Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables.

En souvenir de Béla Kerékjártó, au dixième anniversaire de sa mort.

Par MIKLÓS MIKOLÁS à Budapest.

1. Depuis que l'exemple classique de WEIERSTRASS:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos (a^n \pi x)$$

$\left(a \text{ entier, impair}; \ 0 < b < 1, \ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$ a été publié[1]), beaucoup d'auteurs se sont occupés des *fonctions continues sans dérivées.* KNOPP[2]) discute la plupart des exemples trouvés jusqu'à 1918 sur la base d'un procédé uniforme et général. Le sujet inspirait aussi des recherches plus récentes: outre l'exemple élégant de VAN DER WAERDEN $\left(V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}((10^n x)), \ ((x))\right.$ désignant la distance de x à l'entier le plus proche$\left.\right)$ et d'autres exemples tout à fait particuliers[3]), citons certains résultats des écoles mathématiques polonaise et indienne, fournissant des classifications des exemples suivant les nombres de DINI resp. les zéros des fonctions en question.[4])

Dans cet article, je vais donner une *méthode* simple nouvelle à construire des fonctions continues sans dérivée (théorème 2), qui s'appuye, à la différence de KNOPP, sur le critère (1) nécessaire et suffisant de la dérivabilité. Remarquons que la classe des fonctions ainsi obtenues contient presque tous les exemples relatifs de la littérature, sauf certains de caractère arithmétique. Dans un cas très particulier que l'on peut considérer comme un „paradigme"

---

[1]) V. [6] et aussi [22].

[2]) [12]. — KNOPP traite des fonctions périodiques $f(x)$ qui s'obtiennent des lignes brisées par l'opération limite; il exige que les deux limites ($\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$) de $[f(x+h)-f(x)]/h$ soient égales à $+\infty$ resp. $-\infty$ pour toute valeur de x à l'intérieur de l'intervalle de définition.

[3]) Cf. outre [21] (démonstration de HEYTING) par ex. [3], [4], [8], [10], [13], [20].

[4]) Cf. par ex. [2], [15], [16], [17] resp. [14], [18] et encore [1].

du procédé, il résulte un *exemple élémentaire* pour lequel la vérification de la continuité et non-dérivabilité s'effectue en deux phrases (théorème 1). En considérant des fonctions de la forme $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(\nu_k x)$ où $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|<\infty$ et $\nu_k|\nu_{k+1}$ $(k=0,1,\ldots)$ on parvient à des *résultats de type nouveau:* $\Phi(x)$ est continue, non dérivable pour $\varphi(x)$ arbitraire, composée de traits *convexes* (ou concaves) resp. $\in \mathrm{Lip}\,1$, périodique, à supposer que c_k, ν_k satisfont certaines relations limites bien réalisables (théorèmes 4—6). Comme corollaires s'obtiennent des propositions généralisant de plusieurs points de vue l'exemple de WEIERSTRASS et celui de VAN DER WAERDEN (théorèmes 3 et 7).

2. Soit $f(x)$ une fonction définie sur un segment[5]) et supposons que, dans un point a intérieur de ce segment, $f(x)$ admet une dérivée finie et déterminée. Alors, si petit que soit le nombre $\varepsilon>0$, on a un $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tel que l'inégalité

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right|<2\varepsilon \tag{1}$$

est vérifiée pour *tous* les couples $t_1 \neq t_2$, $u_1 \neq u_2$ avec $a-\delta<t_1 \leqq a \leqq t_2< <a+\delta$ et $a-\delta<u_1 \leqq a \leqq u_2<a+\delta$.[6])

Soient donnés deux points: $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$, $x_1<x_2$; nous considérons le point[7]) $M(\xi, \eta)$ avec $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\eta=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_2-x_1)$ et les segments $\overline{MP_1}, \overline{MP_2}$. Ces derniers seront appelés les *contributions* de $\overline{P_1P_2}$ et $P_1MP_2\triangle$ un *triangle de contribution.* On a les pentes des côtés: $\frac{\eta-y_1}{\xi-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+1$, $\frac{y_2-\eta}{x_2-\xi}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-1$.

Formons les contributions des segments $[i, i+1]$ $(i=0, \pm 1, \ldots)$ de l'axe des x; la ligne brisée ainsi obtenue représente une fonction continue $G_1(x)$. Formons maintenant les contributions des „cotés" de cette ligne brisée, nous obtenons ainsi la fonction continue $G_2(x)$ et, en répétant ce procédé, la fonction $G_3(x)$ etc.

Théorème 1. *(I) La fonction* $G(x)=\lim_{n\to\infty} G_n(x)$ *est partout continue, mais (II) elle n'admet de dérivée en aucun point. — On a la représentation* $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}((2^k x))$, $((x))$ *signifiant la distance de x à l'entier le plus proche.*

---

[5]) Nous réservons ce mot (suivant DENJOY) pour un ensemble linéaire connexe et *fermé,* cependant (a, b) signifiera toujours un intervalle *ouvert.*

[6]) En vertu du critère de convergence de CAUCHY, cette condition est aussi *suffisante* pour la dérivabilité.

