$(a, \alpha)(b, \beta) \to (\varphi(a, \alpha), f(a, \alpha))(\varphi(b, \beta), f(b, \beta)) \tag{36}$$

gilt, wobei das Produkt links und rechts in der Gruppe $\mathfrak{G}$ bzw. im Schreierschen Produkt $\mathfrak{G}'$ zu verstehen ist.

Einerseits besagt (35) (wegen (34)), daß die Abbildung

$$(a, \alpha) \to (f(a, \alpha), \varphi(a, \alpha)) \tag{37}$$

eine Permutation der Elemente (11) ist.

Andererseits besagt (36) wegen (17), (24), (35) das Bestehen von

$$\begin{aligned}(\varphi(ab, a^b\alpha^b\beta), f(ab, a^b\alpha^b\beta)) &= \\ &= (\varphi a, \alpha)\, \varphi(b, \beta), \varphi(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(b, \beta)),\end{aligned} \tag{38}$$

wobei die (in die rechte Seite eingehenden) Funktionen α^β, a^β die Bedingungen ((25), (26) d. h.) (1_2) (2_2) erfüllen (und sonst beliebig sind).

Umgekehrt, wenn (34), (37), (38), (1_2), (2_2) gelten, also die Isomorphie (32) besteht, so muß (mit $\mathfrak{G}$ zusammen auch) $\mathfrak{G}'$ eine Gruppe sein, woraus nach Satz (B′) folgt, daß in diesem Fall notwendig auch ((21) bis (23) d. h.) (3_2) bis (5_2) gelten.

Nach diesen Überlegungen dürfen wir also im folgenden (1) bis (5) voraussetzen, und dann haben wir zu zeigen, daß die sämtlichen Lösungen (34) von (38) gerade die aus den Lösungen (6) von (7) bis (9) entspringenden Funktionen

$$f(a, \alpha) = \sigma(a)^{\varrho(\alpha)} r(a)^{\varrho(\alpha)} s(\alpha), \quad \varphi(a, \alpha) = \sigma(a)\varrho(\alpha) \tag{39}$$

sind. (Dabei haben wir berücksichtigt, daß (37) für (39) eben in (10) übergeht.)

Statt (38) dürfen wir

$$\varphi(ab, a^b\alpha^b\beta) = \varphi(a, \alpha)\varphi(b, \beta), \tag{40}$$

$$f(ab, a^b\alpha^b\beta) = \varphi(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(a, \alpha)^{\varphi(b, \beta)} f(b, \beta) \tag{41}$$

schreiben.

Wenn wir hier das Tripel b, α, β durch das Tripel e, ε, α ersetzen, so gewinnen wir

$$f(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)^{\varphi(e, \alpha)} f(a, \varepsilon)^{\varphi(e, \alpha)} f(e, \alpha), \tag{42}$$

$$\varphi(a, \alpha) = \varphi(a, \varepsilon)\varphi(e, \alpha). \tag{43}$$

Führen wir also die Bezeichnungen

$$\varrho(\alpha)=\varphi(e,\alpha),\quad \sigma(a)=\varphi(a,\varepsilon),\quad r(a)=f(a,\varepsilon),\quad s(\alpha)=f(e,\alpha) \tag{44}$$

ein, so folgt aus (34) das Bestehen von (6), ferner gehen (42), (43) wegen (44) in (39) über.

Hiernach genügt es folgendes zu zeigen: Unter der Annahme (1) bis (6) liefert (39) dann und nur dann eine Lösung von (40), (41), wenn (7) bis (9) gelten.

Gleich bemerken wir, daß wegen (2) aus (40), (41) für $a=b=e$, $\alpha=\beta=\varepsilon$ offenbar $\varphi(e,\varepsilon)=\varepsilon$, $f(e,\varepsilon)=e$, d. h. nach (44)

$$\varrho(\varepsilon)=\sigma(e)=\varepsilon,\quad r(e)=s(\varepsilon)=e \tag{45}$$

folgt.

Setzen wir nun (39) in (40), (41) ein:

$$\sigma(ab)\varrho(a^b\alpha^b\beta)=\sigma(a)\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta), \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\sigma(ab)^{\varrho(a^b\alpha^b\beta)}r(ab)^{\varrho(a^b\alpha^b\beta)}s(a^b\alpha^b\beta)= \\ =(\sigma(a)\varrho(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(\sigma(a)^{\varrho(\alpha)}r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta).\end{aligned} \tag{47}$$

Nach obigem dürfen wir also (1) bis (6), ferner (45) annehmen, und dann haben wir nur zu zeigen, daß die Bedingungen (46), (47) äquivalent mit (7) bis (9) sind.

