

10.
UNIVERZÁLIS MÓDSZER BELL-ÁLLAPOT DESZTILLÁLÁSÁRA
FÁZISCSILLAPÍTOTT ESETBEN

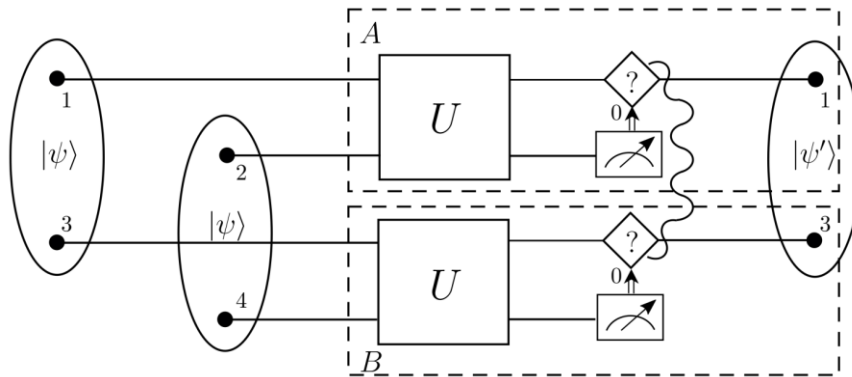
Hanyecz Ottó^{1,2}, Kálmán Orsolya², Gábris Aurél^{2,3}, Igor Jex³, Kiss Tamás²

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

²HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest

³Cseh Műszaki Egyetem, Prága, Csehország

A Bell párok a nemlokalitást mutató, összefonódott kvantumállapotok tipikus formáját képviselik, amelyeket a kvantuminformáció-feldolgozás és a kvantumkommunikáció alapvető erőforrásának tekintenek. A Bell párok, és általánosabban az összefonódott állapotok előállítása LOCC (helyi műveletek és klasszikus kommunikáció) segítségével az elmúlt évtizedekben fontos problémát jelentett. A tiszta összefonódott állapotokból kiinduló műveletet koncentrációnak, míg a zajos kezdőállapotokat alkalmazó eljárásokat desztillációnak nevezik. Általában szükséges valamilyen információ a kiinduló kvantumállapotokról a különböző desztillációs protollokban. Itt egy olyan új javaslatot mutatunk be, amely tetszőleges kezdőállapotra működik, az egyetlen feltételezésünk az, hogy a kezdőállapot inkohérens zajtartalma kicsi, vagyis a bemenő kvantumállapot tisztasága viszonylag nagy. A protokoll, ahogy lényegében minden desztillációs protokoll, valószínűségi alapon működik, mivel posztszelekciót alkalmaz. A protokoll hasznos tulajdonsága, hogy a nem nulla valószínűségű kimenő állapot minden esetben a $|\phi^+\rangle$ Bell párhoz közeli állapot lesz.



1. ábra: A desztillációs folyamat sematikus ábrája. A bemeneten két ugyanolyan összefonódott kvantumállapotú kvantumbit-párt osztunk meg a távoli A és B laboratóriumok között. Mindkét helyen egy jól megválasztott két kvantumbites unitér U műveletet hajtunk végre az ott lévő kvantumbitek között, majd az egyiket megmérjük és csak az egyik kimenetet (a 0 eredményt a számítási bázisban) fogadjuk el, az eredményt klasszikus kommunikációval egyeztetjük.

A 1. ábrán bemutatott sémában az U műveletet a következő két operátor egyikének választjuk

$$U_+ = (H \otimes \mathbb{1})U_{\text{CNOT}}(\mathbb{1} \otimes X),$$

$$U_- = (X \otimes \mathbb{1})(H \otimes \mathbb{1})U_{\text{CNOT}}(\mathbb{1} \otimes X),$$

amelyek hatása a protokoll szempontjából hasonló. Ez a választás biztosítja, hogy amennyiben a bemeneti állapot fölrható

$$\rho = (1 - \varepsilon) |\psi\rangle\langle\psi| + \varepsilon \rho_{\text{err}}$$

alakban, akkor az 1. ábrán bemutatott operációt háromszor ismételve (összesen 8 ugyanolyan állapotú kvantumbit-pár felhasználásával) a kimeneti állapot a $|\phi^+\rangle$ Bell állapot lesz $O(\varepsilon^2)$ pontossággal. Itt ε egy kis paraméter, ρ_{err} pedig az inkohereus zajt leíró tetszőleges sűrűségoperátor.