[7]) La signification géométrique de M est évidente.

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair que $G_{k+1}(x) - G_k(x) \leqq 2^{-(k+1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, donc $G_n(x) = G_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [G_{k+1}(x) - G_k(x)]$ $(n = 2, 3, \ldots)$ converge uniformément pour $-\infty < x < \infty$ et il s'ensuit (I). Quant à (II), remarquons que le graphique de $G(x)$ contient évidemment les sommets de tout triangle de contribution employé; ainsi, étant donné un point a et un intervalle $(a-\delta, a+\delta)$ quelconque, il y existe trois points de la forme $x_1 = r \cdot 2^{-k}$, $x_2 = (r+1)2^{-k}$, $\xi = (2r+1)2^{-k-1}$ (r entier) avec $a \in [x_1, x_2]$ et

$$\frac{G(\xi) - G(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{G(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{G(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{G(x_2) - G(\xi)}{x_2 - \xi} = 1,$$

en contradiction à (1).

Quant à la représentation en question, elle s'ensuit de ce que, en posant $G_0(x) \equiv 0$, la différence $G_{k+1}(x) - G_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ a la valeur 2^{-k-1} au milieu de chaque intervalle $[r \cdot 2^{-k}, (r+1)2^{-k}]$, s'annule aux extrémités, et est lineaire dans les deux moitiées de cet intervalle.[8])

3. L'essentiel simple du raisonnement précédent peut être exprimé (un peu plus généralement) de la manière suivante:

L e m m e. *Soit $f(x)$ définie sur un segment I et soit a un point intérieur à I. Si tout intervalle de la forme $(a-\delta, a+\delta)$, appartenant à I, contient trois points équidistants $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ $(h > 0)$ tels que $a \in [x_0 - h, x_0 + h]$ et*

$$\left| f(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0 + h) + f(x_0 - h)] \right| \geqq 2h \cdot \lambda, \tag{2}$$

λ désignant un nombre positif fixe, alors $f(x)$ n'est pas dérivable au point a.

En effet, on voit de (2) que la différence

$$\begin{aligned} d &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{3}$$

n'est pas inférieure à 2λ en valeur absolue, mais c'est en contradiction à la condition (1), pourvu que δ est choisi suffisamment petit.

Soit $\lambda > 0$ donné une fois pour toutes. Il est évident que, $Q(x, y)$ et $Q'(x', y')$ désignant deux points donnés avec $x < x'$, on peut construire tou-

---

[8]) La série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}((2^k x))$ peut être étudiée aussi, naturellement, par la méthode de VAN DER WAERDEN (cf. [10], [13], [20]); il semble que cette série a été donnée premièrement par [19] sous une toute autre forme, c'est-à-dire par un procédé arithmétique.

jours facilement un point $P(\xi, \eta)$ tel que $\xi = \frac{1}{2}(x+x')$, $\left|\eta - \frac{1}{2}(y+y')\right| \geqq$ $\geqq \lambda(x'-x)$ (cf. (2)); P sera appelé un *associé* de Q et Q'.

Nous allons donner, sur la base du lemme ci-dessus, une *méthode générale* pour construire des *familles de fonctions continues sans dérivée.* — Soient $y = F_0(x)$ une fonction partout continue, $Q_i(a_i, b_i)$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ une suite de points avec $a_i < a_{i+1}$, $b_i = F_0(a_i)$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \infty$, $\lim\limits_{i\to-\infty} a_i = -\infty$ et soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varrho_n$ une série convergente de nombres positifs. Nous envisageons le ϱ_1-voisinage[9]) V_{ϱ_1} du graphique $y = F_0(x)$ et faisons correspondre à un arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ quelconque du graphique un système de points $P_r(x_r, y_r)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ de sorte que 1) P_0, P_m sont identiques à Q_i resp. Q_{i+1}, $P_r \in V_{\varrho_1}$ et $x_r < x_{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$; 2) il y a un associé $P_r^* \in V_{\varrho_1}$ de tout couple P_r, P_{r+1}.[10]) Formons maintenant un arc de courbe dans V_{ϱ_1} auquel appartiennent tous les points P_r et P_r^* et dont la projection sur l'axe des x est le segment $[a_i, a_{i+1}]$; il soit appelé un *adjoint* de premier ordre de l'arc $[Q_i, Q_{i+1}]$. De même, si l'on forme le ϱ_2-voisinage V_{ϱ_2} de cet adjoint, si on fait correspondre à chacun de ses arcs $[P_r, P_r^*]$, $[P_r^*, P_{r+1}]$ un système fini de points, d'une manière analogue que $\{P_r\} \cup \{P_r^*\}$ à $[Q_i, Q_{i+1}]$ plus haut, et si l'on fait passer par chaque système ainsi obtenu un arc $\subset V_{\varrho_2}$, on parvient à $2m$ adjoints de second ordre de $[Q_i, Q_{i+1}]$. Le pas prochain du procédé fournit les adjoints de troisième ordre $(\subset V_{\varrho_3})$ de $[Q_i, Q_{i+1}]$ etc. — La fonction continue représentée par les adjoints de premier ordre de tout arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit appelée $y = F_1(x)$, la fonction définie par tous les adjoints de second ordre soit $y = F_2(x)$ etc.