Wegen (2), (45) gehen (46), (47) für $a=b=e$ bzw. $\alpha=\beta=\varepsilon$ in (7) bzw. (8) über. Wieder wegen (2), (45) gehen ferner dieselben Gleichungen (46), (47) bei Ersetzung des Quadrupels a, b, α, β durch $e, a, \alpha, \varepsilon$ eben in (9) über. Deshalb genügt es, wenn wir zeigen, daß umgekehrt aus (1) bis (9)[6]) die Gleichungen (46), (47) folgen. Wir zeigen sogar, daß (40), (47) eine Folgerung aus (1) und (3) bis (9) ist.

Wegen (7_1) geht die linke Seite von (46) in

$$\sigma(ab)\varrho(a^b)\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)$$

über. Hierfür schreibt sich nach (8_1)

$$\sigma(a)\sigma(b)\varrho(a^b)\varrho(\beta).$$

Dies stimmt wegen (9_1) in der Tat mit der rechten Seite von (46) überein.

Der entsprechende Beweis für (47) wird viel mühsamer. Dabei werden wir (1) und (6) (ohne Verweis) stets zu berücksichtigen haben, ferner werden wir mehrmals die aus (3_2) bis (5_2) folgende Gleichung

$$\alpha^{\beta\gamma}a^{\beta\gamma}\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma}(\alpha^{\beta}a^{\beta})^{\gamma} \tag{48}$$

verwenden.

[6]) Die Gleichungen (45) braucht man dabei nicht zu beachten, die übrigens auch schon aus (1) bis (9) folgen.

Nach (7_1) und (7_2) gelten:

$$\varrho(a^b\alpha^b\beta) = \varrho(a^b)\varrho(\alpha^b\beta),$$
$$s(a^b\alpha^b\beta) = \varrho(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Werden diese in die linke Seite von (47) eingesetzt und wird (48) mit $\sigma(ab), \varrho(a^b), \varrho(\alpha^b\beta), r(ab)$ statt α, β, γ, a verwendet, so geht sie über in:

$$(\sigma(ab)\varrho(a^b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}(\sigma(ab)^{\varrho(a^b)}r(ab)^{\varrho(a^b)})^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(a^b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Dies ist wegen (8_1), (3_2) und (8_2) gleich

$$(\sigma(a)\sigma(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}(\sigma(a)^{\sigma(b)}r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta).$$

Durch nochmalige leichte Umformung nach (3_2) und (5_2) gewinnen wir also für die linke Seite von (47) den Ausdruck:

$$\sigma(a)^{\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}(r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta). \tag{49}$$

Wird (5_2) mit $\sigma(a), \varrho(\alpha), \sigma(b)\varrho(\beta)$ statt α, β, γ verwendet, so sieht man nach (3_2), daß sich die rechte Seite von (47) verwandeln läßt in:

$$\sigma(a)^{\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta)}\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta). \tag{50}$$

Da nach (7_1) und (9_1)

$$\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta) = \sigma(b)\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta) = \varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta) \tag{51}$$

ist, so sind die ersten Faktoren in (49) und (50) einander gleich. Hiernach gilt für (47) die Umformung:

$$\begin{aligned} \sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}(r(a)^{\sigma(b)}r(b))^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta) &= \\ = \varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}(r(a)^{\varrho(\alpha)}s(\alpha))^{\sigma(b)\varrho(\beta)}&\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta). \end{aligned} \tag{52}$$

Die linke Seite läßt sich nach (3_2) und (4_2) leicht verwandeln in:

$$r(a)^{\sigma(b)\varrho(\alpha^b\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta). \tag{53}$$

Die rechte Seite von (52) verwandelt sich nach (3_2) unter Verwendung von (4_2) mit $r(a), \varrho(\alpha), \sigma(b)\varrho(\beta)$ statt a, β, γ in:

$$r(a)^{\varrho(\alpha)\sigma(b)\varrho(\beta)}\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta).$$

Die ersten Faktoren hier und in (53) sind wegen (51) gleich, weshalb (für (52) also) für (47) die Umformung

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}s(\alpha^b\beta) = \varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(\beta)}r(b)^{\varrho(\beta)}s(\beta)$$

gilt.