A desztillációs protokoll bemenete tehát egy zajos Bell pár, ami eredetileg a $|\phi^+\rangle$ állapotban volt, de mind a két tagját a keletkezésük óta valamilyen nem kívánt hatás érte. Ezt a hatást teljesen pozitív, nyomörző (CPTP) leképezésekkel, azaz kvantumcsatornákkal kényelmesen felírhatjuk. A csatornák leírására Choi reprezentációt [2,3] használunk, itt most csak a sűrűségmátrix felírását mutatjuk be. A kvantumcsatornák bemeneti és kimeneti Hilbert terét jelölje $\mathcal{H}_{\text{in}}$ és $\mathcal{H}_{\text{out}}$. A CPTP leképezéseket jelölje $\mathcal{E}$, amiket felírhatunk egy hermitikus, pozitív szemidefinit mátrixal, az $X_{\mathcal{E}} : \mathcal{H}_{\text{in}} \otimes \mathcal{H}_{\text{out}} \mapsto \mathcal{H}_{\text{in}} \otimes \mathcal{H}_{\text{out}}$ leképezéssel. A kvantumcsatorna kimenetét a bemeneti ϱ sűrűségmátrix alapján megkaphatjuk a következő alakban:

$$\mathcal{E}(\varrho) = \text{Tr}_{\text{in}} ((\varrho^{\top} \otimes I) X_{\mathcal{E}}).$$

Ebben a munkában fáziscsillapító csatornával foglalkozunk. A csatorna paraméterét jelölje $p \in [0, 1]$, ahol $p = 0$ az identitás csatorna, míg $p = 1$ változtatja meg a legnagyobb mértékben a bemeneti állapotot. Matematikailag ez a csatorna a sűrűségmátrix off-diagonális elemeit csökkenti, míg a főátló elemeit nem változtatja. A Choi reprezentációja a fáziscsillapító csatornának a következő alakban írható fel:

$$X_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A keletkező Bell-pár mindkét tagja független kvantumcsatornákon megy keresztül. Ekkor a kimenő állapotot a pár tagjaira ható csatornák szorzata adja meg:

$$\varrho = (\mathcal{E}_A \otimes \mathcal{E}_B)(\varrho^{|\phi^+\rangle})$$

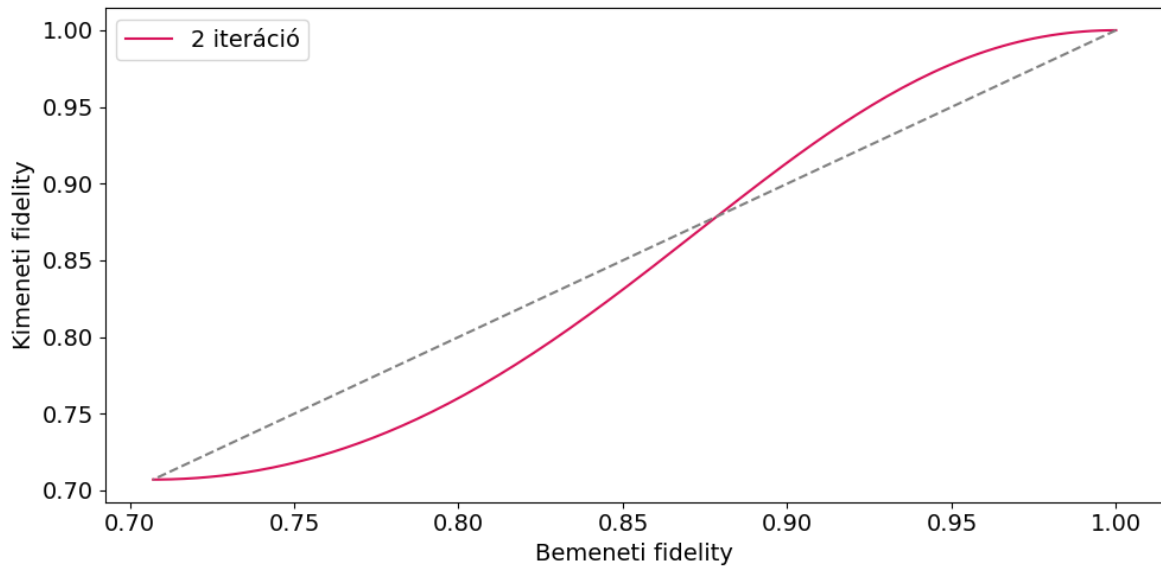
ahol $\varrho^{|\phi^+\rangle} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$. Fáziscsillapító csatornán átmenő Bell-pár esetén a desztillációs protokoll bemeneti sűrűségmátrixa a következő lesz:

$$\varrho_{\text{in}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (1-p)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p)^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezzel a sűrűségmátrixal indul tehát a desztillációs protokoll, amiben a következő unitér transzformációt alkalmazzuk:

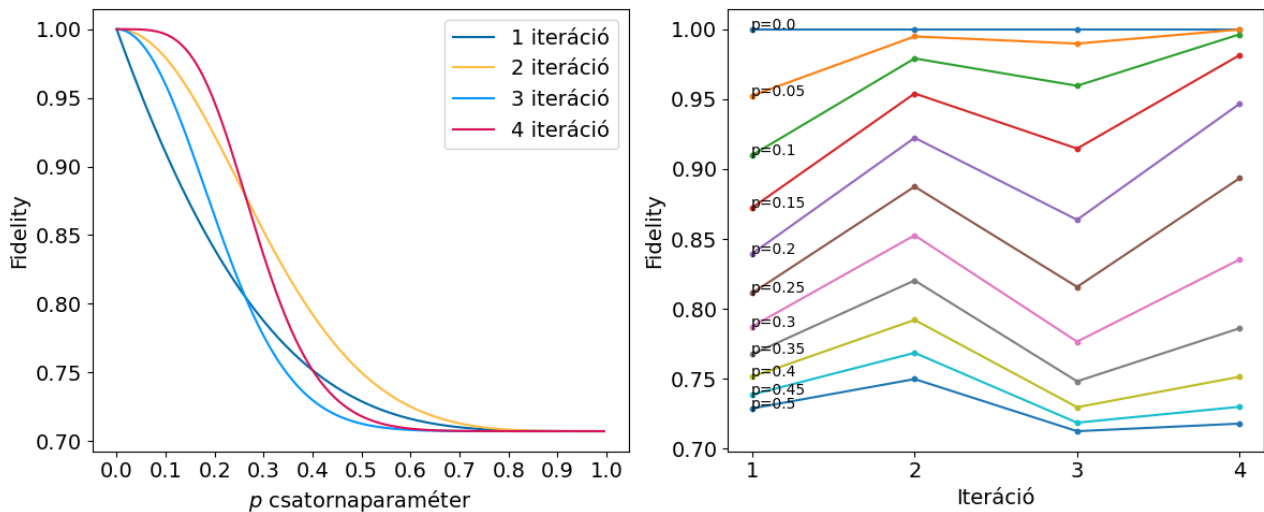
$$U_+ = (H \otimes \mathbb{I}) U_{\text{CNOT}}(\mathbb{I} \otimes X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minden iteráció végén kiszámoltuk a bemeneti és kimeneti fidelity értékét, amely a csatorna paraméterétől implicit függ: a paraméter növekedésével a bemeneti fidelity csökken. Az 2. ábrán látható a kimenő fidelity, azaz a desztillációs protokoll által visszaadott sűrűségmátrix és $\varrho^{|\phi^+\rangle}$ közötti fidelity a fáziscsillapított bemeneti ϱ_{in} és $\varrho^{|\phi^+\rangle}$ közötti fidelity függvényében, négy iteráción keresztül. A p csatornaparaméter értéke jobbról balra növekszik, ahogy a fidelity értéke csökken.