Théorème 2. *$F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ est partout continue mais n'est dérivable en aucun point.*

Démonstration. 1° D'après la construction, on a les inégalités $|F_{k+1}(x) - F_k(x)| < \varrho_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; comme $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varrho_{k+1} < \infty$, cela entraîne la convergence uniforme de la suite:

$$F_n(x) = F_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} [F_{k+1}(x) - F_k(x)] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

---

[9]) Dans les lignes suivantes, c'est l'ensemble des points (x, y) avec $a \leqq x \leqq a'$, $f(x) - \varrho < y < f(x) + \varrho$ que nous appelons le „ϱ-voisinage" d'un arc $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq a')$. — Les termes „arc" ou „arc de courbe" seront réservés pour des courbes de Jordan admettant une représentation analytique de la forme $y = y(x)$ où $y(x)$ est *uniforme* et continue.

[10]) Il est clair que tout système $\{P_r\}$ avec 1) satisfait à 2) pourvu que $\max(x_{r+1} - x_r)$ soit assez petit.

et, puisque chaque $F_n(x)$ est partout continue, à la fois la continuité de $F(x)$ pour $-\infty < x < \infty$.

Désignons par E_n l'ensemble composé des extrémités de tous les adjoints d'ordre n. D'après la condition 1), les points de E_n appartiennent simultanément aux graphiques $F_n(x), F_{n+1}(x), F_{n+2}(x), \ldots$ et ainsi à la courbe de $F(x)$ aussi $(n=1,2,\ldots)$. Par conséquent, le graphique de $F(x)$ contient $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

2° Nous remarquons tout d'abord que (à cause de l'usage des points associés) la projection de tout adjoint de second ordre de $[Q_i, Q_{i+1}]$ sur l'axe des x possède une longueur $\leqq \frac{1}{2}(a_{i+1}-a_i)$, la projection de chacun des adjoints de troisième ordre est d'une longueur $\frac{1}{4}(a_{i+1}-a_i)$ au plus etc. $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ceci entraîne évidemment que, un arc $[Q_i, Q_{i+1}]$ et un nombre δ positif quelconque étant fixés, il existe un entier $N=N(\delta)$ tel que toutes les projections des adjoints d'ordre $n \geqq N$ de $[Q_i, Q_{i+1}]$ sont d'une longueur inférieure à δ; en outre, la projection de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ est partout dense sur l'axe des x.

Soient donnés maintenant un point $x=a$ et un intervalle $(a-\delta, a+\delta)$; choisissons i de sorte que a appartienne au segment $[a_i, a_{i+1}]$ et N de la manière que nous venons de mentionner. Alors, on peut trouver un adjoint C_N (d'ordre N) tel que la projection de C_N sur l'axe des x contient le point a et qu'elle est comprise entièrement dans $(a-\delta, a+\delta)$. Sur la base de la construction et 1°, C_N contient trois points $Q(x, F(x)), P(\xi, F(\xi)), Q'(x', F(x'))$ tels que $a \in [x, x']$ et P est un associé de Q, Q'; comme $[x, x'] \subset (a-\delta, a+\delta)$, et $\delta > 0$ est arbitraire, il s'ensuit immédiatement du lemme que $F(x)$ n'est pas dérivable au point a, c. q. f. d.

4. En ce qui concerne les *applications* du théorème 2, on peut vérifier d'abord sans peine que la plupart des exemples géométriques connus satisfont aux conditions en question (cf. [12]).

Si l'on pose $F_0(x)=f_0(x), F_{k+1}(x)-F_k(x)=f_{k+1}(x)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire $F_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, il s'agit de la série

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \tag{5}$$

dont les sommes partielles sont soumises à certaines restrictions. Ces dernières peuvent être réalisées le plus facilement de façon analytique, en tant que l'on considère des combinaisons linéaires de fonctions périodiques, dont les fréquences sont en rapport rationnel, et lesquelles s'annulent aux extrémités d'un intervalle de période. (On peut vérifier, par exemple, les conditions de théorème 2 pour $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(2\mu)^{-k}((2^k\mu^k x))$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $F(x)=$ $=\sum_{k=0}^{\infty}(2\mu)^{-k}((2^k\mu^k x))$, μ désignant un entier positif >1 et $((x))$ ayant la même signification, qu'au théorème 1.)