Wird links auf den letzten Faktor (7_2) angewendet, so entsteht nach Kürzung durch $s(\beta)$:

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}r(b)^{\varrho(\alpha^b\beta)}\varrho(\alpha^b)^{\varrho(\beta)}s(\alpha^b)^{\varrho(\beta)} = \varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)}s(\alpha)^{r(b)\varrho(\beta)}\sigma(b)^{\varrho(b)}r(b)^{\varrho(\beta)} \tag{54}$$

Aus (48) folgen

$$\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)} r(b)^{\varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)} \varrho(\alpha^b)^{\varrho(\beta)} = (\sigma(b)\varrho(\alpha^b))^{\varrho(\beta)} (\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)} r(b)^{\varrho(\alpha^b)})^{\varrho(\beta)},$$
$$\varrho(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)} s(\alpha)^{\sigma(b)\varrho(\beta)} \sigma(b)^{\varrho(\beta)} = (\varrho(\alpha)\sigma(b))^{\varrho(\beta)} (\varrho(\alpha)^{\sigma(b)} s(\alpha)^{\sigma(b)})^{\varrho(\beta)}.$$

Da ferner nach (7_1) $\varrho(\alpha^b\beta) = \varrho(\alpha^b)\varrho(\beta)$ ist, so folgt aus diesen und aus (54)

$$(\sigma(b)\varrho(\alpha^b))^{\varrho(\beta)} (\sigma(b)^{\varrho(\alpha^b)} r(b))^{\varrho(\alpha^b)})^{\varrho(\beta)} s(\alpha^b)^{\varrho(\beta)} =$$
$$= (\varrho(\alpha)\sigma(b))^{\varrho(\beta)} (\varrho(\alpha)^{\sigma(b)} s(\alpha)^{\sigma(b)})^{\varrho(\beta)} r(b)^{\varrho(\beta)}.$$

Wegen (9_1) sind beiderseits die ersten Faktoren gleich, weshalb sie sich streichen lassen. Wird in der übriggebliebenen Gleichung a statt b geschrieben, so hat man nach (3_2) eben die $\varrho(\beta)$-te Potenz von (9_2) vor sich. Das beweist den Satz.

Wir haben noch die Ergänzung des Satzes zu beweisen. Vor allem gilt nach (A):

$$(55) \qquad \Gamma \approx \Gamma', \quad \mathfrak{G}/\Gamma' \approx G.$$

Ferner haben wir im Beweis des Satzes gesehen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch (35) isomorph auf eine Gruppe $\Gamma \cdot G$ abgebildet wird. Für diese gilt nach Satz (A'):

$$(56) \qquad G_0 \approx G, \quad (\Gamma \cdot G)/G_0 \approx \Gamma,$$

wobei G_0 der aus den Elementen (ε, a) bestehende Normalteiler von $\Gamma \cdot G$ ist. Bei der isomorphen Abbildung (35) bilden also die Urbilder der Elemente (ε, a) einen Normalteiler G_1 von $\mathfrak{G}$, wofür

$$(57) \qquad G_1 \approx G, \quad \mathfrak{G}/G_1 \approx \Gamma$$

gelten. Wegen (35) besteht G_1 aus denjenigen (a, α), für die

$$\varphi(a, \alpha) = \varepsilon$$

gilt. Diese Bedingung stimmt nach (39_2) mit

$$\sigma(a)\varrho(\alpha) = \varepsilon.$$

überein. Somit ist $G_1 = G'$, weshalb (55), (57) eben die Richtigkeit von (14) besagen.

Ferner ist klar, daß ϑ in (15) aus den (e, α) mit

$$(58) \qquad \sigma(e)\varrho(\alpha) = \varepsilon$$

besteht. Da aber aus (2_1), (7_1), (8_1) $\varrho(\varepsilon) = \sigma(e) = \varepsilon$ folgt, (was wir übrigens auch aus (45_1) wissen), so stimmt (58) mit (16) überein. Das beweist die Ergänzung des Satzes.

Bemerkung bei der Korrektur. Die Verfasser beabsichtigen sich mit dem entsprechenden Problem der gegenseitigen Ringerweiterungen andermal zu beschäftigen.

(Eingegangen am 10. Juli 1954.)