2. ábra: A kimeneti fidelity változása a bemeneti fidelity függvényében, két iteráció végén. A kimeneti fidelity a protokoll által visszaadott sűrűségmátrix és a zajmentes $\rho^{|\phi^+\rangle} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$ közötti, a bemeneti fidelity pedig a fáziscsillapított ρ_{in} és a zajmentes $\rho^{|\phi^+\rangle}$ közötti fidelity.

Ha a protokoll által visszaadott fidelity az 2. ábrán rajzolt szaggatott vonal felett van, akkor a desztillációs folyamatot sikeresnek tekintjük. Látható, hogy egy adott ponton nem segít a többszörös iteráció sem, a kimeneti állapot mindig rosszabb lesz, mint a bemeneti „zajos” állapot. Ezt a kritikus pontot analitikusan határoztuk meg. A ρ_{in} és a két iteráció után kapott sűrűségmátrix fidelity-je a csatorna paraméterétől függ, a fidelity értékek egyeznek, ha a sűrűségmátrixok komponensei megegyeznek. Ez a kritikus csatornaparaméter értékénél történik, ahol a fidelity értéke $\mathcal{F} \approx 0.88$ körül található. E kritikus csatornaparaméternél magasabb értékeknél a desztillációs protokoll tehát a bemeneti sűrűségmátrixnál „rosszabb” sűrűségmátrixot ad vissza.



3. ábra: **Bal oldal:** A kimeneti fidelity változása a csatornaparaméter függvényében, több iteráció esetén. **Jobb oldal:** Különböző csatornaparaméterek esetén a kimeneti fidelity változása az iterációszám függvényében.

A 3. ábrán a kimenet állapotoknak a megcélzott $|\phi^+\rangle$ Bell állapothoz való hűségét (fidelity) mutatjuk be, különböző esetekre. A bal oldali ábrán a kimeneti hűség értéke látható a csatornaparaméter függvényében, különböző számú iteráció esetére. A 3. ábra jobb oldalán néhány kiválasztott csatornaparaméter esetén látható a kimeneti hűség változása az iterációszám függvényében.

Megállapíthatjuk, hogy a vizsgált esetben a páros és a páratlan számú iterációnál megfigyelhető szisztematikus oszcillációkkal növekszik a hűség. Ez a viselkedés mindaddig igaz, amíg a kritikus csatornaparaméter fölött vagyunk.

Összefoglalva, egy olyan protokollt mutattunk be, amely tetszőleges, kis inkoherens zajt tartalmazó kezdőállapot 8 példányából LOCC eljárással $|\phi^+\rangle$ Bell párhoz közeli állapotot állít elő, amelyben a zaj első rendben eltűnik. Egy néhány elemi kapuból álló lépés alkotja az eljárás magját, amelyet iterálva jutunk hasznos kimenethez. Konkrétan megvizsgáltuk azt az esetet, amikor a bemeneti kvantumbitek mindegyike egy fáziscsillapított csatornán haladt át, ezáltal válva zajossá. Megmutattuk, hogy ebben az esetben az eljárás két iterációja már praktikusán használható desztillációhoz vezet, amennyiben a csatorna paramétere egy kritikus érték alatt van, a kritikus értéket analitikusan is meghatároztuk.

Felhasznált irodalom

- [1] O. Kálmán, A. Gábris, I. Jex, and T. Kiss, arXiv:2402.16752 (2024).
- [2] O. Hanyecz, A. Bodor, P. Adam and M. Koniorczyk, Cryptography 2025, **9(2)**, 25
- [3] G. Homa, A. Ortega and M. Koniorczyk, Z. Naturforschung A 2024, **79**, 1123–1133.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Saverio Pascazio, Stephen M. Barnett, Bergou János és Széchenyi Gábor közreműködését és a hasznos észrevételeiket. Köszönjük Maria Papanikolaou kapufelbontásban nyújtott segítségét. Ez a munka az NKFIH TKP-2021-NVA-04 sz. pályázatának a támogatásával készült. Ez a munka a Cseh Köztársaság RVO14000 sz. állami támogatásával, valamint a GAČR 23-07169 sz. pályázatának támogatásával készült.