5. Dans ce qui suit nous considérons toujours cette *représentation analytique.* — Fixons quelques *notations* et *restrictions* permanentes. $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont des coefficients réels $\neq 0$ pour lesquels $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ converge; $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ est une suite de nombres entiers positifs tels que ν_k est une diviseur de ν_{k+1}, $\nu_k<\nu_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$; nous écrirons $\nu_{k,l}=\frac{\nu_k}{\nu_l}$. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue pour $-\infty<x<\infty$, ayant une période $p>0$, et soit

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi(\nu_k x). \tag{6}$$

$\Phi(x)$ est évidemment une fonction partout continue.

Théorème 3. *Soit $\varphi(x)$ convexe (ou concave) sur le segment $[0,p]$. Supposons que $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont de même signe et qu'il y a une constante $\varrho>0$, telle que $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\ldots)$.*

Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.[11])

Nous allons donner une forme plus générale à cette proposition. Une fonction $f(x)$ est appelée *convexe par segments* dans $[a,b]$ avec les points de division $a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$, si $f(x)$ est continue en ces points et convexe ou linéaire sur chacun des segments $[x_{r-1},x_r]$ $(r=1,2,\ldots,m)$. Les fonctions concaves par segments sont définies d'une manière analogue.

Théorème 4. *Soit $\varphi(x)$ convexe (ou concave) par segments dans $[0,p]$ avec les points de division ω_r $(r=0,1,\ldots,m)$; soit $\varphi(0)>$ (resp. $<$) $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. Supposons que 1) $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont de même signe; 2) il y a des*

[11]) Pour être court, nous abbrévions les mots: „partout continue non dérivable" par leurs initiales. — Maintenant et plus tard, nous faisons usage des définitions de Jensen [11]: une fonction $f(x)$ définie sur $[a,b]$, est dite convexe resp. concave sur ce segment, suivant que l'on a $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ resp. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ pour tout couple $x_1, x_2\in[a,b]$, le signe d'égalité n'étant pas toujours valable (cas de linéarité).

valeurs de k arbitrairement grandes pour lesquelles les rapports $\nu_{k,k-1}\cdot\omega_r/p$ $(r=0,1,\ldots,m)$ *sont entiers;* 3) $\varliminf_{k\to\infty}\nu_k|c_k|>0$.

Dans ces conditions, $\Phi(x)$ *est p. c. n. d.*

Démonstration. En vertu de 2), chaque rapport ω_r/p est rationnel (en particulier $\omega_0/p=0$, $\omega_m/p=1$); donc $\omega_r=\frac{\beta_r}{\gamma_r}p$ $(r=1,2,\ldots,m-1)$ où β_r,γ_r sont des entiers positifs sans diviseur commun. Γ signifiant le plus petit multiple commun de $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1}$, la condition 2) implique l'existence d'une suite $n_1<n_2<\cdots$ telle que $\nu_{k,k-1}$ est divisible par Γ pour $k=n_1,n_2,\ldots$. — En vertu de 3) il y a une constante $\varrho>0$ telle que $\nu_k|c_k|\geqq\varrho$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Envisageons trois points équidistants de la forme $\frac{\mu}{\nu_n}p$, $\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p$, $\frac{\mu+1}{\nu_n}p$ $(\mu=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ et formons la différence

$$(7)\qquad \begin{aligned}\Delta&=\Phi\left(\frac{\mu}{\nu_n}p\right)+\Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu_n}p\right)-2\Phi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_n}p\right)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu\nu_k}{\nu_n}p\right)+\varphi\left(\frac{(\mu+1)\nu_k}{\nu_n}p\right)-2\varphi\left(\frac{(2\mu+1)\nu_k}{2\nu_n}p\right)\right]=\sum{}'+\sum{}''\end{aligned}$$

où

$$(8)\qquad \begin{aligned}\sum{}'&=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\left[\varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\right)+\varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right)-2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\right)\right],\\ \sum{}''&=\sum_{k=n}^{\infty}c_k\left[\varphi(\mu\nu_{k,n}p)+\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)-2\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

$\nu_{n,k}$ $(k<n)$ et $\nu_{k,n}$ $(k\geqq n)$ étant des entiers positifs. — La valeur de n soit restreinte dans ce qui suit aux termes de la suite $\{n_i\}$.

Puisqu'on a $\nu_{n,k}=\prod_{i=1}^{n-1}\nu_{i+1,i}$, les nombres $\nu_{n,0},\nu_{n,1},\ldots,\nu_{n,n-1}$ sont divisibles par Γ; d'où il résulte qu'aucun point ω_r+sp $(r=0,1,\ldots,m;$ $s=0,\pm1,\ldots)$ ne se trouve à l'intérieur d'un segment de la forme $\left[\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p,\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\right]$ $(k=0,1,\ldots,n-1;\mu=0,\pm1,\ldots)$. En utilisant la convexité (concavité) par segments de $\varphi(x)$ et la condition 1), on peut ainsi conclure à ce que tous les termes de $\sum{}'$ sont de même signe. — D'autre part, nous avons pour $\sum{}''$ évidemment $\varphi(\mu\nu_{k,n}p)=\varphi((\mu+1)\nu_{k,n}p)=\varphi(0)$ et $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n}\frac{p}{2}\right)=\varphi(0)$ ou $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)$ suivant que $\nu_{k,n}$ est pair ou impair;

ceci entraîne

$$\sum'' = 2\left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right](c_n + \sum c_k), \tag{9}$$

la dernière somme étant étendue aux valeurs de k pour lesquelles $k > n$ et $\nu_{k,n}$ est impair. On voit que le signe de chaque membre de $\sum''$ est le même que celui des membres de $\sum'$.

En considérant donc (7), (8) et (9), on obtient le résultat

$$|\varDelta| = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \left| \varphi\left(\frac{\mu}{\nu_{n,k}} p\right) + \varphi\left(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}} p\right) - 2\varphi\left(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}} p\right) \right| +$$
$$+ 2\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right| (|c_n| + \sum |c_k|) \geqq$$
$$\geqq 2\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right| |c_n| \geqq 2\lambda \cdot \frac{p}{\nu_n} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \ldots; n = n_1, n_2, \ldots)$$

où $\lambda = \frac{\varrho}{p}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|$; puisque tout intervalle donné de la forme $(a-\delta, a+\delta)$ contient un segment $\left[\frac{\mu}{\nu_n} p, \frac{\mu+1}{\nu_n} p\right]$ (μ entier, $n = n_1, n_2, \ldots$) avec $a \in \left[\frac{\mu}{\nu_n} p, \frac{\mu+1}{\nu_n} p\right]$ pourvu que n est assez grand, l'application du lemme (cf. (2)) fournit immédiatement la non-dérivabilité de $\Phi(x)$ c. q. f. d.

6. Les considérations précédentes peuvent être complétées en certain sens si l'on envisage des fonctions qui satisfont à une condition de LIPSCHITZ.

Théorème 5. *Soit $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$ et $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$. Le signe des c_k soit arbitraire mais supposons que*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\nu_n \sigma_n - A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k\right) > 0, \tag{10}$$

où $A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$ et $\sigma_n = |\sum c_k|$, cette somme étant étendue aux indices $k \geqq n$ pour lesquels $\nu_{k,n}$ est impair.[12])

---

[12]) Donc, en particulier, $\sigma_n = |c_n|$ ou $\sigma_n = \left|\sum_{k=n}^{\infty} c_k\right|$ selon que chacun des rapports $\nu_{k+1,k}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ est pair resp. impair. — Il est clair que, étant donnés les c_k avec $\Sigma |c_k| < \infty$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement, on peut choisir $\nu_1, \nu_2, \ldots$ successivement de sorte que les inégalités $\nu_n \sigma_n > A_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k + \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (entraînant (10)) soient remplies.

Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons trois points équidistants de la forme $\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{2\mu+1}{2\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p$, μ désignant un entier. Avec les notations (7), (8) on a

$$
\begin{aligned}
|\textstyle\sum'| \leqq \sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\Bigg[\bigg|\varphi\Big(\frac{\mu}{\nu_{n,k}}p\Big)-\varphi\Big(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\Big)\bigg|+ \\
+\bigg|\varphi\Big(\frac{\mu+1}{\nu_{n,k}}p\Big)-\varphi\Big(\frac{2\mu+1}{2\nu_{n,k}}p\Big)\bigg|\Bigg] \leqq H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k;
\end{aligned} \tag{11}
$$

d'autre part, de même que ci-dessus, on obtient (cf. (9))

$$\textstyle\sum'' = 2\Big[\varphi(0)-\varphi\Big(\frac{p}{2}\Big)\Big]\sum c_k, \tag{12}$$

où k parcourt les valeurs pour lesquelles $k \geqq n$ et $\nu_{k,n}$ est impair.

On aura donc pour n assez grand

$$
\begin{aligned}
|\Delta| \geqq |\textstyle\sum''|-|\sum'| \geqq 2\bigg|\varphi(0)-\varphi\Big(\frac{p}{2}\Big)\bigg|\sigma_n - H\frac{p}{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k = \\
= \frac{2}{\nu_n}\bigg|\varphi(0)-\varphi\Big(\frac{p}{2}\Big)\bigg|\Big(\nu_n\sigma_n - A_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\Big) > 2\lambda\cdot\frac{p}{\nu_n},
\end{aligned} \tag{13}
$$

où $\lambda = \frac{\vartheta}{2p}\bigg|\varphi(0)-\varphi\Big(\frac{p}{2}\Big)\bigg|$, $\vartheta > 0$ désignant la limite inférieure (10).

Tout point a peut être recouvert par un segment de la forme $\Big[\frac{\mu}{\nu_n}p, \frac{\mu+1}{\nu_n}p\Big]$ ($\mu = 0, \pm 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots$), la longueur de ce segment tendant vers 0 pour $n \to \infty$. En vertu de (13) (cf. (2)) et du lemme on obtient que $\Phi(x)$ n'admet pas de dérivée en a, c. q. f. d.

Pour le cas où $\varphi\Big(\frac{p}{2}\Big)$ est égal à $\varphi(0)$ et $\varphi(p)$ (par exemple, où $\varphi(x) = \sin x$), on peut énoncer le

T h é o r è m e 6. *Soit* $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$ *et* $\varphi(0) = \varphi\Big(\frac{p}{2}\Big) \mp \varphi\Big(\pm\frac{p}{4}\Big)$. *Supposons que l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée: les rapports $\nu_{k+1,k}$ sont pairs (cas I), de la forme $4r+1$ (cas II), resp. de la forme $4r-1$ (cas III) pour k assez grand. En outre, soit*

$$\varliminf_{n\to\infty}\Big(\nu_n\tau_n - B_\varphi\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|\nu_k\Big) > 0, \tag{14}$$

où, en désignant $\left\{ \begin{matrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \right\} \left| \varphi(0) - \varphi\left(\pm \frac{p}{4}\right) \right|$, *nous posons* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$ *et* $\tau_n = |c_n|$ *ou* $\tau_n = \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \right|$ *ou* $\tau_n = \left| \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l} \right| - \frac{U_\varphi}{u_\varphi} \left| \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l+1} \right|$, *selon les cas I, II ou III.*

Dans ces conditions, $\Phi(x)$ est p. c. n. d.

Démonstration. Nous écrivons $\frac{p}{2} = q$ et envisageons les points $\frac{\mu}{\nu_n} q, \frac{2\mu+1}{2\nu_n} q, \frac{\mu+1}{\nu_n} q$ ($\mu = 0, \pm 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots$). En adoptant les notations employées ci-dessus avec q au lieu de p, on trouve tout d'abord

$$|\textstyle\sum'| \leqq H \frac{q}{\nu_n} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \nu_k. \tag{15}$$

Puisqu'on a $\varphi(\mu\nu_{k,n} q) = \varphi((\mu+1)\nu_{k,n} q) = \varphi(0)$ et $\varphi\left((2\mu+1)\nu_{k,n} \frac{q}{2}\right) = \varphi(0)$, $\varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ ou $\varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)$ suivant que $\nu_{k,n} \equiv 0 \pmod 2$, $\nu_{k,n} \equiv 1$ ou $-1 \pmod 4$, il résulte pour l'autre somme en question

$$\textstyle\sum'' = \begin{cases} 2c_n \left[\varphi(0) - \varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right] & \text{(I)}, \\ 2\left[\varphi(0) - \varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right] \sum_{k=n}^{\infty} c_k & \text{(II)}, \\ 2\left[\varphi(0) - \varphi\left((2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_n + c_{n+2} + \cdots) + \\ \qquad + 2\left[\varphi(0) - \varphi\left(-(2\mu+1)\frac{q}{2}\right)\right](c_{n+1} + c_{n+3} + \cdots) & \text{(III)}, \end{cases} \tag{16}$$

suivant les trois cas, pourvu que n soit supérieur à un entier positif convenable.

Il s'ensuit de (14), pour n assez grand,

$$|\Delta| \geqq |\textstyle\sum''| - |\sum'| \geqq 2\frac{u_\varphi}{\nu_n}\left(\nu_n \tau_n - B_\varphi \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k |c_k|\right) > 2\lambda \cdot \frac{q}{\nu_n}, \tag{17}$$

où $\lambda = \frac{u_\varphi}{2q}\theta$, $\theta > 0$ désignant la limite inférieure (14), avec la signification donnée de τ_n et B_φ; de là on complète la démonstration comme plus haut (cf. (13)).

Si $\{c_k\}$ et $\{\nu_k\}$ sont des *progressions géométriques,* c'est-à-dire $c_k = c^k$ $(0 < |c| < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, les conditions des théorèmes 5 et 6 peuvent être écrites d'une façon plus simple.

En effet, si nous faisons usage des expressions fermées

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k |c_k| = \frac{(\nu|c|)^n - 1}{\nu|c| - 1}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} c_k = \frac{c^n}{1-c}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l} = \frac{c^n}{1-c^2}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} c_{n+2l-1} = \frac{c^{n+1}}{1-c^2},$$

il résulte aisément comme corollaire le

Théorème 7. *Soient* $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}_H 1$ $(0 \leqq x \leqq p)$, $0 < |c| < 1$ *et* ν *un entier supérieur à* 1.

1) *Si* $\varphi(0) \neq \varphi\left(\frac{p}{2}\right)$, *nous supposons encore que* $\nu|c| \geqq 1 + A_\varphi$ *ou* $1 + A_\varphi \cdot (1-c)$ *avec* $A_\varphi = H\frac{p}{2}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right|^{-1}$, *suivant que* ν *est pair ou impair.*

2) *Si* $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) \neq \varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)$ *nous supposons que* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi$ *pour* ν *pair,* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi\ (1-c)$ *pour* $\nu \equiv 1 \pmod 4$, *enfin* $\nu|c| \geqq 1 + B_\varphi\ (1-c^2)$ $(1 - \Theta_\varphi|c|)^{-1}$ *pour* $\nu \equiv -1 \pmod 4$ *où* $B_\varphi = H\frac{p}{4}u_\varphi^{-1}$, $\Theta_\varphi = U_\varphi u_\varphi^{-1}$ *avec* $\left\{\begin{matrix} u_\varphi \\ U_\varphi \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix}\right\}\left|\varphi(0) - \varphi\left(\pm\frac{p}{4}\right)\right|$.

Dans ces conditions, la série $\sum_{k=0}^{\infty} c^k \varphi(\nu^k x)$ *représente une fonction partout continue, non dérivable.*

7. Comparons nos théorèmes à quelques exemples remarquables de la littérature.

Soit $\varphi(x) = ((x))$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(\nu > 1$, entier$)$. L'application du théorème 3 fournit alors: $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^k((\nu^k x))$ est p. c. n. d. pourvu que $c\nu \geqq 1$. — Cet exemple a été donné par KNOPP [12], avec la restriction $c\nu > 4$; le plus important cas particulier est sans doute $c\nu = 1$, celui de l'exemple de VAN DER WAERDEN [21]. — De même, pour $\varphi(x) = ((x))$, $c_k = 10^{-k}$, $\nu_k = 2^{k!}$ s'obtient l'exemple de FABER [7]; pour $\varphi(x) = |\sin \pi x|$, $c_k = c^k$ $(0 < c < 1)$, $\nu_k = \nu^k$ $(\nu > 1)$ le résultat: $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |\sin \nu^k \pi x|$ est p. c. n. d. si $c\nu \geqq 1$. Ce dernier se trouve aussi chez KNOPP, mais seulement pour $c\nu > 1 + \frac{3}{2}\pi \approx 5{,}71$.

Soit $\varphi(x)=\cos\pi x$, $p=2$, $H=\pi$, donc $A_\varphi=\frac{\pi}{2}$ au théorème 7. Il s'ensuit que $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c^k\cos\nu^k\pi x$ est p. c. n. d. pour $0<|c|<1$, ν entier, $\nu>1$ et $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1-c)$ selon que ν est pair ou impair. $\left(\nu c\geqq 1+\frac{\pi}{2}\approx 2{,}57\right.$ est donc convenable pour $c>0$ et tous les ν en question.$\left.\right)$ C'est l'exemple de WEIERSTRASS [22], mais ses conditions pour c et ν sont: $0<c<1$, ν impair, $\nu c>1+\frac{3}{2}\pi\approx 5{,}71$. — En posant $\varphi(x)=\sin\pi x, p=2$, $H=\pi$, $u_\varphi=U_\varphi=\Theta_\varphi=1$, $B_\varphi=\frac{\pi}{2}$, il résulte: $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c^k\sin\nu^k\pi x$ est p. c. n. d. pour $0<|c|<1$, ν entier >1 et $\nu|c|\geqq 1+\frac{\pi}{2}$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1-c)$ ou $1+\frac{\pi}{2}(1+|c|)$ suivant que l'on a $\nu\equiv 0 \pmod 2$ ou $\nu\equiv 1 \pmod 4$ ou $\nu\equiv -1$ (mod 4). (La condition $\nu|c|\geqq 1+\pi$ est donc suffisante pour chaque c et ν en question.) C'est une exemple de DINI [5] et KNOPP, discuté sous les conditions $0<|c|<1$, ν pair ou $\equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ et $\nu|c|>1+\frac{3}{2}\pi$. — En désignant par $\chi(x)$ la fonction impaire et de période 2 pour laquelle $\chi(x)=$ $=((x))$ $(0\leqq x\leqq 1)$, on peut conclure de même à ce que $\sum_{k=0}^{\infty}c^k\chi(\nu^k x)$ représente une fonction p. c. n. d. dans les restrictions données pour c et ν en cas de $\varphi(x)=\sin\pi x$, mais avec 1 au lieu de π; cette série se trouve aussi dans l'ouvrage cité de KNOPP avec $0<|c|<1$, ν pair ou $\equiv \operatorname{sgn} c \pmod 4$ et $\nu|c|>4$.

Bien entendu, les théorèmes précédents fournissent un nombre arbitraire d'exemples analogues; les plus simples s'obtiennent en choisissant pour $\varphi(x)$ une fonction linéaire par segments resp. une fonction définie par des arcs de cercle ou de parabole etc.

8. ZYGMUND s'occupe dans un ouvrage récent[13]) des fonctions $f(x)$ telles que

(18) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=0$$

en un point x_0 resp. uniformément dans un intervalle („smooth functions“);

---

13) [23].

il donne ainsi le premier étude systématique d'une classe de fonctions qui a été employée depuis RIEMANN dans la théorie des séries trigonométriques, et il montre par des résultats nombreux que ces fonctions jouent un rôle essentiel dans l'analyse réelle. Puisqu'il s'agit évidemment d'une généralisation de la dérivabilité, nous jugeons digne de remarquer qu'aucune des fonctions non dérivables construites plus haut ne possède la propriété (18) uniformément sur aucun segment; ceci peut être vérifié immédiatement par comparaison de (18) et (2).

En outre, les résultats profonds de HARDY[14]) sur la fonction de WEIERSTRASS montrent que les conditions pour c_k, ν_k des théorèmes 5, 6 puissent être améliorées dans certains cas particuliers. D'autre part, il semble que la condition 3) du théorème 4 (en particulier, $|c|\nu \geqq 1$ pour $c_k = c^k, \nu_k = \nu^k$) est indispensable. J'espère de revenir à ces problèmes (comme à la considération des nombres de DINI pour les fonctions en question) à une autre occasion.

Ouvrages cités.

[1] F. A. BEHREND, Some remarks on the construction of continuous non-differentiable functions, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **50** (1949), 463—481.

[2] A. S. BESICOVITCH, Diskussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differenzierbarkeit, *Bull. Acad. Sci. URSS*, Leningrad, (6) **19** (1925), 527—540.

[3] K. A. BUSH, Continuous functions without derivatives, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 222—225.

[4] J. DIEUDONNÉ, Sur une fonction continue sans dérivée, *Mathesis*, **47** (1933), 277—279.

[5] U. DINI, Su alcuni funzioni che in tutto in intervallo non hanno mai derivata, *Annali di Mat.*, (2) **8** (1877), 121—137.

[6] P. DU BOIS-REYMOND, Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente, *Journal für Math.*, **79** (1875), 21—37.

[7] G. FABER, Einfaches Beispiel einer stetigen nirgends differenzierbaren Funktion, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **16** (1907), 538—540.

[8] H. HAHN, Über stetige Funktionen ohne Ableitung, *Jahresber. d. Deutschen Math. Verein.*, **26** (1918), 281—284.

[9] G. H. HARDY, Weierstrass' non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17** (1916), 301—325.

[10] T. H. HILDEBRANDT, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly*, **40** (1933), 547—548.

---

[14]) Dans l'ouvrage [9], il est démontré par ex. que les séries $\sum a^n \cos b^n \pi x$ et $\sum a^n \sin b^n \pi x$ représentent des fonctions p. c. n. d., si $0 < a < 1$, $b > 1$ et $ab \geqq 1$; la fonction riemannienne $\sum n^{-2} \sin n^2 \pi x$ est trouvée non dérivable pour toute valeur irrationnelle de x.

[11] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175—193.

[12] K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), 1—26.

[13] H. Lebesgue, Une fonction continue sans dérivé, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 212—213.

[14] B. N. Mukhopadhyay, On some generalisations of Weierstrass' non-differentiable functions, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **25** (1934), 179—184.

[15] W. Orlicz, Sur les fonctions continues non dérivables, *Fund. Math.*, **34** (1947), 45—60.

[16] E. D. Pepper, On continuous functions without a derivative, *Fund. Math.*, **12** (1928), 244—253.

[17] S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, *Fund. Math.*, **19** (1932), 211—219.

[18] A. N. Singh, The theory and construction of non-differentiable functions, *Lucknow Univ. Studies*, N°1 (Lucknow, 1935).

[19] T. Takagi, A simple example of continuous function without derivative, *Journal Phys.-Math. Soc. Tokyo*, **1** (1903), 176—177.

[20] R. Tambs Lyche, Une fonction continue sans dérivée, *Enseign. Math.*, **38** (1942), 208—211.

[21] B. L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Zeitschrift*, **32** (1930), 474–475.

[22] K. Weierstrass, Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Werke*, **2**, 71—74.

[23] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), 47—76.

(Reçu le 29 février 1956)